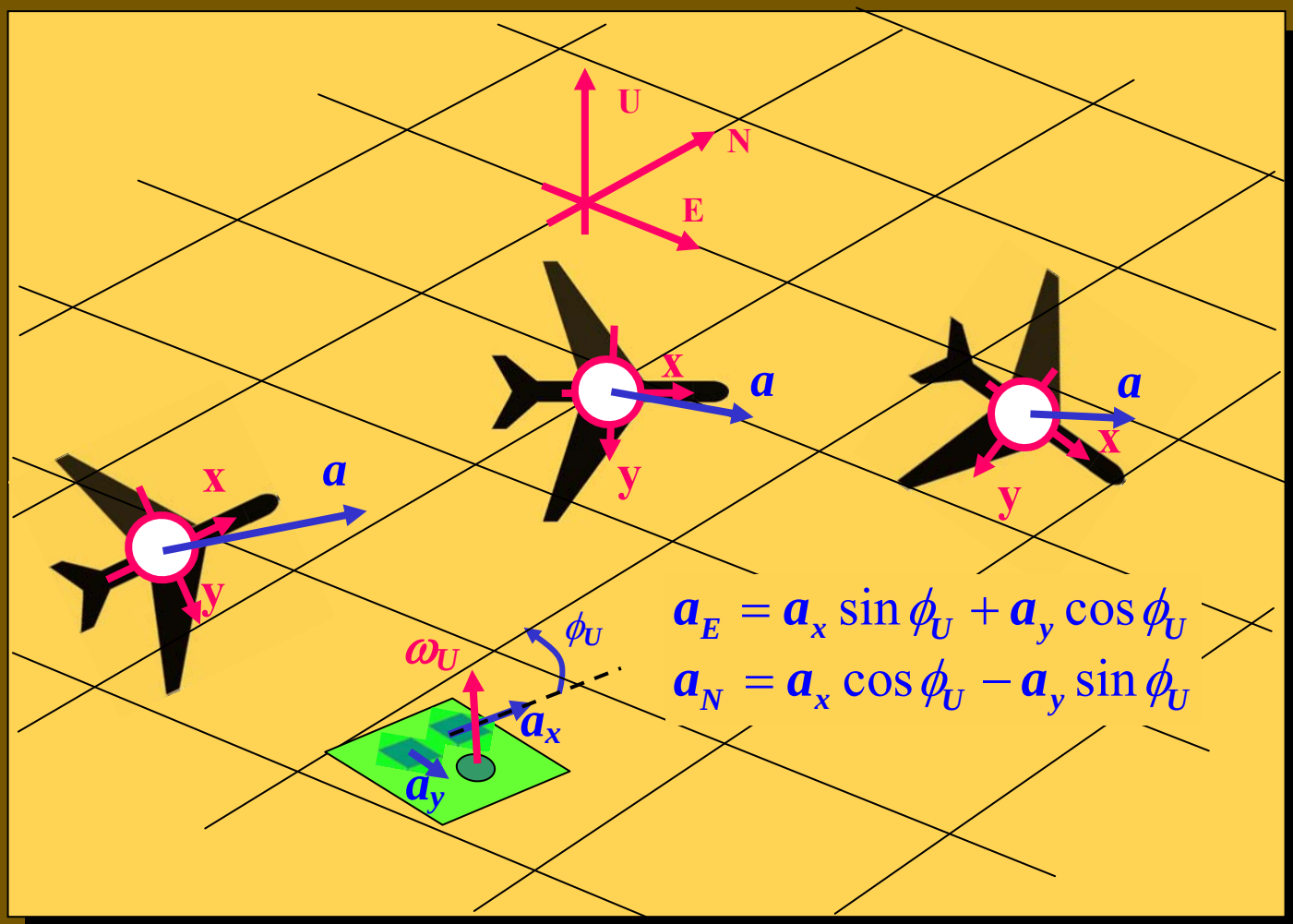
Sistemas de Navegación Integrada con Aplicaciones

(2ª Edición 2019)



Martín España

CONAE
COMISIÓN NACIONAL DE
ACTIVIDADES ESPACIALES

Sistemas de Navegación Integrada con Aplicaciones

Martín España*

Segunda Edición (Corregida y Aumentada) 2019

CONAE
Comisión Nacional de Actividades Espaciales
ISBN: ……..

* Se desempeña como Investigador de la Comisión Nacional de Actividades Espaciales desde 1997.

Prefacio a la Segunda Edición de 2019

Parece natural que luego de publicada una obra escrita por quien continua trabajando en la materia que la obra trata, su autor sienta la necesidad de corregir y mejorar la versión original y aún de incluir temas que, con el paso del tiempo, cada vez más parecen "haberse quedado en el tintero". Pues bien, esta nueva edición tiene la pretensión de cubrir, aunque sea en parte, algunas de aquellas carencias de origen de la primera versión que tuve el honor fuese publicada como premio al libro 2010 por la Asociación Argentina de Control Automático. No me ocuparé en este prefacio de mencionar la larga lista de correcciones de estilo, simplificaciones en la notación y reorganización de muchos párrafos y temas con miras a hacer más amigable y didáctica su lectura. En cambio, sí creo necesario referirme a los más significativos nuevos contenidos que fueron incluidos en la presente edición.

La nueva versión del Capítulo 2 incluye la descripción de los procesos que perturban las medidas de una unidad inercial. Dicha descripción se complementa con una introducción del concepto de Variancia de Allan, fundamento teórico esencial del procedimiento para medir y caracterizar dichas perturbaciones que hoy en día un estándar de la industria. Con base en la medida de la Variancia de Allan las unidades inerciales se clasifican según las clases de performance descritas en ese Capítulo. El concepto de modelo markoviano unificado introducido en el párrafo 2.7 permite formular esas perturbaciones en forma acorde con la teoría de fusión de datos que luego es aplicada a los esquemas de navegación integrada expuestos en el Capítulo 10.

Los contenidos del Capítulo 8 de la primera edición se expanden en los actuales Capítulos 8 y 9. El primero preserva como eje la descripción de los sistemas satelitales de navegación global (GNSS) pero elabora con mayor detalle los principios que gobiernan el diseño de un receptor GNSS basado en *software*. Se pretende así motivar al lector a incursionar en una tecnología de rápida evolución impulsada por vastos recursos de investigación asignados a nivel mundial. A partir del modelo de la señal de RF en la antena, se formula matemáticamente la transformación de esta señal a lo largo de la etapa de RF del receptor previo a su demodulación compleja y muestreo digital. A partir de esta formulación se describen los procedimientos numéricos que, aplicados a la secuencia muestreada, permiten determinar: a) los satélites visibles de la constelación y rastrearlos, b) el tiempo de tránsito de la señal entre cada satélite y el receptor, c) el desvío Doppler de la señal en tanto que medida de la velocidad relativa respecto de cada satélite visible, d) la secuencia de bits de datos que contiene el mensaje emitido por cada satélite y e) una medida de la fase de la portadora.

En el Capítulo 9, el receptor GNSS es visto en tanto que sensor exoceptivo de tres observables, a saber: de código, de fase y Doppler. Se modelan matemáticamente las medidas de estos observables teniendo en cuenta las múltiples perturbaciones que las afectan. Con base en estos modelos se consideran diversas opciones para determinar la posición y la velocidad (absolutas o relativas), juntamente con las correspondientes imprecisiones asociadas. El subcapítulo 9.4 está consagrado a las técnicas de fase subrayando su potencial para el posicionamiento de muy alta precisión. Se destaca la dificultad inherente de estas técnicas de posicionamiento debida al carácter ambiguo de la medida de la fase que, en la práctica, sólo puede ser medida módulo un número entero de

ciclos. Se establecen observables diferenciales derivados del observable primario que habilitan la aplicación de técnicas numéricas para la determinación de la ambigüedad entera exclusivamente con datos obtenidos época por época. Estas técnicas, conocidas como de cinemática en tiempo real, en inglés *Real Time Kinematics* ó simplemente *RTK*, requieren de un considerable esfuerzo computacional. En el subcapítulo 11.7 se retoma este tema para demostrar que cuando los observables forman parte de un esquema de navegación integrada, las ambigüedades pueden estimarse en tanto que variables reales juntamente con el estado cinemático del vehículo.

El material del Capítulo 9 de la primera edición es expuesto en mayor detalle en los actuales Capítulos 10 y 11. El primero está dedicado exclusivamente a exponer el problema del filtrado no lineal junto con sus dos versiones aproximadas más populares: el *Filtro de Kalman Extendido* (*EKF: Extended Kalman Filter*) propuesto inicialmente por Jazwinski, (1970) y el *Filtro de Kalman con "Puntos Sigma*" (*SPKF: Sigma Point Kalman Filter*) propuesto por Julier/Uhlmann/Durrant-Whyte, (1995). Se incluyen pseudo-códigos para ambos procedimiento lo cual pensamos será de utilidad para los programadores.

El Capitulo 11, dedicado exclusivamente a ejemplos de aplicación, amplía, considerablemente, los casos expuestos en la primera edición. Se distinguen los procedimientos comunes a todos los sistemas de navegación de aquellos que, siendo dependientes de la configuración instrumental del problema, tienen que ver con el cálculo de la innovación y con la actualización de la estimación del filtro de fusión datos. Los primeros darán lugar a módulos de SW comunes a muchas aplicaciones, los segundos requieren establecer para cada aplicación específica: a) el modelo de las desviaciones de las medidas inerciales, b) los modelos de los sensores exoceptivos, c) el modelo de las innovaciones y d) el modelo de las desviaciones del estado y de los parámetros. El ultimo subcapítulo está dedicado a exponer el diseño completo de un sistema de navegación aplicado al radar de apertura sintética (SAR) aerotransportado de la CONAE. Con datos experimentales de vuelos de prueba se evalúan las performances de varias configuraciones instrumentales alternativas. De los resultados se extraen conclusiones que reflejan relaciones de compromiso prácticas entre la complejidad del SW y la calidad de la instrumentación disponible.

Martín España
Junio 2019

Prólogo a la Edición de 2010

La rápida expansión del campo de aplicación de la navegación ha ido de la mano del acelerado avance de las tecnologías de integración masiva de componentes electrónicos y unidades de cómputo, juntamente con el desarrollo de actuadores y sensores miniaturizados en tecnología MEMS (*Micro Electro Mechanical Systems*). En la actualidad, las aplicaciones abarcan campos tan diversos como la microcirugía, la neuro-navegación, los vehículos autónomos (aéreos, terrestres y subacuaticos), las misiones espaciales o los servicios basados en la localización del usuario. Es posible afirmar que las funciones de casi cualquier dispositivo portátil o diseñado para desplazarse en el espacio (autónomamente o no) son susceptibles de ser mejoradas, ampliadas o automatizadas gracias a la inclusión de un sistema de navegación en alguna de sus variantes. Esto incluye teléfonos celulares, herramientas y sensores a bordo de un móvil en cualquier medioambiente La navegación autónoma, habilitada mayormente por estas nuevas tecnologías, ha abierto a su vez nuevas fronteras y líneas de investigación relativas el diseño de sistemas cooperativos conformados por conjuntos de entidades dinámicas independientes que comparten información y objetivos comunes. Ejemplos de estos sistemas son los grupos de robots en celdas de manufactura, las flotillas de vehículos en misiones de rescate y los arreglos reconfigurables de microsatélites en vuelo coordinado. Este último concepto es sin duda una de las ideas más novedosas formuladas por la industria espacial del presente siglo y seguro impactará decisivamente en las nuevas tecnologías de observación de la Tierra desde el espacio. En particular, motiva actualmente enormes esfuerzos de desarrollo de nuevos diseños de radares espaciales tanto para las aplicaciones de observación SAR (*Synthetic Aperture Radar*) como de supervisión.

Fruto de la alta integración y miniaturización de los circuitos digitales son los sistemas *embebidos* basados, ya sea, en las clásicas tarjetas PC/104 para los sistemas con requerimientos de mayor flexibilidad funcional o, para aquellos orientados a aplicaciones específicas, en tecnologías como los SoC (*System on a Chip*), FPGA (*Field Programmable Gate Arrays*) o ASIC (*Application Specific Integrated Circuit*). En todos los casos el resultado es una gran capacidad de cómputo y comunicaciones disponibles a bordo de un móvil. Una consecuencia importante de esta nueva realidad es la posibilidad de implementar poderosos algoritmos numéricos que estiman, con una alta tasa de salida de datos, simultáneamente los parámetros de navegación y las imprecisiones instrumentales. Esto se realiza usando una variada gama de instrumentos cuyos datos son procesados ni bien están disponibles y no necesariamente en forma sincrónica. Estos algoritmos, llamados de navegación integrada, emplean métodos de fusión de datos con origen en la teoría del filtrado no lineal de procesos estocásticos. Los algoritmos más utilizados constituyen extensiones del Filtro de Kalman ya sea en sus versiones analíticas, i.e.: EKF (*Extended Kalman Filter*) y LKF (*Linearized Kalman Filter*) o Bayesianas, i.e: SPKF (*Sigma Point Kalman Filter*) y UKF (*Unscented Kalman Filter*). La principal ventaja de estas técnicas es que, se benefician de la diversidad de fuentes de información instrumental para reducir la incertidumbre de los

estimados. De este modo, la certidumbre resultante resulta siempre mejor que la mejor de todas provista por cada instrumento tomado individualmente. Esto hace posible por un lado, utilizar instrumentos que proveen sólo información parcial del estado de navegación y por otro reducir las exigencias de calidad y precisión de cada instrumento en particular. Dado que, tanto el costo como el volumen de los instrumentos crecen rápidamente con la precisión requerida, la complementación de instrumentos, posibilitada por los nuevos algoritmos, hace de estos últimos el sustrato natural del software embebido usado en los nuevos y ubicuos sistemas de navegación, expandiendo y reforzando aún más su campo de aplicaciones.

Por lo dicho anteriormente, los nuevos resultados de la teoría de fusión de datos se potencian sinérgicamente con los avances tecnológicos en instrumentación y computación. Esto confiere a la disciplina un dinamismo particular y gran interés en muchos laboratorios de investigación. Frente a esta realidad caracterizada por la innovación, el presente volumen busca exponer, lo más rigurosamente posible, los fundamentos conceptuales en los que se basa la actividad entendiendo que de este modo el lector podrá beneficiarse de un material que le permitirá comprender, desarrollar o anticipar nuevas tendencias.

La navegación integrada es un ejemplo claro de interdisciplinariedad que toca a un mosaico de tecnologías y métodos matemáticos de los cuales, la mayoría de los textos actuales exponen aspectos parciales. Así, para abarcar la diversidad inherente a esta tecnología el investigador y el tecnólogo se ven obligados a recorrer una extensa bibliografía. Dadas las necesidades de nuestro medio en el cual el desarrollo de esta tecnología es aun incipiente la obra ofrece, a quienes deseen iniciarse en el tema, un punto de partida único y coherente que abarca la diversidad de aspectos que conducen a la comprensión y al diseño de los sistemas de navegación actuales.

La obra expone rigurosamente los fundamentos matemáticos de los métodos modernos de la navegación integrada entendiendo que sólo la comprensión cabal de éstos permitirá a ingenieros y tecnólogos desarrollar nuevos sistemas de navegación y al investigador innovar en el tema. Dichos fundamentos incluyen las tecnologías actuales de los instrumentos de navegación, los sistemas de navegación satelital global junto con los modelos matemáticos de sus mediciones, los métodos numéricos de integración de las ecuaciones diferenciales cinemáticas, la representación de la orientación de un cuerpo, las transformaciones de coordenadas entre distintos sistemas de referencia, la modelización del campo geo-gravitatorio y la descripción matemática de los métodos de fusión de datos.

Más de 10 años de experiencia en la materia se reflejan en aportes metodológicos, puntos de vista novedosos y descripción de aplicaciones en cuyo desarrollo participé en forma directa. Dicha experiencia estuvo vinculada al diseño y desarrollo de unidades de navegación para la Comisión Nacional de Actividades Espaciales y a mi labor como profesor de la asignatura que dicto desde 2006 en el Departamento de Investigación y Doctorado de la Facultad de Ingeniería de la UBA.

El libro consta de 9 capítulos. En el Capítulo 1 se define el concepto de navegación y se clasifican los métodos clásicos según la instrumentación utilizada. Se introducen conceptos como navegación inercial, navegación *strapdown* y navegación integrada que luego serán abordados en detalle en el resto del volumen. En el Capítulo 2 se enuncian

los principios físicos y principales tecnologías empleadas en los instrumentos inerciales actuales y se formula la estructura del modelo matemático de una unidad de medidas inerciales. El Capítulo 3 estudia las diversas representaciones de la orientación de un cuerpo en el espacio y formula las ecuaciones diferenciales (cinemáticas) que describen su evolución en el tiempo. El Capítulo 4 introduce los sistemas de coordenadas usuales junto con los elementos de geodesia requeridos en la disciplina. En particular, se justifican los distintos modelos del campo geo-gravitacional utilizados según el tipo de aplicación. En el Capítulo 5 se deducen las ecuaciones de navegación para las ternas de navegación usuales. El Capítulo 6 estudia la dinámica de propagación de los errores de las ecuaciones de navegación. En el Capítulo 7 se describen los algoritmos de navegación inercial de tipo *strapdown* en tiempo real para las ternas ECEF y LGV. El Capitulo 8 presenta los sistemas de Navegación Satelital Global (GNSS) operativos o en curso de serlo y se concentra en la descripción de las señales, los servicios y los observables del sistema GPS. En el Capitulo 9 se describen los métodos de fusión de datos usados en la navegación integrada y se exponen ejemplos de aplicación. Finalmente, en el Apéndice A se deduce la expansión en armónicos esféricos del campo gravitatorio terrestre usado, principalmente, en aplicaciones espaciales.

Es mi deseo expresar un muy especial agradecimiento a Juan Ignacio Giribet y a Juan Carrizo, ambos de la Facultad de Ingeniería de la UBA, por su valiosa participación en diversos desarrollos compartidos. Su generosa disposición en numerosas y valiosísimas charlas contribuyó significativamente a la concreción y depuración de esta obra. Vaya también un agradecimiento genérico a los estudiantes de mi materia que esforzadamente asimilan, critican y aplican los conceptos de esta obra logrando finalmente convencerme del interés de los mismos.

Finalmente, quiero dejar sentado mi reconocimiento a la CONAE, institución que me cobijó y estimuló con sus ambiciosos proyectos y desafíos a ingresar en este apasionante campo de la tecnología moderna.

Martín España
Abril 2010

Índice

Capítulo 1
Introducción

Es costumbre denominar "*parámetros de navegación*" al conjunto de valores numéricos que describen la posición, la velocidad y la orientación de un vehículo respecto de un dado sistema de referencia y en unas dadas unidades. Con base en esta denominación, navegación se define habitualmente como *"el arte y la ciencia que permiten determinar los parámetros de navegación de un vehículo con información disponible a bordo del mismo."*

Desde tiempos remotos, motivados por sus desplazamientos sobre la tierra o el mar, los seres humanos han utilizado diversas técnicas de navegación. Algunas permiten determinar el valor absoluto de los parámetros de navegación del vehículo (o del individuo) gracias a mediciones referidas a cuerpos exteriores al mismo, por ejemplo, los objetos cercanos en la navegación "a vista", los astros de posición conocida en el firmamento[*], el campo geomagnético local que, mediante una aguja imantada, permite determinar el rumbo respecto del norte magnético (técnica utilizada antiguamente en China, en Europa y en algunas civilizaciones mesoamericanas). Otras técnicas se basan en la medición de la velocidad de variación de los parámetros de navegación, lo que requiere conocer sus valores iniciales en un punto de partida. En este caso, los nuevos parámetros de navegación son determinados por "extrapolación" integrando la velocidad de cambio. Este procedimiento, tradicionalmente usado en la navegación marina, es conocido en inglés con el nombre de "*dead-reckoning*" en alusión al método de medir la velocidad de un barco respecto de un cuerpo muerto supuestamente inmóvil sobre la superficie del agua. Similarmente, en aeronavegación se utiliza la medición de la velocidad respecto del aire exterior obtenida mediante tubos de Pitot. La medición de la velocidad combinada con el conocimiento del rumbo magnético permite estimar la posición por extrapolación desde una posición conocida anterior.

Una limitación de los métodos de extrapolación clásicos es la dependencia de sus mediciones respecto de un medio (aire o agua) que no solamente es constantemente perturbado por corrientes o vientos sino que además sus propiedades físicas cambiantes (temperatura, la presión, la humedad, etc.) alteran la estabilidad de la medición ya sea de la velocidad o de la aceleración. Durante el siglo XX se desarrollaron instrumentos inerciales que permiten medir, a bordo del vehículo, su aceleración y velocidad angular respecto de un sistema inercial (sistema fijo respeto de las estrellas) en forma estable e independientemente de las condiciones ambientales. Esta ventaja motivó una gran difusión de estos instrumentos, en particular, en las aplicaciones a la aeronavegación y al desarrollo de cohetes. Sin embargo, como veremos, toda técnica de extrapolación conlleva un crecimiento polinomial con el tiempo de los errores en los parámetros de navegación.

[*] Esto incentivó la invención de astrolabios a partir del siglo XV y más tarde sextantes y cronómetros.

Las anteriores limitaciones han hecho que la navegación inercial pura sea cada vez menos utilizada en nuestros días, exceptuando aplicaciones en las que se requiera de una autonomía total del vehículo o que deba asegurarse inmunidad a fallas y a posibles interferencias exteriores. Ejemplos de aplicaciones en las que está vedada toda información exterior al vehículo son los submarinos en misiones íntegramente debajo del agua o los misiles balísticos intercontinentales. De otro modo, es cada vez más frecuente combinar medidas inerciales con otras provenientes de instrumentos que pueden medir alguno o todos los parámetros de navegación en forma directa.

La aviación civil es un ejemplo de tipico de navegación que combina regularmente la tecnología inercial con sensores de referenciación absoluta. Los mas utilizados son radio señales provenientes de estaciones en Tierra (sistemas VOR, NDB, ILS, etc. Kayton/Fried, 1997) o en el espacio (sistemas satelitales de navegación global como el GPS). Importa destacar sin embargo que, a pesar de la rápida evolución de los instrumentos de navegación absoluta, ningún avión prescinde hoy en dia de información inercial, ya sea para complementar la no inercial o como fuente de información redundante en prevención de fallas.

1.1 Sistemas de referencias

Un sistema de referencia es una terna de 3 vectores ortogonales con base en un punto origen que permite definir las coordenadas en que son representados los parámetros de navegación. Para poder expresar sus resultados, todo sistema de navegación usa una o más ternas de referencia en sus distintas fases de cómputo. En el Capítulo 4 se presentan en forma detallada las ternas de referencia usuales y las transformaciones de coordenadas que las vinculan, mientras tanto mencionamos algunas que son de interés a los fines de la presente introducción.

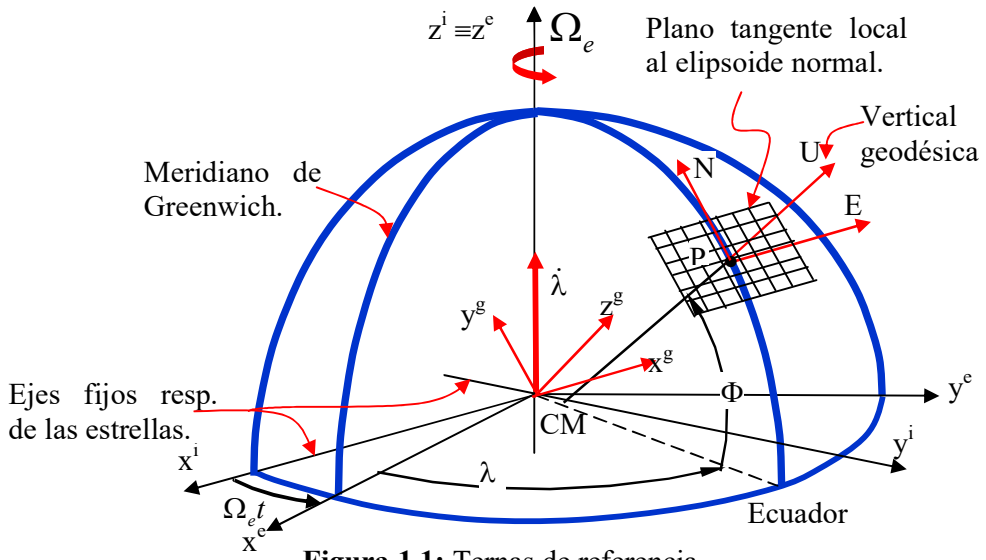


Figura 1.1: Ternas de referencia.

Las ternas: ECEF (*Earth Centered Earth Fixed*) y ECI (*Earth Centered Inertial*) cuyos ejes, respectivamente, (x^e, y^e, z^e) y (x^i, y^i, z^i) son indicados en la Fig. 1.1, comparten su origen en el centro de masa de la Tierra (CM) y el eje $z^e \equiv z^i$ que coincide, a su vez, con

el eje de rotación terrestre. Los otros dos ejes están contenidos en el plano ecuatorial. En el caso de la ECEF estos ejes son solidarios a la Tierra mientras que en la terna ECI permanecen inmóviles en el espacio inercial (o como suele decirse respecto de las "estrellas fijas"). La terna ECEF, regularmente utilizada en navegación en las cercanías de la Tierra, ha sido adoptada por los Sistemas Satelitales de Navegación Global (GNSS) tales como GPS, GLONASS y GALILEO. Dedicaremos los Capítulos 8 y 9 a estudiar estos sistemas y las mediciones a que dan acceso. Por su parte, la terna ECI tiene el interés, desde un punto de vista matemático, de que las ecuaciones de movimiento a las que da lugar adoptan la forma más simple posible. En cambio, para una referencia no inercial (p.e. la ECEF) las ecuaciones se obtienen mediante transformaciones de las ecuaciones en ECI que, como se verá en detalle en al Capítulo 5, incluyen términos originados en las aceleraciones aparentes de Coriolis o centrípeta.

En transportes intra-atmosféricos (aéreos, marinos o terrestres) es usual utilizar una terna centrada en el CM cuyo eje z sea ortogonal al plano tangente local al elipsoide normal (ver definición en el Capítulo 4) denominada terna de la vertical geodésica local o LGV (*Local Geodetic Vertical*). Un caso particular es la terna geográfica, denotada con el superíndice "g" en la Fig. 1.1, cuyos ejes (x^g, y^g, z^g) son paralelos, respectivamente, a las direcciones Este, Norte y Arriba (Up) locales.

1.2 Clasificación de los métodos de navegación

Los métodos de navegación son tan variados como los principios físicos que permiten medir o calcular los parámetros de navegación o como los sistemas de referencias respecto de los cuales éstos están referidos. A grandes rasgos y como fuera sugerido en la introducción de este capítulo, pueden distinguirse dos grandes clases: los métodos de extrapolación y los métodos de referenciamiento absoluto (véase también la clasificación propuesta por Kayton/Fried, 1997):

1.2.1 Métodos de extrapolación

Usan mediciones de las derivadas temporales (velocidades y aceleraciones lineales o angulares) o de variaciones relativas de los parámetros de navegación respecto de un valor anterior. Los valores absolutos de los parámetros de navegación son obtenidos mediante integración o acumulación de las mediciones a partir de un valor inicial. Los instrumentos típicos son: sensores inerciales, odómetros, codificadores rotatorios, sensores de velocidad del aire, etc. y son denominados *introceptivos* por no depender de una referencia exterior. En los sistemas que utilizan el efecto Doppler (electromagnético o acústico) para medir velocidad, la posición relativa respecto de la fuente también se determina por extrapolación, por lo que quedan incluidos en este grupo.

Dado que los parámetros de navegación se obtienen por integración de las mediciones, los errores en éstas y/o en las condiciones iniciales inducen errores de navegación que crecen polinomialmente con el tiempo por lo cual, para trayectorias prolongadas estos métodos requieren ser actualizados con mediciones absolutas de la posición o la orientación. A pesar de estas limitaciones, tienen el interés de ser independientes de referentes exteriores al vehículo y la ventaja de disponer de información en forma casi continua o a una alta tasa de adquisición.

1.2.2 Métodos de referenciamiento absoluto

Utilizan sensores que miden directamente parámetros de navegación (pueden ser coordenadas de posición, velocidad u orientación) respecto de un dado sistema de referencia mediante la detección e identificación de señales u objetos exteriores al vehículo, razón por la cual estos sensores son denominados genéricamente *exoceptivos*. Cuando el parámetro medido es directamente la posición del móvil respecto de algún hito conocido, situación frecuente en robótica móvil (Siegwart/Nourbakhsh, 2004), es más usado el nombre de auto-localización. Contrariamente a los sensores introceptivos, las mediciones exoceptivas suelen ser adquiridas en instantes discretos y no siempre en tiempo real. Se destacan en este grupo los sistemas que utilizan los siguientes principios, algunos de los cuales son desarrollados más abajo:

- Radionavegación.
- Navegación celeste.
- Navegación con mapa.
- Rebote de señal (sonar, radar, lidar).
- Navegación por imágenes (visión/reconocimiento de formas)
- Sensores de distancia (explorador laser).

Sistemas de Radionavegación

Se basan en una red de estaciones radiotrasmisoras de referencia fijas a la Tierra o montadas sobre plataformas móviles (espaciales, terrestres, marinas o aéreas). Los instrumentos/receptores a bordo del vehículo detectan las señales emitidas y calculan su posición relativa respecto de las estaciones emisoras de referencia. El desplazamiento en la frecuencia de la portadora de la señal debido al efecto Doppler permite medir su velocidad radial respecto de las estaciones emisoras. Los sistemas de radionavegación terrestre más usados en aeronavegación son los NDB (*Non-Directional Beacons*) o radiofaros no direccionales, los VOR (VHF-*Omnidirectional Range*) y los DME (*Distance Measurement Equipment*) (Kayton/Fried, 1997). Los dos primeros miden la dirección que une al vehículo con la fuente emisora y el último la distancia a un punto de referencia. El primero es el más antiguo en vigencia y consiste en una red que emite señal polarizada verticalmente con portadoras entre 200KHz y 1600KHz. Mediante el principio "goniométrico" el receptor detecta las direcciones de procedencia de la señal de dos o más emisores con las que calcula la posición del vehículo. Entre las ventajas de los NDB para la aeronavegación figuran su bajo costo de mantenimiento, la posibilidad de delegar la responsabilidad de la precisión al usuario y el hecho de que la propagación inherentemente "terrestre" extiende su alcance más allá de la curvatura del horizonte. Sus principales limitaciones son la orografía local y el efecto de las reflexiones ionosféricas a estas frecuencias. Los VOR son ciertamente los más difundidos en la aeronavegación comercial. Su estándar adoptado por la OACI (Organización de la Aviación Civil Internacional) consiste de una portadora de entre 108MHz y 118MHz. En esa banda, la reflexión ionosférica es casi inexistente y la propagación en línea recta evita la interferencia entre estaciones más allá del horizonte. Contrariamente a los NDB, la señal transportada por la portadora VOR provee directamente la información de la dirección de procedencia lo que simplifica las funciones del receptor (Hurley et all., 1951). Una considerable mejora tecnológica introducida en la segunda generación de esta tecnología es la denominada *Doppler VOR* que permite reducir la imprecisión del ángulo de procedencia de 2,8º a 0,4º (Anderson/Flint, 1959).

El DME es un sistema "activo" basado en la medición del tiempo de respuesta de una estación de referencia a una interrogación emitida por el vehículo. El tiempo de ida y regreso de la señal es medido con el reloj del receptor por lo que no es necesaria ninguna sincronización entre relojes. Inclusive la estabilidad del reloj no es crítica en el método vistas las cortas diferencias de tiempos involucradas. Es usual que estos equipos estén ubicados en estaciones VOR (VOR/DME) de modo que la combinación de ambos permite medir en forma absoluta el radio y la dirección a dicha estación. En el ámbito militar las funciones VOR/DME están integradas en los sistemas conocidos como Tacan (*Tactical Air Navigation*) con una portadora única en el rango 960-1215 MHz, lo que permite antenas más pequeñas de mayor portabilidad.

Desde un punto de vista conceptual es posible medir "pasivamente" (con señales unidireccionales) los tiempos de propagación a un receptor desde los emisores de referencia de una red "estampando" el instante de emisión en la propia señal emitida y luego comparar a éste con el tiempo de recepción en el receptor. Esto requiere, sin embargo, de una alta sincronía y estabilidad de todos los relojes involucrados. Las importantes mejoras en la precisión y la estabilidad de la medición del tiempo alcanzadas a partir de los años 70´s mediante relojes atómicos (con estabilidad de largo plazo del orden de 1 parte en 10^{13}) dieron un impulso decisivo a estas técnicas.

El requerimiento de que el receptor del usuario cuente con un reloj de alta estabilidad y, más aún, sincronizado con los otros relojes de la red pudo ser superado gracias a la introducción del concepto de "pseudo-rango". Este concepto consiste en disponer y utilizar un número redundante de mediciones de distancias (4 en R^3 ó 3 en R^2) a los elementos de la red de referencia todas afectadas por el mismo sesgo del reloj del receptor y a partir de ellas determinar, simultáneamente, las coordenadas de la posición y el sesgo horario. Este método es utilizado en nuestros días por los más ubicuos sistemas de radionavegación existentes: los GNSS entre los que se cuentan el sistema GPS (EEUU), el GLONASS (Rusia) y el futuro GALILEO (UE). La gran ventaja de los sistemas GNSS es que permiten, en todo instante y bajo cualquier condición atmosférica, posicionar un receptor ubicado en cualquier punto interior a la constelación de satélites de referencia con un error acotado. El seguimiento de la fase de cada portadora por parte del receptor hace posible además medir la velocidad radial de éste respecto de cada satélite (medición conocida como "*Doppler*" o *delta-pseudo-rango*") y aún obtener, mediante técnicas interferométricas, posicionamientos relativos con precisión de centímetros o medir directamente los parámetros de la orientación de un receptor multi-antena. Estas metodologías, discutidas en el Capítulo 9, constituyen la base de los más modernos sistemas de navegación de alta precisión.

Navegación Celeste

El fundamento de la navegación celeste es la medición de la elevación y azimut de uno o más cuerpos celestes de referencia. Esta medición combinada con la del tiempo y la predicción del movimiento relativo de los astros permitió desde tiempos remotos posicionar en latitud y longitud a un observador sobre la Tierra. Modernamente, algunos de estos sistemas utilizan catálogos de estrellas junto con relojes de alta precisión y algoritmos de reconocimiento de patrones estelares para determinar la latitud, la longitud y la orientación de vehículos espaciales o aéreos de gran altura. Estos instrumentos utilizados en combinación con una plataforma inercial estabilizada permiten actualizar periódicamente la orientación de ésta última evitando la acumulación de los errores por integración referirda en el Párrafo 1.3.2.

En la configuración "*star tracker"* un sensor estelar (usualmente un telescopio con campo de visión angosto enfocando su imagen sobre una placa CCD) sigue una o más estrellas mediante comandos ejercidos sobre los ejes de su suspensión cardánica montada sobre una plataforma inercial. Su posición angular provee así directamente la información absoluta de la orientación inercial de la plataforma al menos según dos ángulos (p.e. azimut y elevación). Como veremos, esta información exterior sumada a la provista por instrumentos inerciales y ambas procesadas mediante un filtro estocástico de fusión de datos puede ser usada para re-estimar los parámetros de navegación y aun recalibrar los instrumentos inerciales durante el curso de la navegación. Estos esquemas de navegación integrada son introducidos brevemente más abajo en el Párrafo 1.4 de este Capítulo y son tratados en más en detalle en los Capítulos 10 y 11.

Navegación con mapa

También llamada "por ajuste de mapas", esta técnica consiste en producir un mapa local del medioambiente del vehículo usando sensores montados sobre el mismo tales como: cámaras, sonar, radar, laser, etc. que detectan hitos, referencias externas o morfologías preestablecidas. El mapa local es comparado con un mapa global de la región accesible al vehículo previamente codificado en una base de datos almacenada en la memoria de la computadora de navegación. El sistema de navegación "ajusta" el mapa local dentro del mapa global y cuando lo logra determina la posición global y la orientación del vehículo. El ajuste del mapa puede resultar extremadamente demandante en recursos computacionales si estuviese basado exclusivamente en la búsqueda exhaustiva dentro del mapa global. Para reducir esta búsqueda se apela a métodos de filtrado no lineal que combinan información de otras fuentes tales como instrumentos inerciales. Schon et al. (2006) describen aplicaciones de la teoría de filtros bayesianos de partículas a la navegación con mapa de vehículos submarinos, aéreos y terrestres. Los desafíos de estos métodos son las exigencias impuestas a los sensores y a los algoritmos de detección para evitar ambigüedades que confundan la localización.

Un campo de aplicación en creciente expansión de esta técnica son los robots móviles en ambientes interiores tales como ambientes industriales, comercios, almacenes, etc., en los que se aprovecha la estructura conocida del entorno y la buena definición de los sensores ambientales en cortas distancias. Ciertos algoritmos le permiten a la computadora del robot explorar y aprender el mapa medioambiental cuando éste se modifica (Masson, 2003).

Una técnica usada en aeronavegación es la conocida como navegación con ayuda de terreno que utiliza modelos digitales de elevación almacenados en la memoria de la computadora de navegación. Estos modelos son correlacionados con los perfiles altimétricos adquiridos en vuelo mediante un radar o lidar. Un algoritmo selecciona el perfil que maximiza la correlación y de este modo estima la desviación de la trayectoria en la dirección transversal al paso nominal. Con esta información se corrigen los parámetros de navegación y/o se recalibran los instrumentos inerciales. Bergman et al. (1997) proponen como solución el uso de un estimador bayesiano óptimo combinando un modelo digital de terreno con un radar y un baroaltímetro.

1.3 Navegación Inercial

En tanto que método de extrapolación, la navegación inercial se sustenta en el siguiente principio básico de la cinemática: Conocidos en un instante inicial la velocidad, la orientación y la posición de un móvil así como los valores instantáneos presentes y futuros de su aceleración lineal y su velocidad angular relativas a un dado sistema de referencia, es posible calcular la posición, la velocidad y la orientación del vehículo en todo instante futuro. Cabe destacar que, la aceleración lineal y la velocidad angular de un cuerpo, contrariamente a la posición, la velocidad y la orientación, pueden ser medidas sin información exterior al mismo.

Si los vectores $\mathbf{P}^i, \mathbf{f}^i, \mathbf{g}_g^i \in \mathbb{R}^3$ denotan las componentes en terna inercial ECI, respectivamente, de la posición de un móvil, la fuerza por unidad de masa (*fuerza específica*) actuante sobre él y la aceleración gravitacional en función de su posición, la aplicación de los principios de la mecánica clásica permite arribar a la siguiente ecuación diferencial cuya solución determina la posición y la velocidad del móvil futuras $\forall t \geq t_0$.

$$\dot{\mathbf{V}}^i = \ddot{\mathbf{P}}^i = \mathbf{g}_g^i(\mathbf{P}) + \mathbf{f}^i(t); \quad \mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0; \; \mathbf{V}(t_0) = \mathbf{V}_0; \tag{1.1}$$

Para sistemas de referencia no-inerciales, la Ec. (1.1) debe ser corregida mediante los términos correspondientes a las aceleraciones aparentes de Coriolis y centrípetas.

Las mediciones a bordo de un vehículo con las que cuenta un sistema de navegación inercial son de dos tipos: *la fuerza específica* o *aceleración inercial* –medida con acelerómetros– y la velocidad angular –medida con giróscopos. Resulta importante distinguir entre aceleración y aceleración inercial o fuerza específica. En efecto, el principio cinemático de la relatividad nos advierte que sin mediciones relativas a algún objeto externo, es imposible determinar el estado de movimiento de un vehículo moviéndose libremente en un campo gravitacional. En consecuencia, un acelerómetro sólo podrá medir la fuerza específica o componente no gravitacional de la aceleración impresa al vehículo ya sea por efecto de la propulsión, la sustentación o la resistencia mecánica (fricción, fuerza aero- o hidro-dinámicas, etc.). Lo anterior, junto con el principio cinemático mencionado más arriba, implica la necesidad de conocer la aceleración gravitacional en cada punto del espacio mediante algún modelo matemático, aspecto que será abordado en el Capítulo 4. Por su parte, un giróscopo mide la velocidad angular de un cuerpo respecto del espacio inercial. En base a las mediciones de los giróscopos, el sistema de navegación inercial calcula la variación de la orientación del vehículo. En el Capítulo 2 se presentan los principios físicos y tecnológicos de los sensores inerciales modernos y se describen los parámetros que caracterizan su desempeño. Allí se presentan además los distintos tipos de perturbaciones estocásticas que afectan las mediciones inerciales, se estudian sus modelos matemáticos y se describen los métodos que permiten caracterizarlas experimentalmente.

Las ventajas reconocidas de un sistema de navegación inercial son (Kayton/Fried, 1977):

- Producen información de los parámetros de navegación a muy alta tasa de muestreo y con gran ancho de banda.

- Sus medidas no son interferibles y no requieren de estaciones o puntos de referencia externos.
- Utiliza información accesible en todo instante y en todo punto (sobre y fuera del planeta) con calidad independiente del medio donde se mueva el vehículo.

Entre sus desventajas mencionamos sin embargo:

- Necesita conocer la orientación y la posición iniciales del vehículo.
- La adquisición del rumbo inicial requiere la inmovilidad del vehículo durante el proceso llamado de "girocompás", que puede durar algunos minutos, y de giróscopos de resolución suficiente como para medir la velocidad angular de la Tierra (15º/hr).
- Los errores de medida en los instrumentos inerciales y en los parámetros de navegación iniciales inducen errores que crecen polinomialmente con el tiempo (ver más adelante en este Capítulo).
- Requieren de la actualización periódica de los parámetros de navegación con mediciones absolutas.

Existen esencialmente dos formas de implementar los sistemas de navegación inercial. La más clásica, empleada en las primeras aplicaciones, utiliza una plataforma estabilizada respecto del sistema de referencia sobre la cual se montan los instrumentos inerciales. Actualmente, la gran mayoría de las aplicaciones prescinde de una plataforma estabilizada y utiliza mediciones de instrumentos inerciales fijos a la estructura del vehículo. Esta última configuración es conocida con el nombre de *strapdown* en la literatura inglesa y sus ventajas se cifran en una significativa reducción en costos y en la complejidad mecánica del sistema. A continuación introducimos brevemente los dos conceptos.

1.3.1 Navegación inercial con plataforma estabilizada

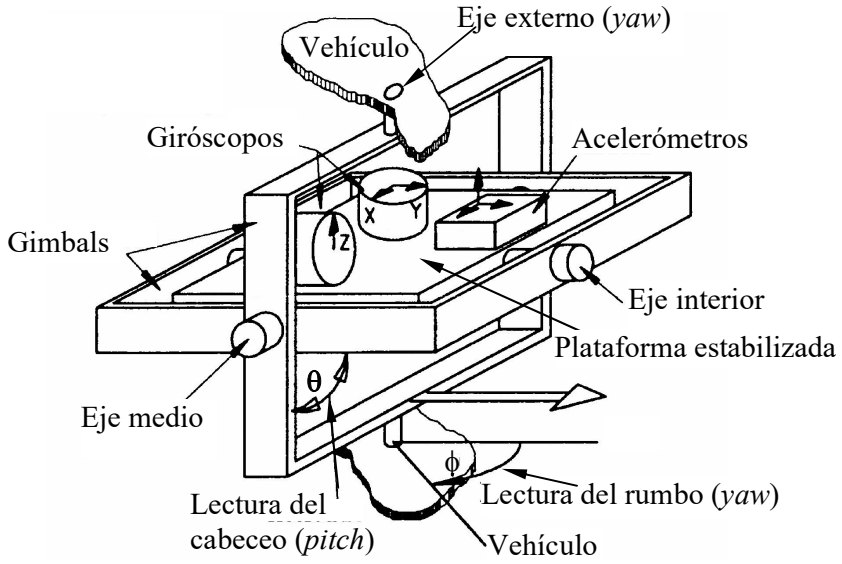


Figura 1.2: Suspensión cardánica de una plataforma giroestabilizada LGV.

Una plataforma estabilizada está diseñada para mantener su orientación respecto de una dada terna de referencia, por lo cual, debe poder rotar libremente respecto de la

estructura del vehículo que la alberga. De hecho, y dado que su orientación permanece fija respecto de la referencia, se puede decir que es el vehículo el que rota libremente alrededor de la plataforma. La solución clásica a este problema es la conocida suspensión cardánica (en honor a su inventor el matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576)) que consiste, como se muestra en la Fig. 1.2, en tres anillos encastrados ("*gimbal rings*" en inglés), cada uno de ellos suspendido por un soporte de tipo pivote solidario al anillo inmediato exterior estando la plataforma sostenida por el eje pivote más interno. Para vehículos intra-atmosféricos con sistema de referencia LGV es usual que el eje exterior corresponda al azimut (*yaw*), el medio al cabeceo (*pitch*) y el interior a la guiñada (*rol*l).

Como se ve en la Fig. 1.2, una plataforma estabilizada permite medir directamente estos ángulos (ángulos de Euler) que caracterizan la orientación instantánea del vehículo respecto del sistema de referencia elegido.

En condiciones ideales: fricción nula en los ejes, exacto balanceo de la estructura mecánica (centro de gravedad de la plataforma en la intersección de los tres ejes) y ausencia de pares externos (ambientales, flexibilidad de cables, etc.), la plataforma no se vería afectada por ningún par exterior independientemente del estado de movimiento del vehículo lo que aseguraría, de acuerdo con la segunda ley de Newton, la invariancia de la orientación de la plataforma respecto de un sistema inercial. En la práctica es necesario implementar un sistema de control para desacoplar la plataforma del movimiento del vehículo. Con este fin se disponen 3 servo-motores respectivamente en la cabecera de cada uno de los ejes de la suspensión cardánica y tres giróscopos mutuamente ortogonales montados sobre la plataforma. Los giróscopos son usados en un lazo de servo-control de la velocidad angular inercial $\boldsymbol{\omega}_p$ de la plataforma tal como el indicado en la Fig. 1.3. Cuando $\boldsymbol{\omega}_{ref} = 0$, el par vectorial τ_c actuante sobre los servo-motores tiende a cancelar el par de perturbación τ_p. El resultado es un par efectivo nulo sobre la plataforma que se traduce en la invariancia de su orientación inercial.

También es posible mantener la plataforma alineada respecto de una referencia no inercial precalculando adecuadamente la consigna $\boldsymbol{\omega}_{ref}(t) \in \mathbb{R}^3$. Por ejemplo, cuando el sistema de referencia esté fijo a la Tierra la velocidad angular de referencia será la velocidad angular de la Tierra: $\boldsymbol{\omega}_{ref} = \Omega_e$. En cambio, si se usa la terna geográfica con orientación cardinal (ejes paralelos a las direcciones E, N, U), al desplazarse, el vehículo "arrastra" consigo la referencia por lo que a Ω_e debe adicionarse la "*rotación de transporte*" $\boldsymbol{\rho}$ debida al desplazamiento de la terna de referencia a la misma velocidad **V** del vehículo sobre la superficie de curvatura no nula del elipsoide normal (ver definiciones en el Párrafo 5.3.1). Denotando con el superíndice "g" la expresión de los vectores en coordenadas geográficas resulta:

$$\boldsymbol{\omega}_{ref}^g(t) = \Omega_e^g + \boldsymbol{\rho}^g = \Omega_e^g + \mathcal{K}^g \mathbf{V}^g + \dot{\lambda}\,\mathrm{sen}(\Phi)\mathbf{z}_g \qquad (1.2)$$

Donde: $\mathcal{K}^g$ representa el tensor de curvatura local del *elipsoide normal* expresado en coordenadas "g", $\dot{\lambda}$ el cambio en longitud, Φ la latitud local y $\mathbf{z}_g$ el versor local ortogonal al elipsoide normal.

Para sistemas de alta performance el lazo de control de la Fig. 1.3 resulta un desafío tanto desde el punto de vista tecnológico como teórico. En particular, los actuadores deben tener gran rango dinámico y ancho de banda para ser capaces, a la vez, de compensar rápidas y pequeñas perturbaciones y responder a los comandos de $\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}$, los rodamientos deben estar diseñados para minimizar la fricción coulombiana en los ejes y todo el sistema (gimbals + plataforma) debe estar debidamente balanceado respecto de los ejes para minimizar los acoplamientos cinemáticos. Los sistemas más avanzados utilizan sofisticadas herramientas de observación y de control multivariable no linealy adaptable. Entre las soluciones de muy alta performance propuestas citamos: Shtessel (1995), Royalty (2005) o Li y otros (1998). Véase también el número del *IEEE Control Systems Magazine*, de Febro de 2008 dedicado al tema.

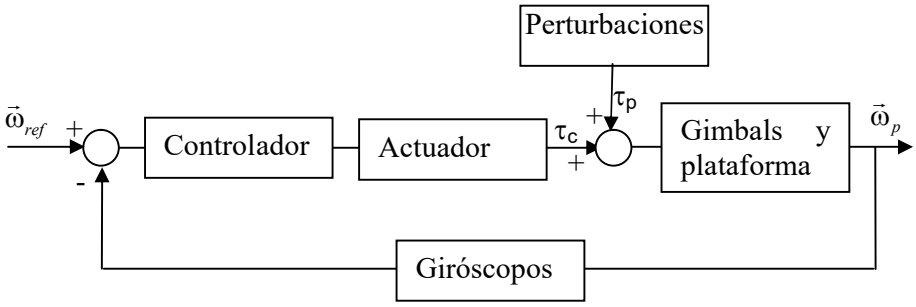


Figura 1.3: Lazo de "servo-control" de la velocidad angular de una plataforma giroestabilizada.

Los 3 acelerómetros mutuamente ortogonales montados sobre la plataforma estabilizada miden las componentes de la aceleración inercial en el sistema de referencia elegido. Para el caso de una terna de referencia inercial, estas magnitudes junto con la gravitación determinan el movimiento del vehículo (Ec. (1.1)). Cuando el sistema de referencia es no-inercial, es necesario corregir las mediciones de fuerza específica con las aceleraciones aparentes. En particular, para la terna de referencia geográfica, la fuerza específica corregida por los efectos de Coriolis y de la fuerza centrífuga debidos a la rotación terrestre y a la rotación de transporte resulta ser (ver Párrafo 5.3 del Capítulo 5):

$$\mathbf{f}^g_{corr} \triangleq \mathbf{f}^g - (2\boldsymbol{\Omega}^g + \boldsymbol{\rho}^g)\times \mathbf{V}^g - \boldsymbol{\Omega}^g \times (\boldsymbol{\Omega}^g \times \mathbf{P}^g) \tag{1.3}$$

De la anterior surge la siguiente ecuación análoga a la (1.1):

$$\dot{\mathbf{V}}^g = \mathbf{g}^g_g(\mathbf{P}) + \mathbf{f}^g_{corr}; \quad \mathbf{V}^g(t_0) = \mathbf{V}_0; \tag{1.4}$$

Es usual englobar la aceleración centrípeta y la aceleración gravitacional en el término de la gravedad aparente: $\mathbf{g}^g(\mathbf{P}) \triangleq \mathbf{g}^g_g(\mathbf{P}) - \boldsymbol{\Omega}^g \times (\boldsymbol{\Omega}^g \times \mathbf{P}^g)$ y, consiguientemente, reescribir las Ecs. (1.3) y (1.4) como sigue:

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}^g_{corr} \triangleq \mathbf{f}^g - (2\boldsymbol{\Omega}^g + \boldsymbol{\rho}^g)\times \mathbf{V}^g \\ &\dot{\mathbf{V}}^g = \mathbf{g}^g(\mathbf{P}) + \mathbf{f}^g_{corr}; \quad \mathbf{V}^g(t_0) = \mathbf{V}_0; \end{aligned} \tag{1.5}$$

La Fig. 1.4 ilustra en forma esquemática la mecanización del cálculo de la posición y de la velocidad en un sistema de navegación con plataforma estabilizada según la terna geográfica. La computadora de navegación corrige las señales provistas por los acelerómetros con las aceleraciones aparentes y le adiciona la gravedad aparente local

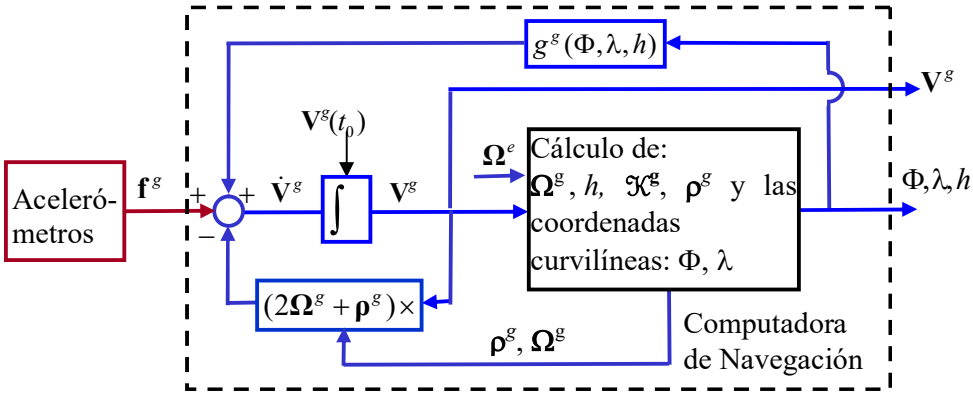


Figura 1.4: Mecanización de un navegador inercial con plataforma en coordenadas LGV.

calculada mediante un modelo matemático en función de la posición. El resultado ($\dot{\mathbf{V}}^g$) es integrado para obtener la velocidad $\mathbf{V}^g$ cuyas 2 primeras componentes (las horizontales) corresponden al cambio instantáneo de las coordenadas geográficas del vehículo en los sentidos E y N respectivamente y su 3ª componente (la vertical) a la variación de su altura sobre el plano tangente local al elipsoide normal. El tensor de curvatura local $\mathcal{K}^g$, calculado en función de la posición, permite junto con el vector $\mathbf{V}^g$, determinar las velocidades de variación de las coordenadas curvilíneas Φ (latitud) y λ (longitud) que luego son integradas para obtener la posición del vehículo.

Bloqueo de gimbal

La capacidad de la suspensión cardánica para aislar la plataforma de los movimientos del vehículo se ve afectada en ciertas situaciones patológicas. En efecto, si, como resultado de alguna maniobra, dos ejes de la suspensión resultaren paralelos será imposible aislar la plataforma de las rotaciones del vehículo según un eje ortogonal a ambos. Esta situación se presenta típicamente cuando un avión pica en cabeceo (*pitch*) a $\pm 90^{\circ}$, en este caso, como puede verse en la Fig. 1.2, el eje externo se alinea con el eje interior y ya no es posible aislar la plataforma de las rotaciones perpendiculares a ésta alrededor del eje de *yaw*. Esta condición, conocida como *bloqueo de gimbal*, traduce, como se verá en el Capítulo 3, una limitación esencial de la caracterización de la orientación de un cuerpo mediante los ángulos de Euler. El uso de un cuarto gimbal redundante permite evitar el bloqueo y es la solución adoptada en vehículos estratégicos que usan esta tecnología. Una solución matemáticamente equivalente consiste en sustituir la suspensión cardánica por una suspensión hidráulica (gimbals hidráulicos) consistente en una plataforma esférica con flotabilidad nula en un medio fluido (Wang/Williams, 2008).

1.3.2 Navegación inercial con instrumentos fijos al vehículo (*strapdown*)

La creciente ubicuidad de los sistemas de navegación inercial en las últimas décadas es directamente atribuible a las posibilidades que abre la tecnología *strapdown* para la miniaturización de estos sistemas al prescindir de una plataforma estabilizada. Un

tratamiento in extenso de esta tecnología puede ser consultado en Titterton/Weston, 1997.

Sin plataforma, la terna de la unidad de mediciones inerciales (UMI), en particular la de los acelerómetros, no está alineada con la terna de referencia o de navegación, por lo que es necesario determinar analíticamente la orientación relativa entre ambas ternas para poder resolver la fuerza específica medida según los ejes de la terna de navegación (Ec. (1.3)). Este procedimiento es conocido como *plataforma analítica* y requiere integrar numéricamente y en tiempo real la medición del vector velocidad angular provista por la UMI. Por su parte, a diferencia de los giróscopos montados sobre la plataforma que sólo miden desviaciones respecto de la velocidad angular nula en un lazo de control, los giróscopos de un sistema *strapdown* deben poder registrar todo el rango de velocidades angulares del vehículo. De este modo, puede decirse que con esta tecnología, las complicaciones mecánicas son sustituidas por mayores exigencias sobre los sensores inerciales y sobre la complejidad de los algoritmos numéricos.

El presente volumen aborda la navegación de móviles moviéndose en el espacio de dimensión 3. Este contexto es el que presenta mayor complejidad, tanto desde el punto de vista conceptual como práctico. Los algoritmos de integración numérica de las ecuaciones cinemáticas no-lineales desarrollados en el Capítulo 7 se basan en el esquema propuesto por Savage (2006) por ser éste el más versátil y mejor adaptado a la estructura de las ecuaciones. El algoritmo se destaca por su eficiente manejo de las dinámicas, usualmente muy diversas, de traslación y rotación de un móvil en 3D. Una ventaja adicional es la facilidad que ofrece de ajustar paramétricamente la intensidad de cómputo según las dinámicas involucradas.

La restricción a dimensiones inferiores a 3 podría plantearse como caso particular de esta versión general, sin embargo, la reducción de la dimensionalidad puede agregar mucha estructura al problema, por lo cual, convendrá considerar caso por caso las posible simplificaciones, tanto en la formulación de las ecuaciones como en los algoritmos numéricos resultantes.

El aumento del nivel de integración y de la capacidad de cálculo de las computadoras digitales, así como los nuevos desarrollos en materia de sensores inerciales, produjeron una migración de las aplicaciones hacia la tecnología *strapdown*. Esta tendencia se ve acentuada, de un lado por el rol que adquiere la tecnología MEMS (sistemas micro electro mecánicos) en la miniaturización de las unidades inerciales (ver número especial: IEEE Proceedings, Aug. 1998) y, del otro, por la posibilidad de implementar en una computadora abordo complejos algoritmos numéricos de fusión de mediciones inerciales y no-inerciales (satelitales u otros). Estos algoritmos, que como veremos más abajo son la base de los sistemas de navegación integrada, permiten potenciar las prestaciones de los instrumentos inerciales reduciendo sus exigencias de estabilidad y precisión. Como resultado, actualmente sólo unas pocas aplicaciones de navegación de precisión usan plataformas estabilizadas entre las que se cuentan los vehículos estratégicos intercontinentales (Wang/Williams, 2008). El presente libro se abocada principalmente a los métodos e instrumentos requeridos por la configuración *strapdown* y a la inserción de esta última en los sistemas de navegación integrada.

Propagación de errores en la navegación inercial *strapdown*

A modo de ejemplo, consideremos el problema de la navegación cartesiana bidimensional referida a una terna geográfica local con origen en un punto fijo de la superficie terrestre, tal como se indica en la Fig. 1.5.

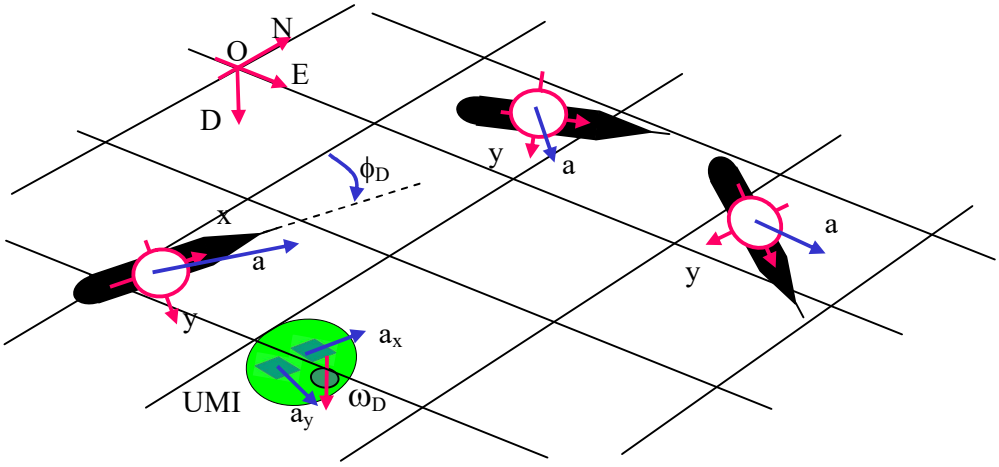


Figura 1.5: Navegación *strapdown* bidimensional.

La UMI consta de una dupla de acelerómetros que mide las aceleraciones según las direcciones fijas al vehículo a_x y a_y y un giróscopo que mide la velocidad angular del vehículo ω_D en la dirección hacia abajo (D). Si ϕ_D es el ángulo de la proa del vehículo respecto de la dirección Norte se tiene:

$$\begin{aligned} &\omega_D = \dot{\phi}_D \Rightarrow \phi_D(t) = \phi_D(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega_D(\tau) d\tau \\ &a_N = a_x \cos\phi_D - a_y \sin\phi_D \\ &a_E = a_x \sin\phi_D + a_y \cos\phi_D \end{aligned} \tag{1.6}$$

Introduciendo la siguiente notación, que será justificada en el Capítulo 4, para un vector ***s*** genérico expresado respectivamente en coordenadas "g" y "b",

$$\mathbf{s}^g \triangleq \begin{bmatrix} s_N \\ s_E \end{bmatrix};\ \mathbf{s}^b \triangleq \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix};\ \mathbf{C}_b^g(\phi_D) \triangleq \begin{bmatrix} \cos\phi_D & \operatorname{sen}\phi_D \\ -\operatorname{sen}\phi_D & \cos\phi_D \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{s}^g = \mathbf{C}_b^g(\phi_D)\mathbf{s}^b \tag{1.7}$$

las dos últimas Ecs. (1.6) se reescriben:

$$\mathbf{a}^g = \mathbf{C}_b^g(\phi_D)\mathbf{a}^b \tag{1.8}$$

Para unos dados vectores de posición y velocidad iniciales en el instante t_0 y funciones (forzantes) $\mathbf{a}^b(t)$ y $\omega_D(t)$, la posición, velocidad y orientación del vehículo en coordenadas geográficas locales corresponde a la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales de la cinemática:

$$\begin{aligned} &\ddot{\mathbf{P}}^g = \dot{\mathbf{V}}^g = \mathbf{a}^g = \mathbf{C}_b^g(\phi_D)\mathbf{a}^b;\ \mathbf{P}^g(t_0) = \mathbf{P}_0, \mathbf{V}^g(t_0) = \mathbf{V}_0 \\ &\dot{\phi}_D = \omega_D;\ \ \phi_D(t_0) = \phi_0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

En el Capítulo 5 se presentan formulaciones más generales de estas ecuaciones y se discuten sus implicancias para la navegación inercial. Mientras tanto, simplificaremos la presentación para esta introducción suponiendo: $\omega_D \equiv 0$ y $\mathbf{a}$=constante. Bajo estas condiciones, consideraremos los efectos de los errores en el conocimiento de las condiciones iniciales: $\delta\mathbf{P}_0, \delta\mathbf{V}_0, \delta\phi_0$, y de sesgos constantes ∇_x, ∇_y y ε_D, respectivamente, en las mediciones acelerométricas y de la velocidad angular.

Un error $\delta\phi_D$ en el conocimiento de la orientación del vehículo hará diferir las componentes en terna geográfica de la aceleración calculada con las Ecs. (1.6) (indicadas con ^ en la Fig. 1.6) de sus valores reales de acuerdo con:

$$\mathbf{a}^g = \begin{bmatrix} a_N \\ a_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta\phi_D) & -\sin(\delta\phi_D) \\ \sin(\delta\phi_D) & \cos(\delta\phi_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_N \\ \hat{a}_E \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Junto con la anterior las siguientes ecuaciones modelan los errores en las componentes de la velocidad y la posición en terna "g" para pequeños valores del ángulo $\delta\phi_D$:

$$\begin{aligned} &\delta\dot{\mathbf{V}}^g = \begin{bmatrix} \delta\dot{V}_N \\ \delta\dot{V}_E \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} a_N \\ a_E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{a}_N \\ \hat{a}_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_N \\ \nabla_E \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -a_E \\ a_N \end{bmatrix} \delta\phi_D + \nabla^g \qquad ;\delta\mathbf{V}^g(t_0) = \delta\mathbf{V}_0 \\ &\delta\dot{\phi}_D = \varepsilon_D;\ \ \delta\phi_D(t_0) = \delta\phi_0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

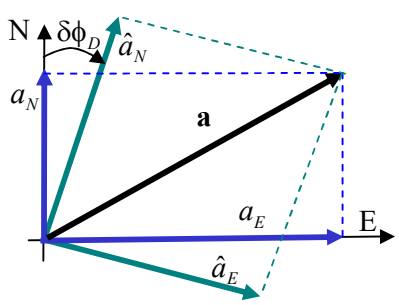


Figura 1.6: Efecto del error de orientación sobre las coordenadas de la aceleración.

Las soluciones de las Ecs (1.11) son:

$$\begin{aligned} &\delta\phi_D(t) = \delta\phi_0 + \varepsilon_D(t - t_0) \\ &\delta\mathbf{V}^g(t) \approx \delta\mathbf{V}_0 + (\nabla^g + \begin{bmatrix} -a_E \\ a_N \end{bmatrix}\delta\phi_0)(t - t_0) + \begin{bmatrix} -a_E \\ a_N \end{bmatrix}\frac{\varepsilon_D(t - t_0)^2}{2} \Rightarrow \\ &\delta\mathbf{P}^g(t) \approx \delta\mathbf{P}_0 + \delta\mathbf{V}_0(t - t_0) + (\nabla^g + \begin{bmatrix} -a_E \\ a_N \end{bmatrix}\delta\phi_0)\frac{(t - t_0)^2}{2} + \begin{bmatrix} -a_E \\ a_N \end{bmatrix}\frac{\varepsilon_D(t - t_0)^3}{6} \end{aligned} \tag{1.12}$$

De las anteriores se destaca el crecimiento polinomial con el tiempo (cúbico en el caso de la posición) de los errores provocado por el desconocimiento de las condiciones iniciales y por los sesgos instrumentales.

Esta característica, propia de los métodos de extrapolación (ver el siguiente párrafo) exige, o bien instrumentos de muy alta calidad o bien la reinicialización periódica de los parámetros de navegación.

1.4 Navegación multisensor o integrada

Las técnicas de fusión de datos permiten combinar información proveniente de distintas fuentes para inferir los valores de las variables que se desean estimar. En general puede decirse que la eficacia de estas técnicas se basa en que mientras más fuentes de información se dispongan de una misma variable más podrá reducirse su imprecisión o incrementar la confiabilidad de su estimación. En teoría, una adecuada combinación de mediciones adquiridas por diversos sensores producirá siempre un resultado mejor que el que se obtendría usando solamente el mejor de los sensores disponibles. La mejora cuantitativa de la estimación resultante de la fusión de datos dependerá de la perfomance da cada sensor específico, del tipo de proceso y de las condiciones en que se adquieran los datos (calidad y cantidad por unidad de tiempo de la información adquirida, etc.) y del algoritmo de fusión de datos utilizado. Todo algoritmo de fusión de datos sólo funcionará correctamente bajo ciertas y determinadas circunstancias consistentes, entre otras, con las hipótesis simplificadoras postuladas en su diseño. Por lo tanto, la selección del tipo de algoritmo y las condiciones en que éste es utilizado pueden ser cruciales para la calidad del resultado. Cada algoritmo de fusión de datos requiere de información a priori como por ejemplo: las estadísticas de los procesos aleatorios involucrados, el grado de dependencia estadística (o correlación) entre las mediciones fusionadas, la estructura del modelo matemático de cada sensor y su correspondiente parametrización, etc. Estos algoritmos necesitan conocer la perfomance de cada sensor, y una evaluación incorrecta de éstas últimas podría traducirse en estimaciones erradas.

La tecnología actual permite disponer a bordo de casi cualquier vehículo de una variedad de instrumentos de navegación de bajo consumo y volumen reducido. Esto combinado con la accesibilidad de una alta capacidad de computo, se tradujo en las ultimas décadas en un desarrollo sostenido de nuevos algoritmos de fusión de datos cada vez mas eficientes y precisos con las consiguientes mejoras en la confiabilidad, continuidad y precisión de las estimaciones (Luo et al., 2007). En particular para las aplicaciones de navegación estos esquemas permiten potenciar la complementariedad entre los sensores intro- y exoceptivos. Como se dijo, los primeros pueden ofrecer altas tasas de información de velocidades y aceleraciones (lineales o angulares) de los parámetros de navegación pero no pueden evitar la acumulación de errores debida al proceso de integración de las mediciones. Por su parte, los sensores exoceptivos (cámaras CCD, GPS, sonar, radar, lidar, star-trackers, radio-beacons, altímetros, etc.) proveen directamente información posicional con errores acotados pero a instantes discretos y con retardos lo que se traduce en graves limitaciones para aplicaciones como el control de vehículos en tiempo real, la adquisición de imágenes con sensores remotos, enfoque de imágenes SAR, etc.

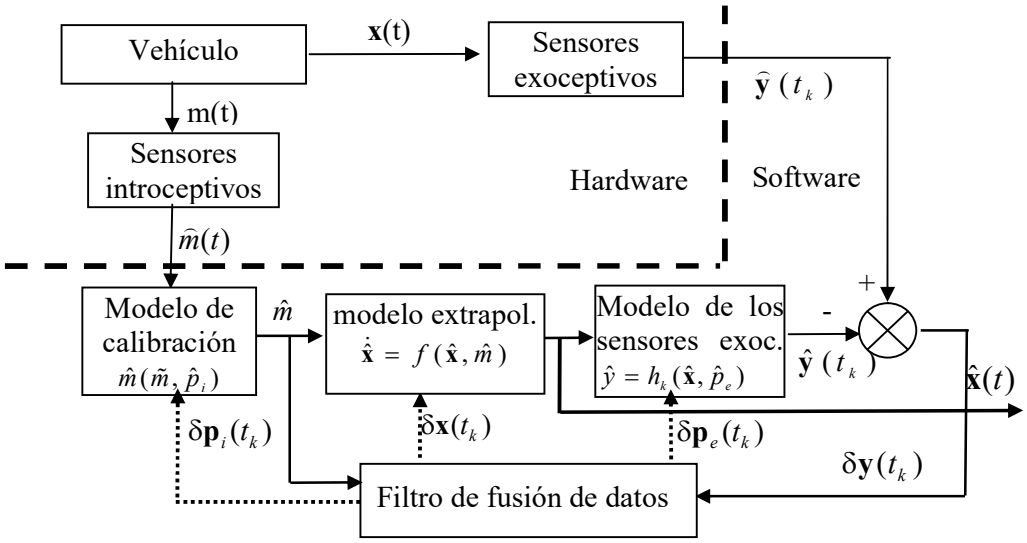


Figura 1.7: Sistema de navegación con integración de mediciones intro y exoceptivas. **x** agrupa las variables de navegación, p_i *y* p_e son los parámetros de los sensores.

La Fig. 1.7 muestra un esquema típico de navegación integrada con fusión de mediciones introceptivas y exoceptivas. El vector **x** contiene los parámetros de navegación a estimar, los vectores m y $\hat{m}$ corresponden, respectivamente, a las magnitudes introceptivas y a sus mediciones. Por otra parte, $\hat{y}(t_k)$ es el vector de las mediciones exoceptivas adquiridas en el instante t_k. Como normalmente los sensores introceptivos proveen información a alta tasa de muestreo, en la figura se suponen funciones continuas del tiempo. Por su parte, los datos exoceptivos están indexados con el índice t_k porque en la práctica son adquiridos en instantes discretos. Véase que el índice k califica también a la función $h_k(\ ,\ )$ del modelo del sensor. Esto es debido a que el conjunto de sensores activos no necesariamente es el mismo en todo instante Las mediciones $\hat{m}(t)$ son preprocesadas con el modelo inverso del sensor, residente en la computadora de navegación, que depende del vector de parámetros $\hat{p}_i$ para obtener la estimación $\hat{m}(t)$ de las mediciones introceptivas. Las ecuaciones diferenciales de la cinemática, introducidas en el Capítulo 5, están representadas por le modelo $f(\mathbf{x},m)$ y son las que permiten extrapolar las estimaciones de los parámetros de navegación a partir de sus estimaciones iniciales. Las mediciones exoceptivas $\hat{y}(t_k)$ disponibles en el instante t_k son comparadas con las correspondientes salidas extrapoladas calculadas usando los modelos de los sensores activos en dicho instante y la estimación actual $\hat{\mathbf{x}}(t_k)$ de los parámetros de navegación. La *innovación* $\delta y(t_k)$ es luego procesada por el filtro de fusión de datos para actualizar (o corregir) tanto a $\hat{\mathbf{x}}(t_k)$ como a las estimaciones de los parámetros $\hat{p}_i(t_k)$ y $\hat{p}_e(t_k)$ de los sensores intro- y exoceptivos, respectivamente. Esta última acción es denominada calibración instrumental. Finalmente la solución instantánea $\hat{\mathbf{x}}(t)$ de las ecuaciones diferenciales del extrapolador calculada en tiempo real es el resultado de la navegación y ésta queda accesible a una

tasa de muestreo sólo limitada por la velocidad de cálculo de la computadora de navegación a bordo del vehiculo.

El Capítulo 6 aborda el problema de la sensibilidad de las ecuaciones cinemáticas a los errores iniciales e instrumentales. En él se establecen y estudian las ecuaciones de propagación de estos errores. La codificación de las ecuaciones cinemáticas (introducidas en el Capítulo 5) en forma de algoritmo digital apto para la navegación inercial en tiempo real es desarrollada en el Capítulo 7. Todo sistema de navegación que use una unidad inercial (actualmente la mayoría) necesariamente incluirá un código de este tipo en el SW de la computadora de navegación. El Capítulo 8 se centra en la descripción de los sistemas satelitales de navegación global (GNSS). En él se describe su configuración espacial y terrestre, las características de las señales en el espacio y los fundamentos de la arquitectura de un receptor GNSS. Esto último es clave para comprender las funciones básicas del receptor en tanto que instrumento de navegación exoceptivo. Las medidas que este instrumento proporciona (llamadas comúnmente "observables") son descritas en detalle en el Capítulo 9 junto con sus precisiones. Se detallan, en el mismo Capítulo, los procedimientos implementados dentro del receptor para determinar, autónomamente, su posicionamiento en terna ECEF. El Capítulo 10 está dedicado a la descripción de los métodos numéricos basados en la teoría del filtrado no lineal que permiten la fusión e integración de datos inerciales con otros provenientes de una diversidad de sensores exoceptivos. Dichas técnicas aplicadas a la navegación se han familiarizado dentro de esa disciplina con el nombre genérico de *navegación integrada*. En el capítulo se describen los dos enfoques más utilizados en la práctica a saber: el filtro de Kalman extendido (EKF: *Extended Kalman Filter*) y el filtro de Kalman por puntos sigma (SPKF: *Sigma Points Kalman Filter*).

Una parte considerable del SW de un sistema de navegación resulta independiente de la aplicación y aun de la configuración instrumental exoceptiva que ésta reclame. El Capitulo 11, dedicado exclusivamente al tratamiento de ejemplos recurrentes en la práctica, expone en su primera parte aquellos cálculos que son específicos de cada aplicación. Con el objeto de demostrar los aspectos del diseño y de la evaluación de un sistema de navegación real, al final del capítulo se presenta el desarrollo completo de un sistema de navegación aplicado al SAR aerotransportado de la CONAE. Se comparan varias configuraciones instrumentales con base en datos de vuelo procesados mediante herramientas típicas de evaluación de la performance de un filtro de fusión de datos. Los resultados del análisis comparativo pueden ser interpretados en base a los conceptos de reconstructibilidad y observabilidad expuestos en Carrizo/España/Giribet, 2014.

Capítulo 2
Instrumentos Inerciales

El principio de equivalencia fuerte de la teoría de la relatividad nos advierte que sin mediciones relativas a algún objeto externo, no es posible determinar el estado de movimiento de un móvil libre en un campo gravitacional y, en particular, medir su aceleración (gravitacional). Por otra parte, sí son detectables las fuerzas no gravitacionales ejercidas sobre un cuerpo y trasmitidas a través de su estructura sólida. Llamaremos inerciales a estas últimas fuerzas y *acelerómetro* al dispositivo usado para medirlas. Del mismo modo llamaremos *giróscopo* al instrumento que permite medir la velocidad angular de un cuerpo en rotación respecto de un sistema inercial sin usar una referencia exterior. Tanto la aceleración como la velocidad angular de un cuerpo son magnitudes vectoriales, por lo que la medición de cada una de ellas requiere conocer su proyección sobre al menos 3 ejes no coplanares.

Los sistemas de navegación inercial son aquellos que utilizan exclusivamente instrumentos inerciales (acelerómetros y giróscopos). Dado que la aceleración gravitacional no puede ser medida, la navegación inercial requiere necesariamente de un modelo matemático del vector gravitación en función de las coordenadas del vehículo. Este tema es tratado en el Capítulo 4.

Entre las ventajas de los sensores inerciales (sensores introceptivos por excelencia) se destacan que sus medidas son independientes del medio en que se mueve el vehículo y que no requieren de ninguna referencia exterior al mismo. Estas características sumadas a su capacidad de ofrecer información a alta frecuencia hacen de la navegación inercial una de las opciones más utilizadas desde su inserción a principios del siglo XX.

La primera parte de ese Capítulo está dedicada a exponer los principios básicos del funcionamiento de los sensores inerciales y las principales tecnologías disponibles para su diseño. El lector encontrará una descripción ampliada de estas tecnológicas y otras variantes, en Titterton et y otros (1997).

Un aspecto que condiciona la selección de la tecnología es claramente su uso y puesto que la tendencia dominante, así como el foco de este volumen, son los sistemas *strapdown* este es el tipo de aplicaciones que guiará nuestro interés. Como se mencionó en el Capítulo 1 esta opción impone demandas muy específicas. En particular para los giróscopos, interesa alta estabilidad en el factor de escala y el sesgo en un amplio rango de velocidad angular. Visto el tipo de aplicaciones de la tecnología *strapdown* también resultan importantes en la decisión el tamaño, el costo y el nivel de consumo eléctrico requerido por el instrumento.

A partir de mediados de los 90´s, los sensores inerciales micromaquinados de estado sólido han suscitado un creciente interés. En éstos la estructura mecánica sensible al movimiento forma parte del circuito electrónico integrado de adquisición de la medida. Nuevos y diversos principios físicos aplicables sensores inerciales de este tipo son hoy

en día objeto de una intensa investigación en muchos laboratorios del mundo. Esta tecnología, aplicable a numerosos tipos de microsensores, es conocida como *micro-electromechanical systems o MEMS* (ver IEEE Proc., Special Issue, 1998). Sus ventajas más relevantes son la miniaturización y robustez de los sensores y la posibilidad de producción masiva a bajo costo. Lo anterior hace a los sensores MEMS aptos para una vasta gama de nuevas aplicaciones. Entre los campos clásicos y las muevas áreas favorecidas por esta tecnología mencionamos las aplicaciones biomédicas, la robótica móvil, aplicaciones de realidad virtual, vehículos autónomos, mini y micro satélites, etc.

Más recientemente, los sensores ópticos han ganado mucho terreno en aplicaciones comerciales. Si bien los precios son en promedio aun superiores a los de los MEMS más avanzados, su atractivo radica en su alta precisión y estabilidad a la vez que resultan cada vez más competitivos en tamaño, en particular los FOG. A nuestro entender esta tecnología es la más promisoria para la navegación *strap-down* de precisión en un futuro cercano.

Las diferentes tecnologías disponibles ofrecen diversos compromisos entre los parámetros de performance de una UMI entre los cuales mencionamos: la sensibilidad, el rango de medida, el ancho de banda, la resolución, la linealidad del factor de escala, la estabilidad del sesgo de medida, la potencia del ruido, etc. En los sensores multidimensionales interesa asegurar la descorrelación entre las medidas según los ejes sensibles ortogonales así como la correcta alineación de estos últimos.

Se propone un modelo matemático de una UMI que contempla tanto sus aspectos deterministas como estocásticos. El conocimiento cabal de ambos rubros resulta clave en el diseño de los filtros de fusión de datos usados para la navegación integrada que serán presentados en el Capítulo 10. Vista la complejidad inherente a la descripción estocástica, una buena parte del Capítulo es dedicada a describir en detalle los ruidos de medida y a introducir al lector en la metodología, basada en la variancia de Allan, para caracterizar y medir los distintos procesos que constituyen al ruido.

La temperatura afecta tanto las estadísticas de las perturbaciones como las propiedades mecánicas y eléctricas del dispositivo, por los que es deseable conocer la sensibilidad de los parámetros respecto de la temperatura (*TCS: Temperature coefficient sensibility*) en caso de que haber excursiones térmicas importantes durante el uso.

2.1 Acelerómetros

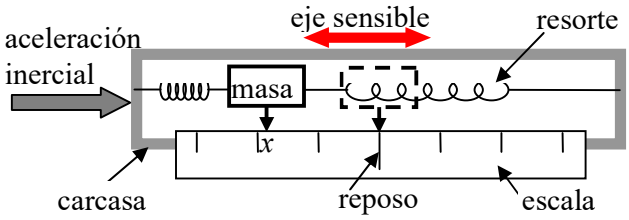


Figura: 2.1: Principio de funcionamiento de un acelerómetro.

La configuración básica de un acelerómetro consiste de una masa testigo contrabalanceada por un elemento elástico fijo a la carcasa del instrumento (solidaria a su vez al vehículo en el caso *strapdown* o a la plataforma inercial estabilizada, ver Fig.

2.1). De este modo, de acuerdo con la 2ª ley de Newton una fuerza inercial (no gravitatoria*) actuante sobre la carcasa produce un desplazamiento de la masa testigo respecto de la primera. Este desplazamiento es transformado en una señal medible.

Un análisis elemental conduce a la siguiente función de transferencia entre la fuerza específica actuante en la dirección del eje sensible y el desplazamiento de la masa testigo:

$$H(s) = \frac{x(s)}{f(s)} = \frac{(1/M)}{s^2 + \frac{D}{M}s + \frac{K}{M}} = \frac{(1/M)}{s^2 + \frac{\omega_r}{Q}s + \omega_r^2} \tag{2.1}$$

Donde *K es* la constante elástica del resorte, *D* el amortiguamiento y *M* la masa testigo. El diseño del dispositivo tiene en cuenta el factor de calidad $Q = \sqrt{KM}/D$ y la frecuencia de resonancia $\omega_r = \sqrt{K/M}$. La sensibilidad en baja frecuencia se mejora reduciendo ω_r aunque esto reduce en general el ancho de banda. Por otra parte, dadas ω_r y *M,* la forma de la respuesta queda determinada por el factor de amortiguamiento que, como se advierte de la (2.1), queda fijado por *Q*. En los instrumentos miniaturizados la principal fuente de perturbaciones mecánicas es el movimiento Browniano de las moléculas del gas que rodea a la masa testigo y a su suspensión elástica. En Gabrielson (1993) (ver también Yazdi et al., 1998) se demuestra que este efecto se traduce en un ruido total de aceleración equivalente (*RTAE*) dado por:

$$RTAE = \frac{\sqrt{4K_B TD}}{M} = \sqrt{\frac{4K_B T\omega_r}{QM}}\left[m/s^2\sqrt{Hz}\right] \tag{2.2}$$

Donde K_B es la constante de Boltzman y *T* la temperatura en ºK. Las Ecs. (2.1) y (2.2) ponen de manifiesto el compromiso de diseño entre las constantes *Q, M y* ω_r. En particular, altos valores de la calidad *Q* producen bajos valores del RTAE pero a costa de que por encima de cierto valor de *Q* aparezcan resonancias indeseables ($Q \to \infty \Rightarrow H(j\omega_r) \to \infty$).

Como una fuerza gravitatoria actúa en forma distribuida y, en la práctica, uniformemente sobre todo el dispositivo, su acción no produce desplazamientos relativos de la masa testigo y por lo tanto no es registrada por el acelerómetro. Así, un acelerómetro a bordo de un vehículo sólo medirá la aceleración inercial de este último, llamada también *fuerza por unidad de masa o fuerza específica,* en la dirección del movimiento de la masa testigo o *eje sensible* del acelerómetro. Dado que una aceleración es una magnitud vectorial, una unidad inercial contiene usualmente 3 acelerómetros con sus ejes sensibles mutuamente ortogonales.

De acuerdo con las leyes de inercia y gravedad de Newton, la siguiente ecuación modela el comportamiento de un acelerómetro.

*En el Capítulo 4 se discutirá la diferencia entre fuerza gravitatoria y fuerza gravitacional.

$$\frac{d^2\mathbf{P}^i}{dt^2} = \ddot{\mathbf{P}}^i = \mathbf{f}^i + \mathbf{g}^i \tag{2.3}$$

Donde $\mathbf{P}^i$, $\mathbf{f}^i$ y $\mathbf{g}^i$ son, respectivamente, su posición la fuerza específica actuante y la aceleración gravitatoria expresados respecto de un sistema de referencia inercial. De (2.3) surge que un acelerómetro inercialmente en reposo ($\ddot{\mathbf{P}}^i = 0$) en un campo gravitatorio registra la fuerza específica en este caso *de sustentación:* $\mathbf{f}^i = -\mathbf{g}^i$ [m/seg^2] que compensa el efecto del campo. Por ejemplo, esto es lo que medirá un acelerómetro en reposo sobre una mesa con su eje sensible en la dirección de la vertical local.

2.1.1 Acelerómetros realimentados de péndulo

El principio de funcionamiento enunciado más arriba corresponde a una medición a lazo abierto de la aceleración. Para obtener mediciones más estables y precisas se recurre a una configuración en lazo cerrado que mantiene fija la masa testigo (masa del péndulo) en su posición de reposo. Un diseño usual para alta sensibilidad es el acelerómetro de pivote con realimentación de fuerza. Un esquema de un diseño unidireccional se ilustra en la Fig. 2.2.

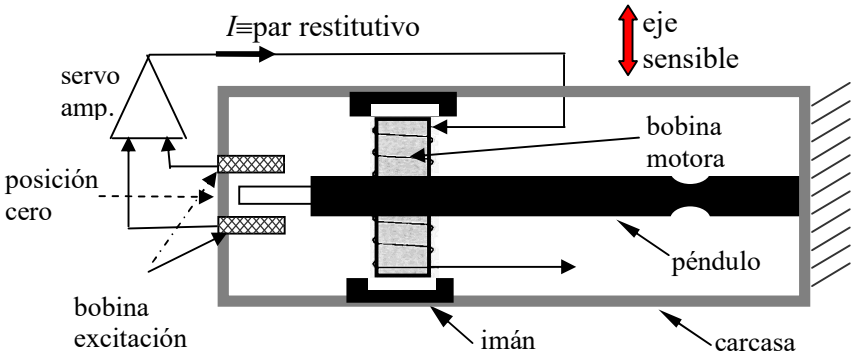


Figura 2.2: Esquema de un acelerómetro unidireccional de tipo péndulo.

El elemento flexible es sustituido por un lazo de regulación que mantiene al péndulo en la posición cero. El sensado del ángulo del pivote puede ser capacitivo, inductivo (mostrado en la figura), óptico o resistivo. Este último basado en cambios de la resistividad del pivote con la flexión. La medida de la aceleración es proporcional a la corriente que produce el par restitutivo que regresa al péndulo a su posición de cero. Al limitarse el desplazamiento de la masa testigo (masa del péndulo), se aumenta el rango dinámico y se asegura que el funcionamiento del sensor sea siempre en su zona de máxima sensibilidad y uniformemente lineal sobre toda su escala de medida la que así puede abarcar de 4 a 5 órdenes de magnitud (relación entre la resolución y la aceleración máxima). El rango de estos sensores puede alcanzar los 100g. Las principales fuentes de error son: el sesgo de medida (0.1mg a 10mg), resultado de pares elásticos residuales y desplazamientos en la medición del cero, la inestabilidad del factor de escala debido a efectos térmicos (TCS $\approx$0.1%) y un umbral de ruido (resolución) en RMS: $\approx$ 10μg.

2.1.2 Acelerómetros micromaquinados MEMS

Los acelerómetros MEMS se agrupan según los siguientes principios básicos de funcionamiento: a) de segmento resonante, b) de onda acústica superficial, c) piezoresistivos y d) capacitivos.

a) Los primeros forman parte de una nueva generación de acelerómetros que utilizan como principio la alteración de la frecuencia de oscilación de un segmento mecánico, normalmente un cristal de cuarzo, frente a cambios en el esfuerzo a la tracción que éste soporta. Los efectos no lineales son compensados utilizando dos segmentos que, en reposo vibran a la misma frecuencia de resonancia. La fuerza específica en el eje sensible altera diferencialmente el estado de tensión de cada segmento provocando una diferencia entre ambas frecuencias de oscilación proporcional a la excitación. Un esquema simplificado del principio se ilustra en la Fig. 2.3 (ver Le Traon et al. 2005).

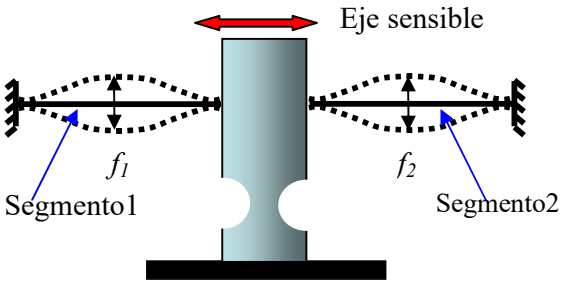


Figura 2.3: Esquema de acelerómetro vibratorio en configuración diferencial.

b) Una onda acústica superficial como las descritas inicialmente por Lord Rayleigh (1842-1919), puede ser generada y entretenida sobre un cristal piezoeléctrico mediante una distribución periódica de electrodos implantados en su superficie. Los acelerómetros que usan este principio (ver Motamedi, 1994, Titerton, 1997) disponen de una viga en voladizo cargada en su extremo con una masa testigo (ver Fig.: 2.4).

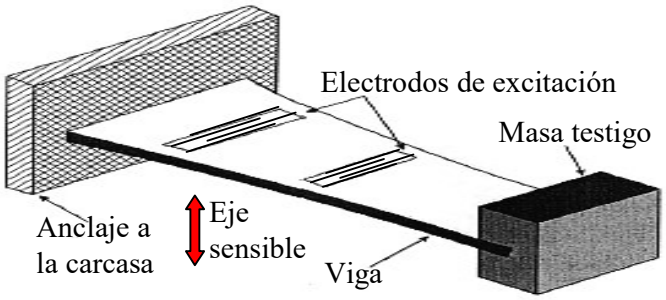


Figura 2.4: Principio del acelerómetro de ondas acústicas superficiales.

La frecuencia de la onda resonante es alterada variando la tracción mecánica sobre la superficie del cristal. La fuerza específica impresa al anclaje en la dirección del eje sensible flexiona la viga alterando su tensión superficial y provocando una variación en la frecuencia de la onda acústica superficial que resulta así una medida de la fuerza específica aplicada. La medida de estos dispositivos es directamente digitalizable y alcanza una resolución de 9 a 10 bits, sin embargo, usualmente el ancho de banda solo alcanza algunos pocos Hz.

c) Los acelerómetros piezoresistivos son los primeros en haber sido micromaquinados. Su estructura mecánica es similar a la mostrada por la Fig. 2.4. En este caso, un piezoresistor montado sobre la viga mide el estado de tensión de la misma modificado por la flexión producida por la aceleración inercial de la carcasa. Sus principales ventajas son la simplicidad de su estructura, la del proceso de fabricación y la de la electrónica de medición. Sin embargo, la sensibilidad estática de los acelerómetros piezoeléctricos es inferior a la de los capacitivos y la temperatura la afecta significativamente con un coeficiente de temperatura de la sensibilidad típico de hasta 0.2%/ºC.

d) El principio de los acelerómetros capacitivos se muestra en la Fig. 2.5 a). La fuerza específica exterior produce un desplazamiento de la masa testigo alterando la capacidad entre dos placas conductoras fijas a la carcasa, capacidad que puede ser medida eléctricamente de diversas maneras. Las Figs. 2.5 b) y 2.5 c) muestran las estructuras mecánicas más utilizadas en su fabricación. En la primera, llamada de estructura vertical, la masa testigo se mueve en la dirección perpendicular al plano que la contiene alterando su separación respecto de la placa fija. En la configuración lateral de la Fig. 2.5 c), la masa se mueve en el plano que la contiene alterando la separación entre un conjunto de electrodos dispuestos en peine. La dependencia de la sensibilidad en lazo abierto de los acelerómetros capacitivos es proporcional a la magnitud:

$$S \propto \frac{MA}{dK} \tag{2.4}$$

Donde M es la masa testigo, A el área efectiva de la capacidad, K la constante elástica y d el espacio inter-electrodos.

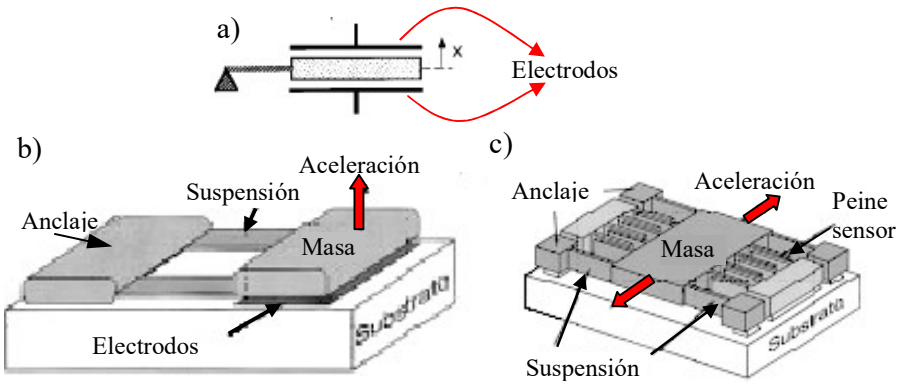


Figura 2.5: Configuración típica de un acelerómetro MEMs.

Entre las ventajas de los acelerómetros capacitivos mencionamos su alta sensibilidad, bajo ruido, estabilidad del sesgo y baja sensibilidad a la temperatura. Actualmente es posible fabricar acelerómetros MEMS capacitivos en silicio con performances que cubren desde las aplicaciones automotrices de bajo costo hasta las de alta precisión con resolución inferior a $1\mu g/\sqrt{Hz}$ en un ancho de banda de 100Hz, TCS≈150ppm/ºC y sensibilidad del sesgo a la temperatura ≈30μg/ºC (Yazdi et al. 1998). Ciertamente los

dispositivos de esta gama no son los estándares del mercado pero demuestran las posibilidades de una tecnología en rápida evolución.

2.2 Giróscopos

Los giróscopos miden rotación angular. Se distinguen los que miden la velocidad angular instantánea de los que miden cambios en el ángulo rotado alrededor de su eje sensible. En la literatura inglesa los primeros son denominados *"rate gyros"* y los segundos *"rate integrating gyros (RIG)"*. Los giróscopos del segundo tipo son particularmente útiles en vehículos sujetos a vibraciones aleatorias de amplio ancho de banda y elevada potencia media. En primer lugar, porque frente a grandes excursiones en magnitud de la velocidad angular los sensores de cambio angular reflejarán excursiones acotadas. En segundo lugar, porque la medición analógica que proveen es el verdadero ángulo rotado, en cambio, cuando esta magnitud deba obtenerse integrando numéricamente muestras de la velocidad angular deberá recortarse su espectro (*antialias*) degradándose la información angular efectiva. Finalmente, como veremos en el Capítulo 7, los algoritmos de navegación inercial procesan directamente estos incrementos angulares.

Desde el punto de vista de los principios físicos utilizados los giróscopos pueden clasificarse en rotatorios, vibratorios y ópticos.

2.2.1 Giróscopos rotatorios

La base de su funcionamiento es la conservación del momento angular. Son los más clásicos y están conformados por un volante rotatorio impulsado por un motor eléctrico suspendido en un montaje cardánico con ambos ejes perpendiculares al eje sensible. El eje del volante es soportado por rodamientos de muy bajo rozamiento.

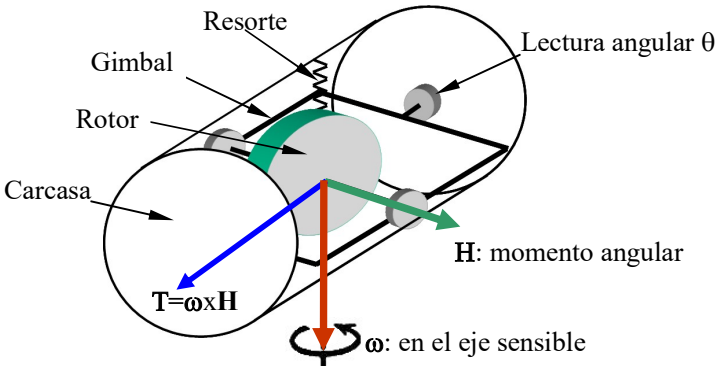


Figura 2.6: Esquema de giróscopo monoaxial encapsulado.

Según el principio giroscópico, para un momento angular H en el volante, una velocidad angular ω impresa en el eje sensible en cuadratura genera un par de presesión **T=ωxH** sobre el gimbal en un eje perpendicular a ambos. Cuando este par es contrabalanceado por un resorte lineal (indicado en al Fig. 2.6) o una barra de torsión, el ángulo de presesión resultante (θ) es una medida de la velocidad angular en el eje sensible mientras que H determina la sensibilidad del instrumento.

Constructivamente, el rotor y el gimbal están encapsulados y el conjunto inmerso en un fluido que induce una amortiguación viscosa y determina la respuesta dinámica. El resultado es una función de transferencia entre ω y θ similar a la (2.1). Suprimiendo el resorte, la viscosidad del fluido determina una velocidad de presesión angular límite $\omega_p = \dot{\theta}_p$ proporcional al par T y por tanto a la velocidad angular en el eje sensible. De este modo, la lectura del ángulo de presesión θ resulta proporcional a la integral de la velocidad angular (ángulo rotado) en el eje sensible lo que convierte al instrumento en un sensor de tipo RIG. Como la viscosidad del fluido depende de la temperatura, los instrumentos más precisos regulan la temperatura de su interior.

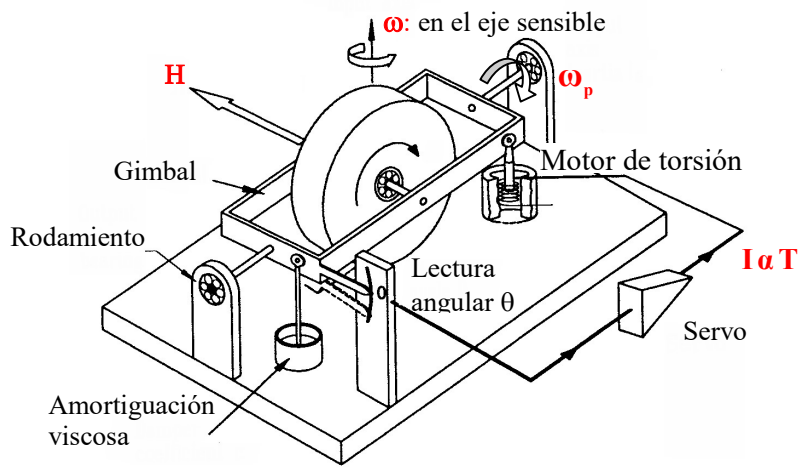


Figura 2.7: Esquema de giróscopo realimentado con un servomotor de torsión.

Al igual que los acelerómetros es posible obtener mediciones más estables y precisas de la velocidad angular realimentando la excursión del ángulo de presesión para transformar al sensor en un instrumento de cero. Un esquema de este principio es ilustrado en la Fig. 2.7, en él, la medida es la corriente I proporcional al par restitutivo T que a su vez es proporcional a la velocidad angular en el eje sensible del instrumento.

2.2.2 Giróscopos vibratorios

En una masa vibrante forzada a rotar se originan fuerzas de Coriolis (ver Capítulo 5) que inducen vibraciones secundarias ortogonales a la vibración original y al eje de rotación. De este modo, parte de la energía del modo de vibración primario es transferida a un modo secundario como consecuencia de la rotación. La amplitud de las oscilaciones secundarias resulta ser así una medida de la velocidad angular en el eje sensible del instrumento. Este principio ha dado recientemente lugar a diversos desarrollos de giróscopos sin motores, partes rotatorias, ni rodamientos, construidos con tecnología MEMS, muchos de ellos integrados en un mismo circuito con la electrónica de medición. La oscilación primaria es normalmente un modo resonante de la propia estructura mecánica sintonizado a la frecuencia nominal que define el factor de escala del instrumento. La sintonía puede afinarse electrostáticamente usando electrodos *ad-hoc*.

Giróscopo de diapasón

La versión más clásica de la aplicación de este principio es posiblemente la del giróscopo de doble diapasón sintonizado (*tuning fork*) tallado en una pieza de cuarzo

piezoeléctrico (ver Fig. 2.8) de alto Q para la unidad inercial *Motion Pack* de *Systron Donner* desarrollada a principios de los 90´s.

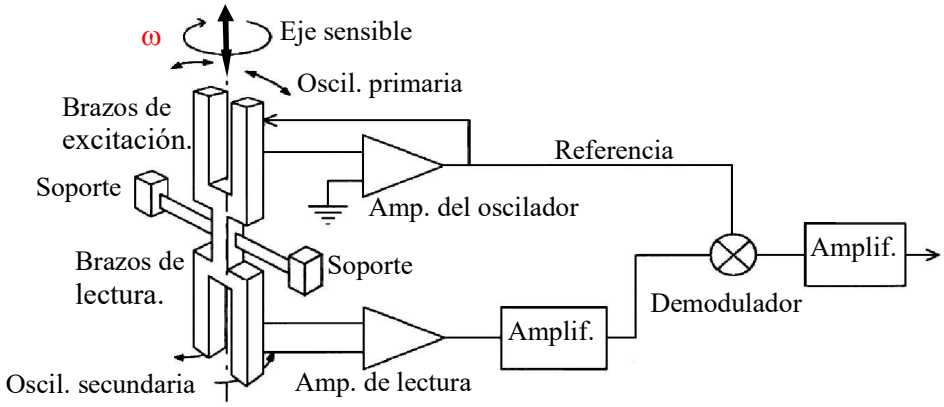


Figura 2.8: Principio de doble diapasón de cuarzo de Systron Donner.

Una oscilación primaria inducida en las ramas superiores se manifiesta en una velocidad periódica lineal ***v*** en la dirección del plano que las contiene. Cuando el diapasón rota según el eje sensible a la velocidad angular **ω**, una aceleración de Coriolis $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}$ periódica actúa sobre cada una de estas ramas perpendicularmente al plano mencionado. Estas fuerzas se traducen en un par periódico torsional en la unión entre ambos diapasones que induce una oscilación secundaria fuera del plano en las ramas inferiores. La señal piezoeléctrica producida por las ramas inferiores es demodulada usando como referencia la señal del oscilador primario para obtener a la salida una señal DC proporcional a ω.

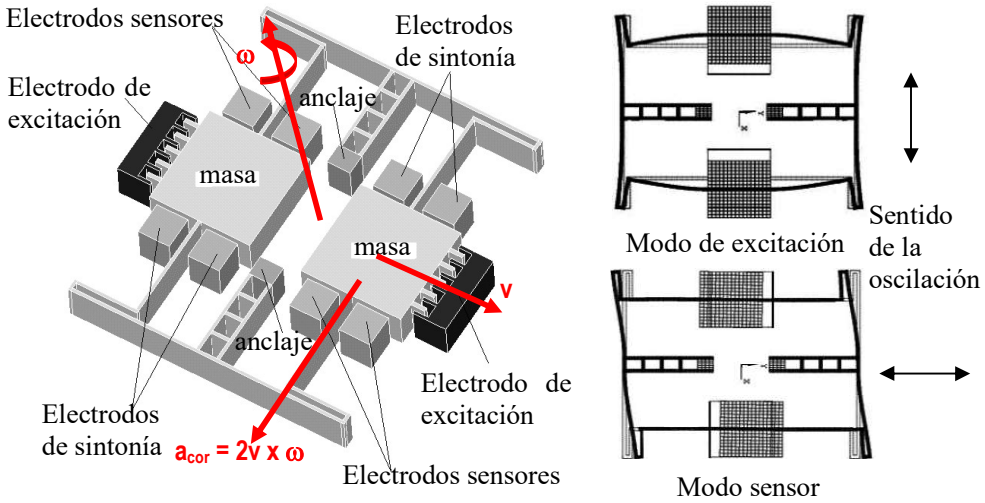


Figura 2.9: Giróscopo MEMS vibratorio y modos de oscilación.

La Fig. 2.9 ilustra una versión integrada de diapasón sintonizado desarrollada en el laboratorio Charles Stark Draper en 1991 (Bernstein et al. 1993 y también Yazdi et al. 1998). Mediante un peine de electrodos de excitación se induce electrostáticamente una oscilación (modo de excitación) de las masas testigos de unos 10μm de amplitud. Expuesto a una velocidad angular ω en el eje sensible normal al plano del sustrato sobre el que se mueven las masas, se induce en estas últimas un movimiento oscilatorio

ortogonal al modo primario de excitación (ver modo sensor). Este último movimiento es detectado capacitivamente mediante electrodos sensores.

La Tabla 2.1 lista los parámetros de performance alcanzable actualmente en giróscopos de diapasón*, así como la esperable en unos años habida cuenta de las tendencias en el desarrollo de esta tecnología (ver Barbour, 2004; Geen, 2002).

Parámetro	Tecnología actual	Perfomance prevista	Comentarios
Rango de operación º/s	100-6000	100-6000	Seleccionable
Sesgo al encendido º/h	10-150	<1	
Inestab. sesgo º/h	3-30	<1	-40º-85º
Inestab. fact. esc. %	0.03-0.15	<0.01	
Ruido de fondo [º/s]/$\sqrt{Hz}$	0.5-3	0.02	
Sensibilidad a g [º/h]/g	10	0,5	

Tabla 2.1

Giróscopo de disco oscilante

El principio del diapasón es utilizado también en un diseño originalmente propuesto en la Universidad de California en Berkley (Juneau et al., 1997 y también Lutz et al. 1997)). El diseño consiste en un disco en rotación oscilatoria alrededor de su eje z (ver Fig. 2.10).

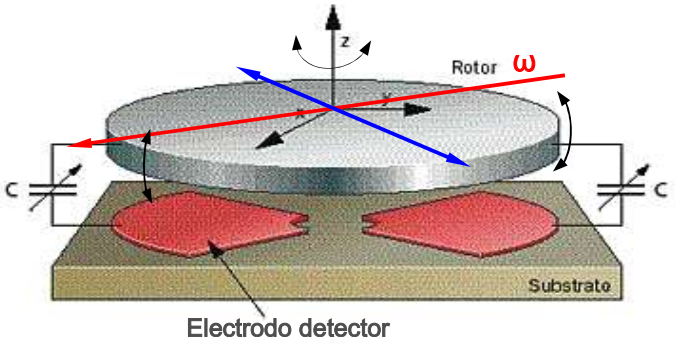


Figura 2.10: Principio de giróscopo MEMS basado en un disco vibratorio.

Una rotación de entrada contenida en el plano del disco (ω) induce, por Coriolis, una oscilación secundaria en torno de un eje que es perpendicular simultáneamente a ω y eje del disco y por tanto contenida en el plano éste último. La oscilación secundaria es captada por electrodos capacitivos situados debajo del disco. El dispositivo permite así medir la componente bidimensional (dos ejes de rotación simultáneos) del vector velocidad angular proyectada sobre el disco. El ruido de fondo tiene una densidad de 0.3[º/s]/$\sqrt{Hz}$. Aún en condiciones de performance óptima el diseño actual propuesto por

*Ver más adelante en este Capítulo las definiciones de estos parámetros en los párrafos 2.4 a 2.7

Juneau et al. (1997) adolece de sensibilidades cruzadas entre ambos ejes sensibles. Sin embargo, los diseños futuros contemplan usar un rebalance de fuerzas en lazo cerrado que permitirá mejorar la performance y evitar el acoplamiento entre ejes. Más recientemente, un diseño de alta performance con disco oscilante fue logrado por Geiger et al. (1998) para un solo eje sensible con una densidad de ruido de 0.27º/√h (0.005[º/s]/$\sqrt{Hz}$), estabilidad del sesgo de 65º/h, y error en el factor de escala< 0.2%.

Giróscopo de anillo vibratorio

La General Motors y la Universidad de Michigan (EEUU) desarrollaron conjuntamente un concepto de giróscopo vibratorio basado en un anillo puesto a oscilar en su modo natural (modo de excitación o primario) en el plano que lo contiene mediante electrodos dispuestos en su periferia.

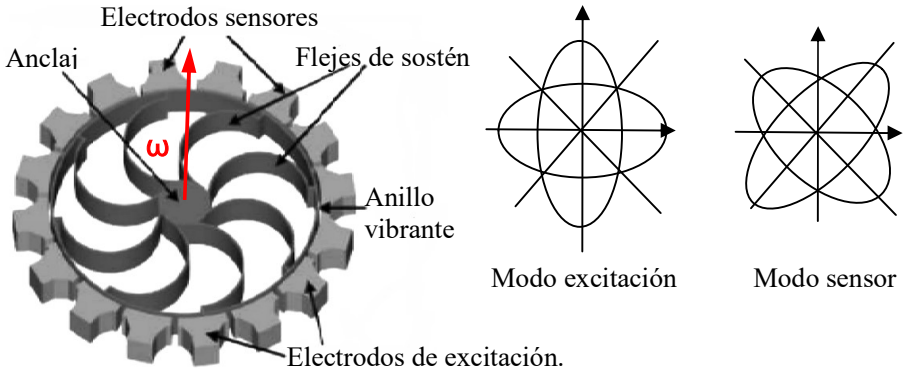


Figura 2.11: Principio de giróscopo MEMS de anillo vibrante.

La Fig. 2.11 ilustra la estructura del anillo micromaquinado en un bloque de silicio cristalino y los modos elípticos de excitación y sensor que determinan movimientos radiales de los puntos en la periferia del anillo. Una velocidad angular ω ejercida según el eje de simetría del anillo genera fuerzas de Coriolis oscilantes en el plano del anillo que inducen el modo secundario o sensor a 45º del modo primario. Los movimientos de este último modo son captados por los electrodos capacitivos dispuestos sobre la periferia del anillo. También en este caso la frecuencia de resonancia es sintonizable electrostáticamente. Este concepto tiene varias ventajas sobre los presentados anteriormente usualmente subrayadas en la literatura, entre las que citamos: a) la simetría propia del anillo lo hace poco sensible a vibraciones espurias inducidas por el medio, b) dado que ambos modos (excitación y sensado) comparten la misma frecuencia de resonancia la sensibilidad es amplificada por al factor de calidad Q de la estructura, c) su funcionamiento es poco sensible a la temperatura que afecta igualmente ambos modos de oscilación, d) las asimetrías de masa o rigidez, propias del proceso de fabricación, pueden ser compensadas electrónicamente mediante los electrodos de balanceo.

Se espera que a corto plazo una línea de diseño introducida recientemente en la Universidad de Michigan basada en una estructura íntegramente construida en polisilcon permita fabricar giróscopos de *calidad táctica* con ruido de fondo de una densidad del orden de 0.001[º/s]/$\sqrt{Hz}$ (Ayazi/Najafi, 1998). La tabla 2.2 resume algunos parámetros de performance actualmente alcanzables mediante esta tecnología.

Rango de operación º/s	1000	Comentarios
Sesgo al encendido º/h	<0.06	1σ
Inestab. sesgo en func. º/h	0.05	1σ (0–30min)
Inestab. fact. esc. %	<1	-40º-85ºC
Ruido º/s rms	<0.1	0-45Hz

Tabla 2.2

2.2.3 Giróscopos ópticos: Efecto Sagnac

El principio en el que se basan todos los giróscopos ópticos es el efecto descubierto por el físico francés Georges Sagnac en 1913 y que lleva su nombre. Los primeros instrumentos que utilizaron este efecto fueron los *ring laser gyro* desarrollados a partir de 1975. A partir de 1985 hace su aparición una nueva tecnología basada en este efecto denominada *fiber optic gyros* (FOG) y considerada en un principio como una alternativa de bajo costo a la primera. La motivación fundamental de los giróscopos ópticos fueron desde un principio los requerimientos de precisión y rango dinámico impuestos por los nuevos sistemas *strap-down.* Otras ventajas son: una inherente lectura digital, arranque casi instantáneo, baja sensibilidad a las perturbaciones mecánicas y total independencia mecánica de su medio ambiente. Junto con la tecnología MEMS acaparan actualmente la mayor atención de los centros de desarrollo de instrumentos inerciales.

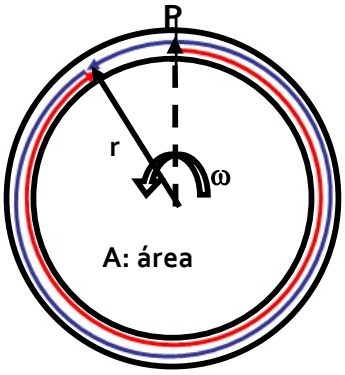


Figura 2.12: Principio de Sagnac.

La Fig. 2.12 ilustra el principio de Sagnac. Supóngase que el anillo, al que es solidario el punto P, rota alrededor de su eje de simetría a una velocidad angular $\omega \neq 0$. Sean t_+ (trayecto en azul) y t_- (trayecto en rojo) los tiempos que emplean sendos rayos de luz partiendo de un mismo punto P y moviéndose respectivamente en el sentido anti-horario y horario hasta reencontrar a dicho punto. Es fácil advertir a partir de la geometría del problema que si *c* es la velocidad de la luz y *A* el área incluida en el anillo, dichos tiempos satisfacen:

$$\left.\begin{aligned} ct_+ &= 2\pi r + r\omega t_+ \\ ct_- &= 2\pi r - r\omega t_- \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta t = t_+ - t_- = \frac{4\pi r^2\omega}{c^2 - r^2\omega^2} \approx \frac{4A\omega}{c^2} \tag{2.5}$$

$$\Rightarrow \Delta L = c\Delta t = \frac{4A\omega}{c} \tag{2.6}$$

De la anterior, resulta una diferencia del camino recorrido por ambos rayos que, en primera aproximación ($c^2 \geq r^2\omega^2$), resulta proporcional a la velocidad angular ω. Un desarrollo en elementos diferenciales de ángulo permite demostrar que el área en la expresión (2.5) es la encerrada por el camino óptico independientemente de la forma que éste tenga. El efecto Sagnac habilita así la medición absoluta del movimiento angular de un sistema de referencia solidario al anillo.

Giróscopos de láser en anillo (RLG)

Consisten en una cavidad óptica resonante en camino cerrado con 3 o más espejos dentro de la cual la luz puede propagarse en ambas direcciones. La cavidad provee una ganancia láser que permite sostener la resonancia de dos rayos en contra-propagación con longitudes de onda igual a un submúltiplo entero de la longitud de los respectivos caminos ópticos. Típicamente la ganancia es producida por un gas de He-Ne que llena el interior de la cavidad. La cavidad es construida con material de muy baja expansión térmica de modo de limitar los cambios mecánicos de longitud del camino óptico. La expansión remanente es compensada mediante un servo piezoeléctrico que desplaza alguno de los espejos de modo de mantener la resonancia centrada en el pico de ganancia del gas. Sin rotación absoluta, la cavidad genera dos rayos resonantes a la misma frecuencia ν con un número entero p de longitudes de onda encerrados en el camino óptico L de modo que $L=p\lambda$ con $\nu = c/\lambda$.

Una rotación en un eje ortogonal al plano del camino óptico determina un cambio en ambos caminos ópticos dado por (2.6). La condición de auto sustentación de la resonancia dada por la invariancia del entero p se traduce en sendos cambios en las longitudes de onda en los rayos en *pro y contra* de la rotación en el eje sensible. Esta condición es expresada mediante las relaciones:

$$p = L_p/\lambda_p = L_c/\lambda_c \Rightarrow \Delta L = L_p - L_c = p(\lambda_p - \lambda_c) = p\Delta\lambda \tag{2.7}$$

Con ΔL expresada por la (2.6) la rotación induce una frecuencia de batido $\Delta\nu = c/\Delta\lambda$ entre ambos rayos dada por:

$$\Delta\nu = \frac{\Delta L}{L}\nu = \frac{4A\omega}{cL}\nu = \frac{4A\omega}{\lambda L} \tag{2.8}$$

Para valores típicos de A, ω, L y λ, $\Delta L/L = \Delta\lambda/\lambda < 10^{-6}$, lo que refleja la gran estabilidad y pureza espectral requeridas de la cavidad láser para asegurar la factibilidad de la medición de la velocidad angular mediante un RLG. En cuanto a la frecuencia de batido es posible medir rangos de valores desde algunos Hz a algunos MHz, lo que da cuenta del amplio rango dinámico que es posible alcanzar con esta tecnología. La frecuencia de batido se mide mezclando ambos haces en un arreglo de prismas ("prisma mezclador" en la Fig. 2.13) situado en uno de los vértices lo que produce un patrón de interferencia cuya periodicidad espacial puede ser medida con fotodiodos. La frecuencia de batido,

resultante de la rotación angular, induce una velocidad de desplazamiento de las bandas de interferencia proporcional en dirección y sentido a la velocidad de angular. El pasaje de las bandas bajo el campo óptico de los diodos produce impulsos que contados durante un intervalo fijo son una medida del ángulo total rotado en dicho intervalo respecto de una terna inercial. Puesto que cada pulso corresponde a un período igual a $1/\Delta v$, para cada pulso el ángulo rotado será:

$$\Delta\theta = \omega / \Delta v = \lambda L / 4A \tag{2.9}$$

Lo que da la medida de la sensibilidad (resolución) del instrumento (2 a 6 arcseg) en tanto que sensor de ángulo (RIG).

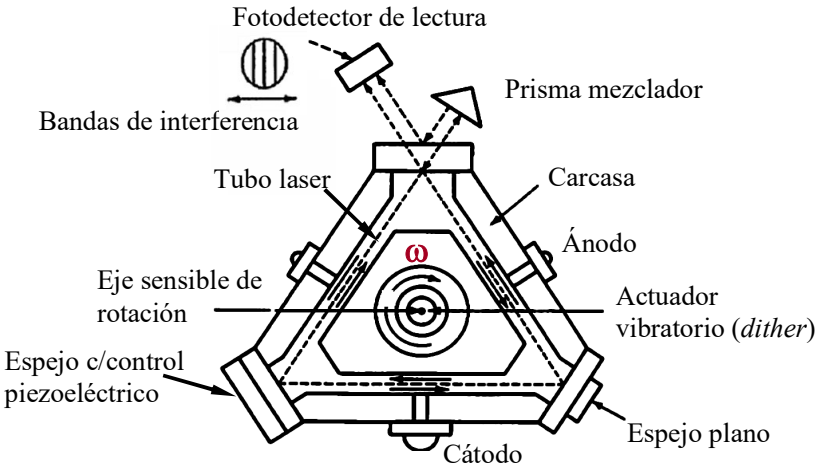


Figura 2.13: Diagrama de un giróscopo de laser de 3 espejos.

Para muy bajas velocidades angulares las frecuencias de resonancia de ambos modos de propagación resultan muy cercanas ($\Delta v \to 0$ en la Ec. (2.8)). En estas condiciones y por razones similares a las que provocan la sincronización de osciladores electrónicos aun muy levemente acoplados, Δv en (2.8) puede caer abruptamente a cero limitando la resolución del instrumento. El acoplamiento entre ambos modos en contra propagación se debe a la mutua transferencia de energía debida a la dispersión hacia atrás de la radiación (*back-scattering*) incidente sobre la superficie de los espejos de la cavidad. La técnica más usada para evitar la sincronización entre resonancias consiste en provocar mecánicamente una fluctuación angular (*mechanical dither*) en el eje sensible del instrumento con lo cual se minimiza el tiempo en que el sensor permanece en zona de sincronía de resonancias. Algunos efectos secundarios de este paliativo y sus soluciones son discutidas por Smith, (1987).

Los altos costos de producción de este tipo de instrumento están ligados a la precisión del pulido y a la calidad del material de los espejos y del tubo laser. Por un lado, es necesaria una baja dispersión hacia atrás (usualmente 0.02%) para lograr una buena resolución y por otro, una alta reflectividad (usualmente 99.97%) para reducir las perdidas en la cavidad y mejorar la precisión del factor de escala (alto "Q" implica precisión en λ). El estado del arte en tecnología del pulido de espejos permite hoy en día lograr, sin usar la fluctuación angular, resoluciones del orden de 0.1º/s (ver Smith, 1987).

Giróscopos interferométricos de fibra óptica (IFOG)

Las ventajas inherentes de los giróscopos ópticos motivaron una nueva línea de desarrollo de este tipo de instrumentos que pudiese paliar las desventajas de los RLG principalmente asociadas a los costos de producción y la insensibilidad para bajas velocidades angulares por sincronización de las resonancias. En los años 70´s se demostró en la Universidad de Utha (ver Barbour, 2004) la posibilidad de medir un patrón de interferencia debido al efecto Sagnac usando dos haces de luz en contra-propagación dentro de una fibra óptica cerrada en bucle. En lugar de una cavidad resonante cerrada y controlada por espejos generando internamente una luz coherente por efecto láser, el giroscopio interferométrico de fibra óptica (IFOG) consiste en espiras de fibra óptica que constituyen un camino cerrado de luz procedente de una fuente externa tal como un diodo superluminiscente.

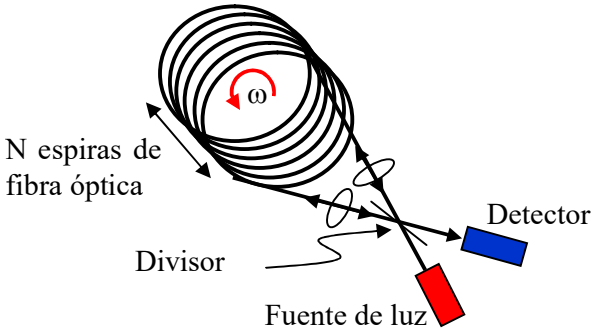


Figura 2.14: Esquema de un giróscopo de fibra óptica.

A la entrada, este haz es dividido en dos haces en contrapropagación (Fig. 2.14) que son luego recombinados al final de su recorrido (entre 100m y 3Km). El detector interferométrico mide la diferencia de fase $\Delta\Phi$ entre ambos haces que, a su vez, es una medida de la diferencia de camino recorrido y por tanto proporcional a la velocidad angular ω.

$$\Delta\Phi = 2\pi\frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{8\pi NA\omega}{\lambda c} = \frac{4\pi RL\omega}{\lambda c} \tag{2.10}$$

Retroalimentando la fase medida mediante un controlador proporcional+integral sobre la frecuencia generada por el circuito de potencia óptica es posible anular la diferencia de fase. De este modo, el IFOG se comporta como un instrumento de cero (donde su sensibilidad es máxima) en el cual el desplazamiento en la frecuencia óptica es una medida del ángulo mecánico rotado con lo cual el instrumento se convierte en un RIG. Esta es la configuración preferida en muchas aplicaciones debido a su mayor rango dinámico y mayor estabilidad del factor de escala.

Un IFOG tiene algunas ventajas notables frente al RLG: no requiere de alto voltaje, al no usar una luz coherente de ancho de banda puntual no tiene el problema de insensibilidad para bajas velocidades angulares (no requiere *dither*), finalmente, sus costos son, en general, más reducidos. Por otra parte, la variancia del error en la medida en $\Delta\Phi$ resulta ser inversamente proporcional a la longitud de la fibra óptica, por lo que la performance del instrumento es escalable con la longitud de ésta. Algunos resultados

permiten esperar que la performance de los IFOG llegue a superar a la de los RLG. Ver por ejemplo el IFOG desarrollado por Sanders et al. (2002) con estabilidad del sesgo <0.0003°/hr, densidad espectral de ruido <0.00008 deg/√hr y error en factor de escala <0.5 ppm. Los esfuerzos más recientes en la tecnología IFOG se concentran en su abaratamiento y miniaturización.

2.3 Unidades de medidas inerciales (UMI)

Los instrumentos inerciales de un sistema de navegación strapdown normalmente están agrupados dentro de un gabinete (o carcasa) a la cual son mecánicamente solidarios. Además de los instrumentos, el gabinete alberga la electrónica de sensado, de filtrado y de acondicionamiento de las señales y, en ciertos casos, de digitalización de las mediciones. A dicho gabinete, incluyendo los instrumentos y la correspondiente electrónica, se lo denomina *Unidad de Medidas Inerciales* (UMI). El número de sensores inerciales en una UMI es variable dependiendo de la aplicación. En este volumen se considerarán UMI´s completas, es decir, aquellas diseñadas para proveer medidas vectoriales de fuerza específica y velocidad angular inerciales según tres ejes mutuamente ortogonales denominados ejes sensibles de la UMI. Usualmente, esto se logra disponiendo una terna de giróscopos y otra de acelerómetros paralelos a los ejes sensibles (x^m, y^m y z^m en la Fig. 2.15). Mediante el cálculo de las correspondientes proyecciones, las 6 magnitudes inerciales pueden también obtenerse con un número redundante de instrumentos (superior a 6) y no necesariamente dispuestos ortogonalmente. Se considera como mediciones provistas por la UMI las 6 componentes de las magnitudes inerciales vectoriales proyectadas según sus ejes sensibles.

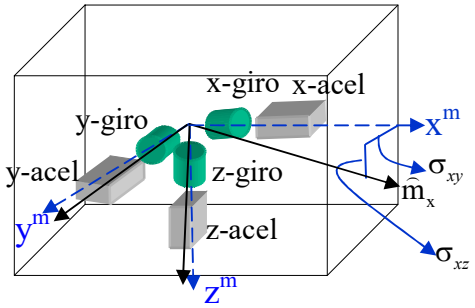


Figura 2.15: Unidad de medidas inerciales.

2.3.1 Modelo matemático de una UMI

Distinguimos las componentes de cada magnitud inercial física proyectadas sobre los 3 ejes sensibles nominales de la UMI $\mathbf{m}^b(\mathbf{f}^b \text{ ó } \boldsymbol{\omega}^b) \in \mathbb{R}^3$ de sus correspondientes tríadas de medidas que denotamos $\hat{\mathbf{m}}^b(\hat{\mathbf{f}}^b \text{ ó } \hat{\boldsymbol{\omega}}^b) \in \mathbb{R}^3$. Supondremos que cada pareja de tríadas está relacionada mediante la siguiente familia de modelos con idéntica estructura matemática parametrizada por el vector $\mathbf{p}_m \in \mathbb{R}^{12}$ (m=f ó ω según la terna de sensores):

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^b &= M(\hat{\mathbf{m}}^b;\mathbf{p}_m) + \boldsymbol{\xi}_m \\ M(\hat{\mathbf{m}}^b;\mathbf{p}_m) &= \left(I + \Sigma_m\right)\hat{\mathbf{m}}^b + \mathbf{b}_m = L(\hat{\mathbf{m}}^b)\boldsymbol{\sigma}_m + \mathbf{b}_m \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\Sigma_m(\boldsymbol{\sigma}_m) \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}_m ; \boldsymbol{\sigma}_m \in \mathbb{R}^9 ; \mathbf{p}_m \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{b}_m \\ \boldsymbol{\sigma}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12} \tag{2.12}$$

Donde: $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{m}}$ es el vector del ruido aditivo de medida; I es la matriz identidad de dimensión 3; las componentes de $\mathbf{b}_{\mathrm{m}} \in \mathbb{R}^3$ son los sesgos de medida en cada dirección; los elementos de la diagonal de Σ_m constituyen los errores en el factor de escala de cada medición de la terna, en tanto que los elementos σ_{ij} fuera de la diagonal representan los errores angulares de alineación entre la dirección sobre la que se mide la componente* y el correspondiente eje sensible nominal de la UMI. Por ejemplo, en la Fig. 2.15, la parte determinista de la medida $\hat{m}_x$ resulta ser: $(1+\sigma_x)m_{\mathrm{x}} + \sigma_{xy}m_{\mathrm{y}} + \sigma_{xz}m_{\mathrm{z}}$ para un error en el factor de escala σ_x y pequeños ángulos en radianes σ_{xy} y σ_{xz} que describen la no-ortogonalidad entre el eje nominal x de la UMI y el de la medida.

La segunda Ec. (2.11) destaca el hecho de que el modelo M es bilineal en sus argumentos $\mathbf{p}_m$ y $\hat{\mathbf{m}}$ y por tanto que ambas representaciones son equivalentes siendo los elementos de la matriz $L(\hat{\mathbf{m}})$ lineales en $\hat{\mathbf{m}}$.

Cuando la precisión sea importante, las componentes de los vectores $\mathbf{p}_m$ podrán ser medidas experimentalmente en mesas de ensayo, de otro modo se adoptaran los valores promedios para la población que usualmente provee el fabricante del instrumento. La calidad de una unidad inercial está asociada a la estabilidad y la precisión con que se conozcan los vectores $\mathbf{p}_m$.

Ambos modelos (2.11)/(2.12) se agrupan en un único modelo, llamado de calibración de la UMI, descrito mediante:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^b \\ \mathbf{f}^b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M(\hat{\boldsymbol{\omega}}^b;\mathbf{p}_\omega) \\ M(\hat{\mathbf{f}}^b;\mathbf{p}_f) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_\omega \\ \boldsymbol{\xi}_f \end{bmatrix} = \mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\mu}};\mathbf{p}_i) + \boldsymbol{\xi}_\mu \\ &= \begin{bmatrix} L(\hat{\boldsymbol{\omega}}^b) \\ L(\hat{\mathbf{f}}^b) \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} + \boldsymbol{\xi}_\mu = \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\mu}})\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} + \boldsymbol{\xi}_\mu \\ \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_\omega^T & \boldsymbol{\sigma}_f^T \end{bmatrix}^T ; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_\omega^T & \mathbf{b}_f^T \end{bmatrix}^T ; \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^T & \mathbf{b}^T \end{bmatrix}^T ; \end{aligned} \tag{2.13}$$

Donde $\mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\mu}};\mathbf{p}_i) = \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\mu}})\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}$ es la parte determinista del modelo, en tanto que su componente estocástica está representada por una superposición de procesos aleatorios de distinto origen que conforman el ruido aditivo $\boldsymbol{\xi}_\mu$. Los filtros de fusión de datos necesitan modelos que describan (lo más fielmente posible) la evolución de las estadísticas de estos procesos.

* Puede pensarse a esta dirección como aquella sobre la cual yace el sensor inercial individual, distinta a la correspondiente al eje nominal de la UMI.

Por lo anterior, el diseñador necesitará familiarizarse con los conceptos y la terminología relativos a la descripción, modelización y caracterización de los procesos que afectan la medida de una UMI. Esto será tratado en los próximos párrafos, los cuales, entre otros, deberían poder clarificar conceptos usuales en al industria tales como "*bias instability*", "*angle random walk*", "*rate random walk*" frecuentes en las hojas de datos que especifican la performance de los instrumentos inerciales.

2.4 Elementos sobre procesos estocásticos

En este párrafo se introducen algunos conceptos básicos frecuentemente usados para caracterizar los principales procesos presentes en la medida de una UMI.

Momentos de 1º y 2º orden de un proceso estocástico.
La caracterización simplificada más usual en ingeniería de un proceso estocástico continuo $\xi(t)$ consiste en sus dos primeros momentos, a saber:

$$\begin{gathered}\text{Valor medio: } \overline{\xi}(t)=E\{\xi(t)\} \\ \text{Función de autocorrelación: } R_\xi(t_1,t_2) \triangleq E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}\end{gathered} \tag{2.14}$$

Cabe subrayar, no obstante, que la descripción completa de un proceso estocástico requiere de los infinitos momentos de orden superior a dos. Hay, sin embargo, un caso destacado en el cual las estadísticas (2.14) resultan suficientes y es cuando el proceso es gaussiano.

Para $\tau = t_2 - t_1$, diremos que ξ *es estacionario de 2º orden*[*] cuando y sólo cuando $\overline{\xi}(t)$=constante y $R_\xi(t_1,t_2) = R_\xi(\tau), \forall t_1, t_2$. Cuando $\xi(t)$ es real, la estacionaridad de 2º orden implica, además, la condición de simetría: $R_\xi(\tau) = R_\xi(-\tau)$. Si $R_\xi(\tau)$ es absolutamente integrable respecto de τ su transformada de Fourier es la función compleja definida mediante:

$$\begin{aligned} &a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \left|R_\xi(\tau)\right| d\tau < \infty \Rightarrow \exists\ S_\xi(f) = \mathcal{F}\left\{R_\xi(\tau)\right\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &b)\ S_\xi(f) \overset{\mathcal{F}/\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftarrows} R_\xi(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(f) e^{j2\pi f\tau} df \end{aligned} \tag{2.15}$$

La Ec. (2.15) b) destaca el carácter bi-univoco de la transformación siempre que esté definida. Es fácil demostrar que, por ser $R_\xi(\tau)$ una función real y simétrica, bajo las condiciones de la definición (2.15), $S_\xi(f)$ también es una función real y simétrica de f (ver Papoulis, (1991)).

De la definición (2.14) y de la Ec. (2.15) b), resulta que la potencia instantánea $E\left\{\xi^2(t)\right\}$ de un proceso estacionario es constante e igual a:

[*]Wide Sense Stationary (WSS) en inglés.

$$R_\xi(0) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(f)df \ , \tag{2.16}$$

De este modo que $S_\xi(f)$ es vista como una densidad de potencia a lo largo del eje $f \in$ (-∞, ∞) y llamada, por esta razón, *densidad espectral de potencia (DEP o PSD* en inglés). Claramente, puesto que $R_\xi(0) \geq 0$, $S_\xi(f) \geq 0, \forall f \in \mathbb{R}$, de otro modo sería posible "filtrar potencia negativa" en alguna zona del espectro de la señal. Si U es la unidad de medida de ξ, $S_\xi(f)$ se expresará en $[\mathrm{U}]^2/[\mathrm{Hz}]$.

2.5 Descripción del ruido de medida

Como se vio en el Capítulo 1, los errores instrumentales hacen que la navegación inercial sea inestable a corto plazo. Por otra parte, como se verá en el Capítulo 10 la navegación integrada con fusión de datos es puramente inercial entre dos instantes de medidas exoceptivas. Surge por lo tanto la necesidad de caracterizar cuidadosamente los ruidos de medida de una UMI, en particular, cuando se usen sensores miniaturizados tales como los de tecnología MEMS.

Lo que comúnmente llamamos ruido es en realidad una señal, por lo general muy poco predecible, compuesta por varios procesos aleatorios superpuestos cuya potencia en alta frecuencia suele estar dominada por procesos muy descorrelacionados o independientes. A continuación se describen los procesos que más frecuentemente perturban las medidas inerciales.

2.5.1 Procesos aleatorios en el ruido de medida

Ruido blanco continuo *n*(*t*)

Es el ruido por excelencia dado que por definición es totalmente impredecible. Lo definimos como el proceso estocástico centrado *n*(*t*) estacionario de segundo orden y caracterizado por una DEP constante q_n tal que:

$$\begin{aligned} &i)\ E\{n(t)\} = \bar{n} = 0 \\ &ii)\ \mathbf{S}_n(f) = cte. = q_n\left[[U]^2/[Hz]\right]; \ \Rightarrow \sqrt{q_n}\,[U]/\sqrt{[Hz]} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Siendo su DEP una constante en todo el rango de frecuencias, de la (2.16) resulta que para cualquier instante de tiempo la potencia promedio de un ruido blanco ($E\{n(t)^2\} = R_n(0)$) no está acotada y por lo tanto carece de existencia real. Consistentemente, antitransformando $\mathbf{S}_n(f) = q_n = cte.$ resulta que su función de autocorrelación es la función impulsiva (Papuolis, (1991)):

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{q_n\} = q_n\delta(\tau)[U]^2 \tag{2.18}$$

Donde, la función generalizada "delta de Dirac" $\delta(\tau)\,[\mathrm{seg}]^{-1}$ es aquella que opera sobre cualquier función integrable $h(\tau)$ tal como:

$$\int_{t^-}^{t^+} \delta(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)h(\tau)d\tau = h(t) \tag{2.19}$$

En lo que sigue se usará la notación $n(t) \sim (0, \delta(t)q_n)$ para denotar un rudo blanco con DEP= q_n . En particular, llamaremos ruido blanco unitario a: $n_u(t) \sim (0, \delta(t))$.

A pesar de ser una idealización matemática, el concepto de ruido blanco tiene un gran valor práctico puesto que, como veremos, en base a él es posible modelar muchos otros procesos estocásticos. Además de esto, y dado que cualquier sistema físico tiene necesariamente un ancho de banda acotado, una perturbación de un ancho de banda comparativamente grande respecto de la banda pasante del canal o del sistema al que perturba se comportará, en la práctica, como un ruido blanco para este último.

Ruido blanco muestreado $n_d(k)$

Siempre que se muestree una señal continua se estará, a la vez, muestreando un ruido continuo. Para evitar el fenómeno de "pliegue en frecuencia" o "*alias*" de una señal muestreada, el teorema de Shannon-Whittaker (Shannon, 1949) impone introducir, delante del muestreador, un filtro *antialias* que suprima las frecuencias superiores o iguales a la mitad de la frecuencia de muestreo (condición de Nyquist). Por tanto, para preservar la información útil en una señal muestreada, el filtro de premuestreo y el período de muestreo T_s deben ser cuidadosamente elegidos. Como la respuesta a un ruido blanco (centrado) de un filtro *antialias* lineal tiene valor medio (momento de 1º orden) nulo en todo instante de tiempo y en particular en los instantes de muestreo kT_s, su caracterización como proceso discreto requiere sólo establecer su momento de segundo orden. Para esto se recurre a la aproximación estándar de suponer el filtro *antialias* ideal, es decir, con una función de transferencia como la representada en la Fig. 2.16.

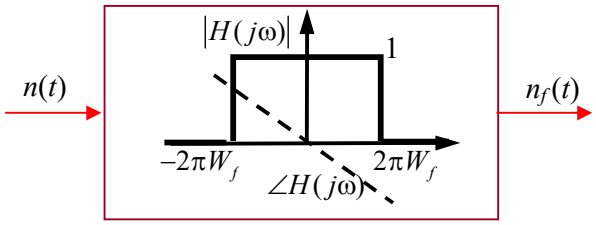


Figura 2.16: Modulo de la función de transferencia de un filtro pasa-bajos ideal.

Así, el ruido $n_f(t)$ a la salida del filtro tiene ancho de banda W_f [Hz] y densidad espectral dada por:

$$S_{nf}(f) \begin{cases} q_n, & |f| \le W_f \\ 0\ , & |f| > W_f \end{cases} \tag{2.20}$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa a $S_{nf}(\omega)$ se obtiene la función de autocorrelación de $n_f(t)$ que resulta (ver Papoulis (1991)):

$$E\{n_f(t)n_f(t+\tau)\} = R_{nf}(\tau) = 2W_f q_n \frac{\sin(2\pi W_f \tau)}{2\pi W_f \tau} \tag{2.21}$$

De la anterior interesa destacar que cuando el ruido filtrado es muestreado satisfaciendo la condición (de Nyquist) entre ancho de banda y período de muestreo: $2W_fT_s$=1, la secuencia $n_d(k) = n_f(kT_s)$ resulta descorrelacionada (es decir: $R_{nf}(T_s) = 0$) con potencia promedio en cada instante de muestreo kT_s igual a $E\{n_d(k)^2\} = R_{nf}(0) = 2W_f q_n < \infty$. Este argumento justifica la aproximación usual para la variancia de un ruido blanco muestreado en función de su densidad espectral dada por: $\sigma_{nd}^2 = q_n / T_s$ y el hecho de llamar a este último ruido blanco discreto.

Ruido "markoviano" *ν(t)*

En el Capítulo 10 se introducirá una definición general de proceso markoviano. Sin embargo, en el contexto de la modelización de ruidos se adopta normalmente la definición "ingenieril" más restringida que se enuncia como: la respuesta de un sistema lineal, invariante, asintóticamente estable excitado por un ruido blanco. Cuando el proceso es escalar (monovariable) el sistema es representable mediante una función de transferencia $H_\nu(s)$ con todos sus polos en el semi-plano complejo izquierdo abierto (Fig. 2.17).

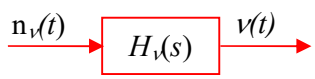


Figura 2.17.

Si además $H_\nu(s)$ es una función racional en s (cociente de polinomios en *s*), el sistema lineal admitirá una representación en variables de estado de dimensión finita, representación que se extiende fácilmente a sistemas multi-variables como el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \mathbf{A}\zeta + \mathbf{n}_\zeta \\ \mathbf{v} &= \mathbf{C}\zeta + \mathbf{n} \end{aligned} \tag{2.22}$$

Donde $\mathbf{n}_\zeta \sim (0, \mathbf{Q}_\zeta \delta(t))$ y $\mathbf{n} \sim (0, \mathbf{Q}_n \delta(t))$ son procesos vectoriales blancos con matrices de DEP diagonales $\mathbf{Q}_\nu$ y $\mathbf{Q}_n$ y matrices **A, C** de dimensiones apropiadas. En el caso una entrada una salida ($\nu, n_\nu \in \mathbb{R}$) la respuesta de la (2.22) viene dada por:

$$\nu(t) = \mathbf{C}\Phi(t-t_0)\zeta(t_0) + \int_{t_0}^{t} h(t-\tau) n_\nu(\tau) d\tau + n(t) \tag{2.23}$$

Donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema lineal de la Fig. 2.17. La condición de estabilidad asintótica impone a la vez que la matriz de transición de estado y la respuesta al impulso verifiquen: $\lim_{\lambda\to\infty} \Phi(\lambda) = 0$ y $\lim_{\lambda\to\infty} h(\lambda) = 0$. Con lo cual, de la Ec. (2.23) para t_0 suficientemente alejado en el pasado cualquiera fuese su estado inicial el proceso $\nu(t)$ resulta ser:

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau) n_\nu(\tau) d\tau \\ E\{\nu(t)\} &= \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau) E\{n_\nu(\tau)\} d\tau = 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

La segunda expresión muestra que el proceso $\nu(t)$ es (asintóticamente) centrado. Del teorema fundamental enunciado en Papoulis (1991), pp 347 se tiene que las densidades espectrales de los procesos $\nu(t)$ y $n_\nu(t)$, respectivamente: $S_\nu(f)$ y $S_n(f) = q_\nu$, se relacionan a través de la $\mathcal{F}\{h(t)\} = H_\nu(j2\pi f) = H_\nu(j\omega)$ ($\omega = 2\pi f$) mediante:

$$S_\nu(f) = \|H_\nu(j\omega)\|^2 S_n(f) = q_\nu \|H_\nu(j\omega)\|^2 \tag{2.25}$$

Con lo cual, la función de autocorrelación de $\nu(t)$ (usando la (2.15)) resulta:

$$R_\nu(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_\nu(f)\} = q_\nu \mathcal{F}^{-1}\left\{\|H_\nu(j\omega)\|^2\right\} \tag{2.26}$$

Como es fácil comprobar, siempre que la función de transferencia $H_\nu(s)$ sea racional (cociente de polinomios en *s*), el cuadrado del modulo de $H_\nu(j\omega)$ es una función par de ω (o de *f*). Como ejemplo consideramos el proceso de la Fig. 2.17 para:

$$H_\nu(s) = \frac{1}{s+\alpha_\nu}; \quad \alpha_\nu > 0 \Rightarrow \dot{\nu} = -\alpha_\nu \nu + n_\nu(t) \tag{2.27}$$

excitado por el ruido blanco contínuo $n_\nu \sim (0, q_\nu \delta(t))$. La solución de la Ec. diferencial asociada a (2.27) se escribe como:

$$\nu(t) = e^{-\alpha_\nu (t-t_0)} \nu(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{-\alpha_\nu (t-\lambda)} n_\nu(\lambda) d\lambda \to \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_\nu (t-\lambda)} n_\nu(\lambda) d\lambda \tag{2.28}$$

Tomando valor esperado en la (2.28) se obtiene que el momento de primer orden cumple asintóticamente $\bar{\nu}(t) = E\{\nu(t)\} \to 0$. Su función de autocorrelación (también asintótica) se determina usando la segunda igualdad de las (2.26) para $\omega = 2\pi f$:

$$\begin{aligned} S_\nu(f) &= \|H_\nu(j\omega)\|^2 q_\nu = \frac{q_\nu}{\omega^2 + \alpha_\nu^2} \\ R_\nu(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{S_\nu(\omega/2\pi)\} = \frac{q_\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega\tau} d\omega}{\omega^2 + \alpha_\nu^2} = \frac{q_\nu T_\nu}{2} e^{-|\tau|/T_\nu} \end{aligned} \tag{2.29}$$

De donde surge que el proceso tiene función de autocorrelación de tipo exponencial caracterizada por dos parámetros: el tiempo de correlación $T_\nu = \alpha_\nu^{-1}$ y la DEP constante del ruido banco que lo excita: q_ν.

Ruido "browniano" *w*(*t*)

También llamado proceso de Wiener o caminata aleatoria, se define como la integral de un ruido blanco gaussiano a partir de un dado instante inicial t_o (ver Fig. 2.18). Su modelo matemático es similar al de la Ec. (2.22) con **A**=0 y condición inicial nula.

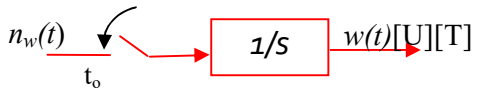


Figura 2.18.

Teniendo en cuenta que $n(t)$ es estacionario se toma t_o=0. En el caso escalar el ruido browniano es:

$$w(t) = \int_0^t n_w(\lambda)d\lambda \Rightarrow dw(t) = n_w(t)dt \tag{2.30}$$

Con lo cual, su valor medio y función de autocorrelación (momentos de 1er y 2º orden) resultan respectivamente:

$$\begin{aligned} &E\{w(t)\} = 0 \\ &R_w(t_1,t_2) = E\{w(t_1)w(t_2)\} = E\left\{\int_0^{t_1} n_w(\lambda)d\lambda \int_0^{t_2} n_w(\mu)d\mu\right\} = \\ &= \int_0^{t_1} d\lambda \int_0^{t_2} d\mu \underbrace{E\{n_w(\lambda)n_w(\mu)\}}_{q_w\delta(\lambda-\mu)} = q_w \min(t_1,t_2) \end{aligned} \tag{2.31}$$

De la última expresión surge claramente que $w(t)$ no es estacionario (R_w depende de ambos instantes de tiempo) y por lo tanto su DEP no está definida. A pesar de esto, es usual describirlo como caso límite de un proceso markoviano estacionario de autocorrelación exponencial cuando el tiempo de autocorrelación tiende a infinito. De este modo, haciendo $\alpha_v \to 0$ en la primera de las (2.29) se obtiene la siguiente expresión "limite" para su DEP:

$$S_w(f) = \frac{K^2}{(2\pi f)^2} \tag{2.32}$$

Veremos que esa expresión es usada para caracterizar procesos de muy baja frecuencia, llamados de tipo "$1/f^2$", parametrizados por el coeficiente $K = \sqrt{q_w}$.

Haciendo t_1=t_2 en (2.31), se obtiene el valor medio de la potencia instantánea de $w(t)$.

$$\sigma_w^2(t)[U]^2[T]^2 \triangleq R_w(t,t) = q_w t \tag{2.33}$$

Se advierte que σ_w^2 crece linealmente con el tiempo con pendiente igual a la DEP q_w del ruido blanco que lo genera.

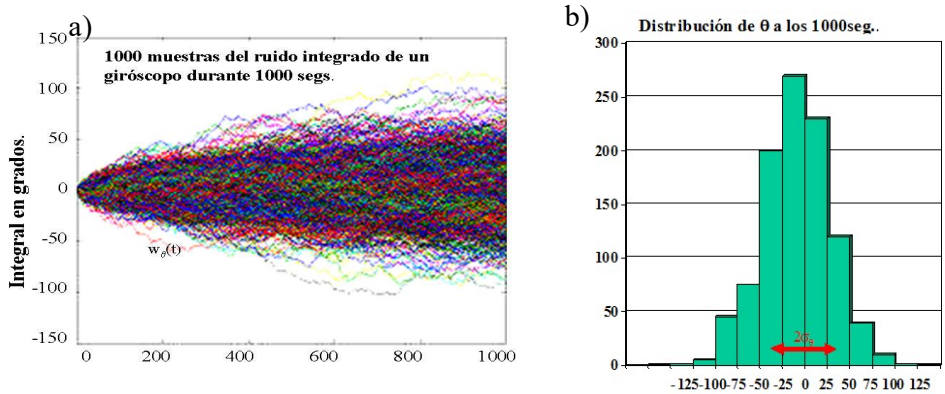


Figura 2.19: Ejemplo de ángulo browniano de un giróscopo.

La Fig. 2.19 demuestra un ejemplo del ruido browniano resultante de integrar la medida de la velocidad angular provista por un giróscopo en reposo. La DEP del ruido blanco en la velocidad angular es $q_\omega = 0.99^2[°/\text{seg}]^2/[\text{Hz}]$. El proceso de Wiener de salida es llamado *ángulo browniano* y se lo denota como ARW (por *angle random walk*). Su desvío estándar calculado a los 1000seg. es: $\sigma_\theta = \sqrt{q_\omega t}[°] = 31{,}3[°]$. La Fig. 2.19 a) muestra un conjunto de 1000 realizaciones de dicho proceso en el intervalo 0-1000 seg. Se advierte una dispersión de las curvas creciente con la raíz cuadrada del tiempo. La Fig. 2.19 b) despliega un diagrama de barras de las muestras en el instante *t*=1000seg en el que puede observarse su relación con el desvío estándar teórico de la muestra.

El proceso análogo al ARW en un acelerómetro es conocido como *velocidad browniana* y denotado VRW (por *velocity random walk*). Éste resulta de integrar un ruido blanco en la medida de la fuerza. Si $q_f[\text{m}/\text{seg}]^2/[\text{Hz}]$ es la DEP del ruido blanco, el desvío estándar del VRW en el tiempo t será: $\sigma_v = \sqrt{q_f t}[\text{m}]/[\text{seg}]$.

Como veremos en un próximo párrafo dedicado a la variancia de Allan, tiene interés considerar el promedio temporal de un ruido blanco sobre un intervalo arbitrario de longitud *T*. Se trata de una variable aleatoria, centrada, indexada por *T* (pero independiente de *t* por ser *n*(*t*) estacionario) cuyos dos primeros momentos se calculan mediante:

$$\overline{n}_T = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} n(\lambda)d\lambda \rightarrow E\{w(T)\} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} E\{n(\lambda)\}d\lambda = 0 \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} E\{\overline{n}_T^{\,2}\} &= \frac{1}{T^2}\int_t^{t+T}\int_t^{t+T} E\{n(\tau)n(\lambda)\}d\tau d\lambda \\ &= \frac{1}{T^2}\int_t^{t+T}\int_t^{t+T} R_n(\tau-\lambda)d\tau d\lambda = \frac{q_n}{T^2}\int_t^{t+T} d\lambda = \frac{q_n}{T} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Se advierte que, si bien para cualquier *T* la variancia de los promedios es finita, ésta tiende teóricamente a infinito a medida que el intervalo de promediado tiene a cero! Esto es una simple consecuencia de que *n*(*t*) tiene potencia infinita.

Inestabilidad del sesgo o ruido "1/*f*": *bi*(*t*)

La familia de procesos llamados evolutivos o fluctuaciones aleatorias (conocidos como "*flickering noise*" en inglés) no son representables por un modelo de estado de dimensión finita. Son, no obstante, descritos matemáticamente mediante su DEP del tipo $S_{bi}(f) \propto f^{-\gamma}; 1 \leq \gamma < 2$. Se trata de procesos no estacionarios, de memoria no acotada, que describen ciertas fluctuaciones lentas del sesgo de los instrumentos inerciales de particular relevancia en sensores ópticos o de tecnología MEMS. Su origen suele ser electrónico o electromecánico. Dado que la integral de $S_{bi}(f)$ sobre el todo el eje de frecuencias no resulta acotada, en teoría estos procesos tienen potencia instantánea infinita. La manera de evitar esta contradicción es postular la existencia de una frecuencia límite f_0 más allá de la cual la potencia del proceso es nula. Esto es además consistente con el hecho de que, en la práctica, a partir de cierta frecuencia estas fluctuaciones quedan enmascaradas por otros procesos con mayor potencia en alta frecuencia.

La caracterización más usual para el caso $\gamma = 1$ en términos de su DEP resulta ser:

$$S_{bi}(f) = \begin{cases} \dfrac{BI^2}{2\pi f}, & f \leq f_0 \\ 0 & , f > f_0 \end{cases} \tag{2.36}$$

Donde BI es llamado el coeficiente de "*inestabilidad del sesgo*" y está expresado en las mismas unidades de medida (es decir: [°/seg] ó [m/seg^2]).

Ruido de rampa *r*(*t*)

Modela derivas muy lentas del sesgo de la medida que se presentan sobre todo en giróscopos IFOG. La pendiente de la deriva es llamada coeficiente de rampa y se denota *R*. Para su análisis se le asocia la DEP (IEEE 647-2006):

$$S_r(f) = \frac{R^2}{(2\pi f)^3} \tag{2.37}$$

Tratándose de una variación tan lenta, más que un ruido es considerado muchas veces como un error paramétrico determinista. Este es el punto de vista adoptado en este volumen en el cual este proceso será visto como un sesgo lentamente variable.

2.6 Caracterización de los procesos en el ruido de medida

El ruido de medida se supone igual a la superposición de los procesos descritos anteriormente, es decir:

$$\xi(t) = n(t) + v(t) + w(t) + bi(t) + r(t) \tag{2.38}$$

El carácter "compuesto" de este ruido impone la necesidad de analizarlo según sus componentes. Así, la caracterización del ruido consiste, en primer lugar, en identificar dichas componentes y, en segundo, en determinar o estimar los parámetros que describen a cada proceso. Los métodos existentes se basan en dos hipótesis que se cumplen razonablemente bien en la práctica: H_1: los procesos involucrados son

estacionarios e independientes entre sí; H_2: sus respectivos espectros de potencia no se solapan sobre el eje de las frecuencias. En otros términos, cada proceso se manifiesta predominantemente sobre una banda de frecuencia que le es exclusiva.

En Quinchia et al. (2013), se expone un estudio comparativo de diversos métodos aplicables a la caracterización de las componentes del ruido de medida de una UMI. De ellos, el mas estandarizado y utilizado por la industria es el método de la variancia de Allan (*VA*) al que dedicamos los próximos párrafos.

2.6.1 Variancia y Desvío de Allan

La VA mide la variabilidad cuadrática media entre promedios de una misma señal tomados en intervalos de tiempo adyacentes de longitud uniforme *T* variando entre un valor mínimo (alta frecuencia) y un valor máximo (baja frecuencia). Llamando $\overline{x}_T(t)$ al promedio del proceso continuo $x(t)$ sobre un intervalo de longitud *T* con inicio en *t,* definimos el proceso de las diferencias (por hipótesis estacionario) parametrizadas por *T*: $\delta x_T(t) \triangleq \overline{x}_T(T+t) - \overline{x}_T(t)$. Bajo las hipótesis mencionadas anteriormente, la variancia $VA(T)$ y desvío $DA(T)$ de Allan de $x(t)$ se definen, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} VA(T) &\triangleq \frac{1}{2} E\{\delta x_T^2(t)\} \\ DA(T) &\triangleq \sqrt{VA(T)} \end{aligned} \tag{2.39}$$

En IEEE Std. 647-2006 se demuestra la siguiente importante relación entre la función *VA*(*T*) para un dado proceso *x*(*t*) y su DEP $S_x(f) = \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\}$:

$$VA(T) = 4\int_0^\infty S_x(f) \frac{sen^4(\pi f T)}{(\pi f T)^2} df \tag{2.40}$$

De acuerdo con la (2.25), la anterior establece que la *VA*(*T*) del proceso *x*(*t*) es proporcional a su potencia total luego de ser filtrado por un filtro parametrizado por *T*, cuyo módulo es:

$$\left\| H_T(j2\pi f) \right\| \triangleq \frac{sen^2(\pi f T)}{(\pi f T)} \tag{2.41}$$

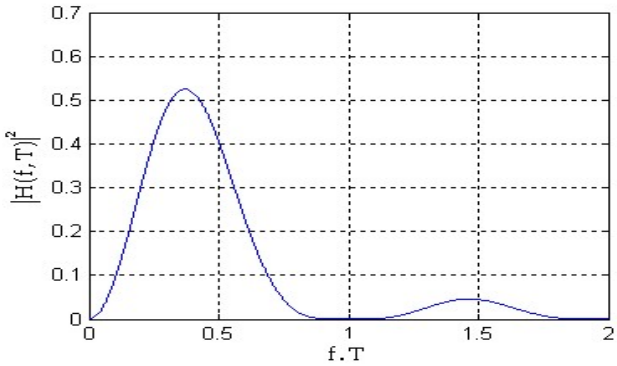


Figura 2.20: Perfil de $\|H_T(j2\pi f)\|$ en función del producto fT.

Como puede verse en la Fig. 2.20, $\|H_T(j2\pi f)\|$ tiene un máximo dominante en $f \sim 0.4/T$. Así, de acuerdo con las Ecs. (2.40) y (2.41), la VA puede ser vista como un filtro "pasabanda" centrado en una frecuencia que decrece con T. Esta propiedad, junto con la hipótesis H_2 y la expresión (2.38) hacen posible analizar el ruido según sus componentes y medir sus respectivas potencias mediante la VA.

Importa señalar que la variancia de Allan resulta finita (y por lo tanto es calculable) para la gran mayoría de los procesos estacionarios. En particular, a pesar de tener potencia infinita, los procesos blanco y $1/f$ (presentes en gran parte de las señales de ruido) tienen VA(T) finitas para todo T>0.

La presencia predominante en altas frecuencias del ruido blanco en la expresión (2.38) hace que para intervalos T crecientes, la potencia de los promedios del proceso ξ decrezca monótonamente con $1/T$ (ver Ec. (2.35)) junto con su VA. Sin embargo, la experiencia demuestra que el decaimiento de la gráfica de DA vs. T puede detenerse y aún revertirse a partir de un cierto intervalo $T=T_{\min}$ suficientemente largo. $T_{\min}$ puede ser muy grande, por lo cual, para detectarlo, podría requerirse que el horizonte del registro sea también de larga duración (24hs o más). El mínimo de DA ocurrirá en presencia de fluctuaciones muy lentas enmascaradas, hasta $T_{\min}$, por los promedios del ruido blanco dominante en alta frecuencia. A partir de $T_{\min}$ este ruido tendrá un efecto despreciable sobre el DA el cual, empezará a reflejar sólo las fluctuaciones lentas. Cuando el registro proviene de la salida de un instrumento (como en el caso de una UMI) estos procesos de muy baja frecuencia son llamados deriva del sesgo o "*bias instability"* en inglés, por lo cual se denota: $T_{\mathrm{BI}}=T_{\min}$.

Las derivas lentas del sesgo se suponen generadas esencialmente por dos tipos de procesos. El primero corresponde a fluctuaciones de baja frecuencia del tipo "$1/f$", llamado con propiedad "inestabilidad del sesgo" y asociado al "codo" en la grafica $DA(T)$ en T_{BI} (ver Fig. 2.22). El parámetro de la Ec. (2.36) que caracteriza a este proceso resulta precisamente de evaluar: $BI=DA(T_{BI})$. Más allá de $T=T_{\mathrm{BI}}$ la gráfica se mantendría constante de no mediar otras fluctuaciones de muy baja frecuencia. Las más prevalentes, conocidas como "*rate bias instability*", son modeladas como procesos brownianos con DEP del tipo $1/f^2$ (ver Eq. (2.32)) cuya DA es creciente con T (ver Ecs. (2.33)). En el caso de giróscopos, estas perturbaciones se denotan RRW (por *rate random walk*) y ARW (por *acceleration random walk*) cuando se trata de acelerómetros. Para intervalos T aún mayores, pueden aparecer perturbaciones cuasi-deterministas de ultra baja frecuencia caracterizadas por la DEP (2.37) que hemos llamado “ruido de rampa”.

Aplicando la expresión (2.40) a las DEP de los procesos que componen el ruido de medida de una UMI (Párrafo 2.5 y expresión (2.38)), se obtienen las expresiones teóricas de las respectivas $VA(T)$ (ver Tehrani (1983)). En el Apéndice C de IEEE Std. 647-2006, se presentan las expresiones analíticas y las gráficas de *DA(T)* para una lista muy completa de los procesos que perturban la medida de una UMI. En la 3ª columna de la Tabla 2.3 se consignan las expresiones de la VA para los procesos más usuales, junto con los coeficientes que los caracterizan. A partir de la gráfica $DA(T)$ del ruido,

medida empíricamente como veremos más adelante, es posible, por un lado, identificar el proceso dominante en cada banda de frecuencias (siempre que lo sea en alguna, de otro modo significaría que podría estar enmascarado por otros procesos y en tal caso no habría necesidad de tenerlo en cuenta) y por otro leer directamente sus parámetros característicos. Esto es particularmente simple para los procesos caracterizados por una pendiente uniforme p en escala doble logarítmica.

Proceso	**PSD -** $S(f)$	**Varianza de Allan -** $VA(T)$	**Comentarios**
ARW-(ruido blanco)	q_n	$VA_{ARW}(T)=\frac{q_n}{T}$	q_n: Coef. de ARW
BI – Inestabilidad en el sesgo	$\left(\frac{BI^2}{2\pi}\right)\frac{1}{f};\ f\le f_0$ $0\ ;\ f>f_0$	$VA_{BI}(T)=2BI^2(\ln 2-g(T))/\pi$ $T\gg 1/f_0;\ g(T)\to 0;$ $VA_{BI}(T)\to BI^2(2\ln 2/\pi)=0.44BI^2=cte.$	BI: Coeficiente f_0 : Frecuencia de corte.
RRW- ruido browniano	$\left(\frac{K}{2\pi}\right)^2\frac{1}{f^2}$	$VA_{RRW}(T)=\frac{K^2T}{3}$	K: Coeficiente de RRW
RM – Ruido Markoviano	$\frac{q_v}{\alpha_v^2+(2\pi f)^2}$	$VA_{RM}(T)=\frac{T_v^2q_v}{T}\left[1-T_v\frac{3-4e^{-\frac{T}{T_v}}+e^{-\frac{2T}{T_v}}}{2T}\right]$	q_v : PSD ruido blanco T_v : Tiempo de correl.
RR- Ruido de rampa	$\frac{R^2}{(2\pi f)^3}$	$VA_{RR}(T)=\frac{R^2T^2}{2}$	R: Coeficiente de RR

Tabla 2.3: DEP y VA para distintos procesos.

Consideremos como ejemplo el ruido blanco estacionario: $x(t)\equiv n(t)$, se tiene:

$$\delta n_T(t)=\overline{n}_T(T+t)-\overline{n}_T(t)=\frac{1}{T}\left(\int_{t+T}^{t+2T}n(\tau)d\tau-\int_{t}^{t+T}n(\lambda)d\lambda\right); \tag{2.42}$$

Con lo cual, usando la definición de ruido Browniano (2.30) y un cálculo similar a la Ec. (2.31), a partir de la (2.42) se obtiene su $DA(T)$ que explica la pendiente -1/2 que caracteriza a este ruido en la Fig. 2.21:

$$VA(T)\triangleq\frac{1}{2}E\{\delta n_T^2(t)\}=\frac{1}{T^2}E\{w^2(T)\}=\frac{q_n}{T}\to DA(T)=\sqrt{q_n}T^{-1/2} \tag{2.43}$$

Donde ahora se tuvo en cuenta que los promedios están tomados sobre intervalos que no se intersecan. Se advertirá de la anterior la motivación de incluir el factor 1/2 en la definición (2.39) que es precisamente para equiparar la variancia de Allan del ruido blanco a la variancia de sus promedios (2.35) tomados independientemente.

Nos detenemos en el DA de un proceso markoviano de 1º orden caracterizado por la DEP Ec. (2.29). A partir de la $VA(T)$ dada por la Tabla 2.3 y llamando $\tau=T/T_v$ al intervalo normalizado por el tiempo de correlación T_v escribimos:

$$\begin{aligned}&DA_v(\tau)=\sqrt{VA_v(\tau)}=\sqrt{q_vT_v}h(\tau)\\&h(\tau)\triangleq\frac{1}{\tau^{1/2}}\left[1-\frac{1}{2\tau}\left(3-4e^{-\tau}+e^{-2\tau}\right)\right]^{1/2}\end{aligned} \tag{2.44}$$

Como se muestra en la gráfica de la Fig. 2.21, $DA_v(\tau)$ posee un máximo en $\tau^* = 1.89$ de valor $DA_{\max} = DA_v(\tau^*) = 0.437\sqrt{q_v T_v}$. Las coordenadas del máximo caracterizan totalmente a este proceso.

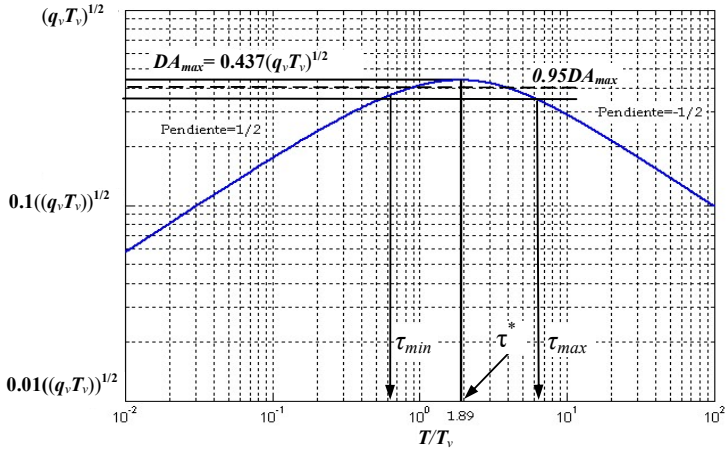


Figura 2.21: $DA_v(\tau)$ del ruido markoviano de 1º orden en escala doble logarítmica función del intervalo normalizado $\tau = T / T_v$.

Variancia de Allan a partir de una señal muestreada

Existe una extensa bibliografía sobre los detalles técnicos de la aplicación de este método a señales reales muestreadas. La norma IEEE Std. 647-2006 estandariza el uso de este método para caracterizar todos lo procesos potencialmente presentes en los ruidos de medida de una UMI.

Dado un registro $x(t_k)$ de muestras de una señal de ruido $x(t)$ tomadas a lo largo de un horizonte de tiempo H con un intervalo de muestreo $T_s = t_{k+1} - t_k$, consideramos los promedios en intervalos múltiplos enteros de T_s : $T=NT_s$, desde $T=T_s$ (alta frecuencia) al valor máximo posible: $T=H/2$ (más baja frecuencia presente en el registro). Normalmente, H es varios ordenes de magnitud superior T_s, típicamente $H/T_s \sim 10^5$. Al conjunto de datos dentro de un intervalo se lo llama "*cluster*" y a T intervalo de los clusters. A cada registro se le asocia la gráfica del desvío de Allan estimado $\widehat{DA}(T)$ definido de la siguiente manera:

1) Para intervalos $T=NT_s$ crecientes con $N = 1,...,H/2$ y llamando $\overline{n}(T) = H/T$, se construye:

i) la secuencia de promedios

$$\overline{x}_T(i) \triangleq \frac{1}{T}\sum_{k=(i-1)T}^{iT} x(t_k);\ i = 1,...,\overline{n}(T) \tag{2.45}$$

ii) la secuencia de las diferencias entre promedios:

$$\delta x_T(i) = \overline{x}_T(i) - \overline{x}_T(i-1) \tag{2.46}$$

2) A partir de las $\delta x_T(i)$ se establecen como estimadores de la variancia y el desvío de Allan, respectivamente, a las estadísticas:

$$\begin{aligned} \widehat{VA}(T) &\triangleq \frac{1}{2(\overline{n}(T)-1)} \sum_{i=1}^{\overline{n}(T)} \delta x_T^2(i); \\ \widehat{DA}(T) &\triangleq \sqrt{\widehat{VA}(T)} \end{aligned} \tag{2.47}$$

La Fig. 2.22 muestra, sobre una escala doble logarítmica, una gráfica típica del $\widehat{DA}(T)$ medido sobre un registro de la salida de un giróscopo hipotético en condición de reposo con período de muestreo de 0.01seg. Los ruidos ARW, BI, RRW y RR se manifiestan con pendientes constantes en diferentes regiones del eje *T*. Esto permite leer directamente de la gráfica los parámetros que caracterizan estos procesos. Por ejemplo, la inestabilidad del sesgo aparece como una curva plana con centro en T_{BI} y parámetro: $BI = DA(T_{BI})/0.66$. Los perfiles de ruidos con correlación exponencial (markovianos) presentan una resonancia cercana al valor del tiempo de correlación dominante (Fig. 2.21). Por esto (ver Marinsek, (2011), §4.5.5.1), sus efectos suelen manifestarse cercanos al tiempo de correlación $T \sim 2T_s$ impuesto por el filtro pre-muestreo (*antialias*) (ver extremo izquierdo de la curva en la Fig: 2.22) que normalmente es diseñado con un ancho de banda próximo a la mitad de la frecuencia de muestreo: $AB \approx 1/T_s$.

Marinsek (2011) desarrolla un procedimiento semi-automático mediante el cual, para un dado registro de ruido, calcula primeramente su *DA*(*T*) y a partir de éste identifica y caracteriza los distintos procesos presentes. El SW*, fue aplicado en su tesis de ingeniero para caracterizar y comparar la performance de varias unidades inerciales comerciales.

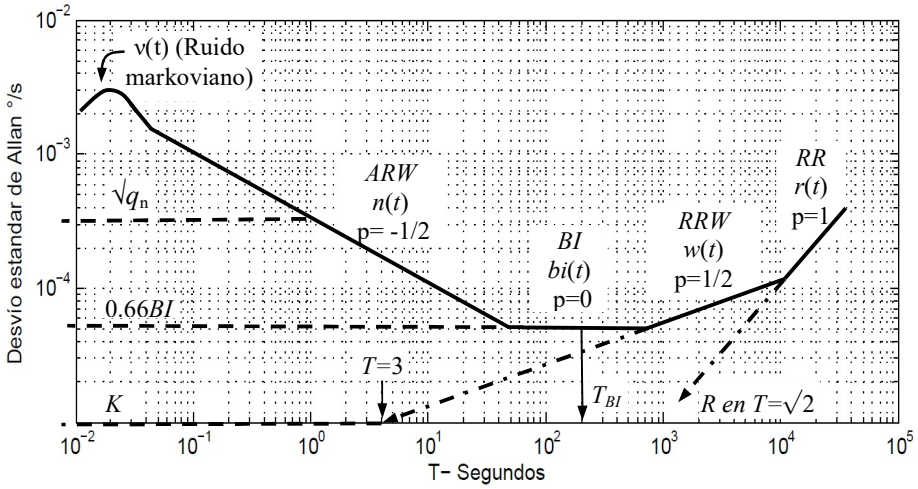


Figura 2.22: Esquema de gráfica típica *DA* vs. T para un registro de 24hs.

*Cuyo código abierto esta disponible en: http://psic.fi.uba.ar/index.php/publication/theses

Para un dado *H*, los estimadores $\widehat{DA}(T)$ y $\widehat{VA}(T)$ se calculan con un número de clusters ($\overline{n}(T) = H / T$) que decrece con *T*. Es natural esperar entonces que la confianza estadística decrezca también con *T*. Existen diversos métodos para determinar un intervalo de confianza del estimador $\widehat{DA}(T)$. El más simple y más usado se basa en la siguiente definición del error relativo del estimador de $\widehat{DA}(T)$:

$$\delta_{DA}(T) \triangleq \frac{\widehat{DA}(T) - DA(T)}{DA(T)} \tag{2.48}$$

Como en sí mismo es una variable aleatoria (función de la realización particular del ruido del registro de la señal), lo que se usa es una estimación (más o menos gruesa) de su desvío estándar que tiene el interés de ser independiente de los procesos presentes (ver IEEE Std. 647-2006, Ap. C):

$$\sigma(\delta_{DA}(T)) = \frac{1}{\sqrt{2\left(H / T - 1\right)}} \tag{2.49}$$

En base a la anterior el intervalo de confianza del 66% para el intervalo *T* se establece como:

$$\widehat{DA}(T)(1 \pm \sigma(\delta_{DA}(T)) \tag{2.50}$$

Sustituyendo valores en las dos ecuaciones anteriores se obtiene, por ejemplo, que el DA de un proceso que se manifieste con intervalos de *T*=10hs podría medirse con un error relativo del 25% con un grado de confianza del 66% siempre que se disponga de un horizonte de medidas H=90hs. Esto demuestra lo impreciso y complejo que resulta en la práctica medir las fluctuaciones de baja muy frecuencia.

La Fig. 2.23 demuestra el rápido crecimiento, para *T* medios y grandes, de la dispersión entre las gráficas del DA adquiridas para distintas realizaciones de registros de 12hs de un mismo giróscopo en reposo de una UMI FalconMx.

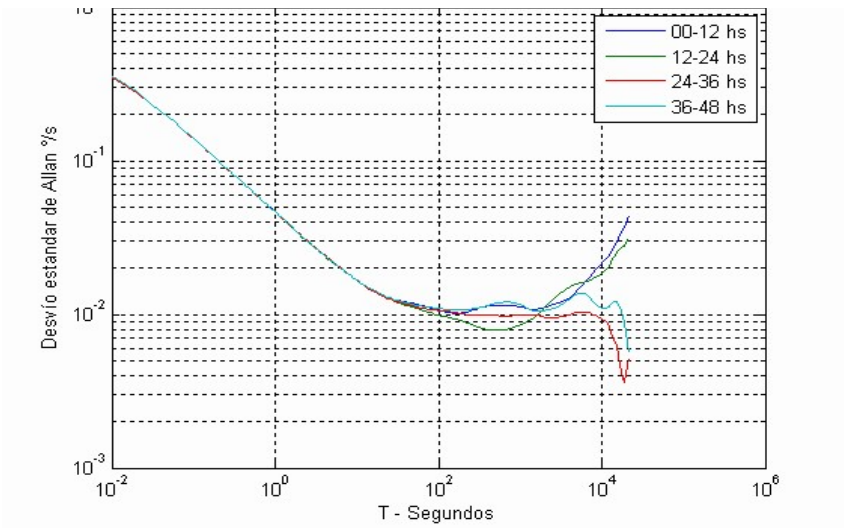


Figura 2.23: *DA* para varios registros de 12hs de un giróscopo de la unidad FalconMx (extraído de Marinsek, (2011) donde se caracteriza totalmente esta unidad).

2.7 Modelo markoviano unificado del ruido de medida

Difícilmente se pueda exagerar la importancia de la formulación markoviana de las perturbaciones estocásticas en la teoría de la estimación. La razón es que la markovianidad es necesaria para una estimación recursiva del estado. Este tema será tratado en detalle en el Capítulo 10.

En la práctica, no basta con que las perturbaciones respondan a un modelo markoviano, se requiere además, que éste último sea de dimensión finita. Esta condición estará asegurada toda vez que la DEP de la perturbación sea una función racional par de f (o de ω). En efecto, un razonamiento inverso al usado para la Ec. (2.26) y en el párrafo subsiguiente, permite demostrar que, en tal caso, existirá una función de transferencia racional $H(s)$ (ver Fig. 2.17), con una representación de estado lineal de dimensión finita como la (2.22), tal que excitada por un ruido blanco a la entrada producirá una salida con la DEP deseada (al menos asintóticamente). La función de transferencia en cuestión (ver Fig. 2.17) es la que satisface (ver Papoulis, (1991)):

$$H(j2\pi f)H(j2\pi f)^* = S(f) \tag{2.51}$$

Como ejemplos tenemos las funciones de transferencia que excitadas con ruido unitario generan: a) Un ruido blanco con DEP (2.17)$\Rightarrow H_n(s;q_n) = \sqrt{q_n}$, b) Un ruido Browniano con DEP (2.32)$\Rightarrow H_w(s;K) = K/s$ y c) Un ruido Markoviano con DEP. (2.29) $\Rightarrow$

$$H_v(s;q_v,T_v) = \frac{T_v\sqrt{q_v}}{1+T_v s} \tag{2.52}$$

La DEP de algunos procesos, como la inestabilidad del sesgo ($bi(t)$, Ec. (2.36)) o el ruido de rampa ($r(t)$, Ec. (2.37), son funciones racionales pero impares de f. Por esta razón admiten modelos markovianos lineales pero sólo a parámetros distribuidos, es decir, de dimensión infinita*.

En la práctica se recurre entonces a aproximar la DEP de estos procesos mediante expresiones racionales pares en f, a partir de las cuales, usando la igualdad (2.51), se obtienen las correspondientes funciones de transferencias que caracterizan a los procesos markovianos aproximantes. Por las razones expuestas al final del Párrafo 2.5.1, no nos referiremos al ruido $r(t)$, si en cambio a $bi(t)$ presente en gran parte de los sensores comerciales de tipo MEMS además de manifestarse en un zona de intervalos T para la cual la incerteza de la medida del $DA(T)$ es aún relativamente baja.

Describiremos un procedimiento sencillo para hallar una función de transferencia $H_{bi}(s;q_b,T_b)$ como la (2.52) con la cual aproximar la DEP del proceso $bi(t)$ previamente caracterizado por su grafica $DA(T)$. Elegimos primeramente un segmento $[T_{min},T_{max}]$ que contenga la zona plana de la Fig. 2.22 y llamamos $T_{BI} = \sqrt{T_{\min}T_{\max}}$ al centro geométrico de la misma. De la grafica del $DA_v(\tau)$ markoviano de la Fig. 2.21 extraemos τ^* y definimos el intervalo $[\tau_{min},\tau_{max}]=[T_{min}/\tau^*,T_{max}/\tau^*]$ con centro geométrico en $T_b=T_{BI}/\tau^*$.

* Junto con una interesante descripción del ruido $1/f$, Keshner, (1982) demuestra que la salida del modelo a parámetros distribuidos de una línea de transmisión excitado con ruido blanco es un proceso del tipo $1/f$.

Tomando el valor medio de la imagen de ese intervalo sobre el eje de ordenadas, que llamamos ηDA_{max} con η~1, imponemos (ver Fig. 2.22): $0.66BI = \eta DA_{\max}$. Usando ahora $DA_{\max} = 0.437(q_b T_b)^{1/2}$ de la 2ª col. Tabla 2.3 proponemos finalmente los siguinets parámetros para sintetizar la función de transferencia aproximante de la forma (2.52):

$$\begin{aligned} T_b &= \frac{1}{1.89} T_{BI}; \\ q_b &\approx \frac{1}{T_b}\left(\frac{0.66BI}{0.437\eta}\right)^2 = \frac{1.89}{T_{BI}}\left(\frac{0.66BI}{0.437\eta}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.53}$$

El resultado es que la aproximación cubre la zona plana de la Fig. 2.22, en tanto que el decaimiento monótono y simétrico de $DA_v(\tau)$ respecto de le cumbre en τ^* hace despreciables sus efectos para T alejados de T_{BI}.

Para el caso del ejemplo de la Fig. 2.23, se consideró la década en $T \in [60, 600]$ con lo cual resultó $T_{BI} \approx 190\text{seg}$, $T_b \approx 100\text{seg}$ y $\eta \approx 0.95$ con un error relativo máximo para DA en ese intervalo del 5%. Tomando de la Fig. 2.23 el valor $0.66BI \approx 0.01$, a partir de las (2.53) se obtiene finalmente la DEP del ruido de excitación: $q_b \approx 5.7 \times 10^6 [^{\circ}/seg]^2$.

Como se dijo, el ruido de medida de un sensor inercial es la superposición de los procesos estocásticos supuestos independientes entre sí: $\xi(t) = n(t) + w(t) + bi(t) + \nu(t)$. Salvo el ruido blanco, es posible afirmar que cada uno de estos procesos admite una representación markoviana, al menos aproximada .

Finalmente el modelo markoviano del ruido ξ de un sensor de una unidad inercial resulta dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= n_w && ;\ n_w \sim N(0, \delta(t) q_w) \\ \dot{bi} &= -T_b^{-1} bi + n_b && ;\ n_b \sim N(0, \delta(t) q_b) \\ \dot{\nu} &= -T_\nu^{-1} \nu + n_\nu && ;\ n_\nu \sim N(0, \delta(t) q_\nu) \\ \xi &= w + bi + \nu + n_n && ;\ n_n \sim N(0, \delta(t) q_n) \end{aligned} \tag{2.54}$$

Donde n_w, n_b, n_ν, n_n son ruidos blancos independientes, q_b, T_b surgen de la aproximación markoviana de $bi(t)$, en tanto que $q_w = K^2$ y q_n están consignados en la Tabla 2.3. Para $\xi = \Gamma\zeta + n_n$, en términos de la (2.22), las (2.54) se escriben matricialmente estableciendo:

$$\begin{aligned} &\zeta = \begin{bmatrix} w \\ bi \\ \nu \end{bmatrix}; Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & T_\nu^{-1} \end{bmatrix}; \mathbf{n}_\zeta = \begin{bmatrix} n_w \\ n_b \\ n_\nu \end{bmatrix} \\ &\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{Q}_\zeta = diag(q_w, q_b, q_\nu); \end{aligned} \tag{2.55}$$

Cada componente del ruido vectorial $\boldsymbol{\xi}_m \in \mathbb{R}^6$ en la Ec. (2.11) tiene un modelo markoviano como las (2.54) caracterizable mediante los métodos expuestos en este

párrafo. Como el lector advertirá, es posible agregar los vectores de estado de cada uno de ellos en un vector $\boldsymbol{\zeta}$ y representar al ruido $\boldsymbol{\xi}_\mu$, a partir de un dado instante t_0, mediante un modelo markoviano de estado tal como:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= Z\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{n}_\zeta; \quad \mathbf{n}_\zeta \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_\zeta); \; \boldsymbol{\zeta}(t_0) \sim v.a.(0, \mathbf{P}_\zeta) \\ \boldsymbol{\xi}_\mu &= \Gamma\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{n}_\xi; \; \mathbf{n}_\xi \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_\xi) \end{aligned} \tag{2.56}$$

Donde: $\mathbf{n}_\xi \sim (0, \delta(t)\mathbf{Q}_\xi)$ y $\mathbf{n}_\mathbf{v} \sim (0, \delta(t)\mathbf{Q}_n)$ son ruidos blancos continuos diagonales, mientras que $\mathbf{P}_\zeta$ es la matriz de covariancia del estado inicial.

2.8 Performance y categorías de instrumentos inerciales

Las Ecs. (2.56) completan el modelo de la UMI representado por las Ecs. (2.13). Fijada a estructura del modelo, las incertezas del mismo se suponen concentradas en el desconocimiento de los parámetros de su parte determinista $\mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{p}_i)$ y en las estadísticas de los procesos que componen el ruido $\boldsymbol{\xi}_\mu$.

Los valores nominales de las componentes de $\mathbf{p}_i$ pueden encontrarse en las hojas de datos provistas por el fabricante posiblemente acompañada de su dispersión poblacional. Cuando la precisión sea importante para la aplicación, estos parámetros deberán sin embargo determinarse unidad por unidad en un laboratorio de ensayos siguiendo protocolos estandarizados llamados de calibración tales como los que establece la norma IEEE (Std. 1554, (2005)).

Sin embargo, la respuesta de una UMI suele no obedecer en forma sistemática a un modelo matemático con parámetros fijos, hecho que, casi por definición, es mucho más acentuado en instrumentos de baja calidad (y bajo costo). Tanto en el laboratorio como en la navegación lo que importa es la *estabilidad* y *repetibilidad* de los parámetros. La primera esta referida a su variabilidad a lo largo del ensayo o de la navegación y la segunda, a cambios entre encendidos consecutivos de la unidad. Así, la incertidumbre paramétrica queda determinada, por un lado, por la calidad de la instalación experimental y de los procedimientos usados en el laboratorio de ensayo y, por otro, por la calidad del instrumento reflejada en su inestabilidad paramétrica posiblemente provocada por variaciones térmicas, envejecimiento, el estado instantáneo de movimiento (aceleración y velocidad angular) u otros efectos no modelables.

Como se verá en el Capítulo 10 y fuera explicado en el Capítulo 1, en navegación integrada la calibración y la estimación del estado cinemático forman parte del mismo proceso de estimación de las incertidumbres presentes. Para esto, los filtros de fusión de datos deben tener en cuenta la inestabilidad paramétrica cosa que se realiza modelando los parámetros no como constantes sino como procesos brownianos perturbados por ruidos de potencia tanto más grande cuanto peor sea la calidad del instrumento. Como se analiza en Carrizo y otros (2014), esto tiene fuertes implicancias sobre la estimabilidad (reconstructiblidad estocástica) tanto de los parámetros como del estado cinemático.

Para asegurar la calidad de la navegación, estas deficiencias de estimabilidad pueden requerir agregar instrumentos de navegación a bordo que provean nueva información correlacionada con el estado cinemático (ver, por ejemplo, Castillo y otros (2013) y Castillo (2012)).

Los parámetros más usados para calificar la performance de una UMI son:

- Rango dinámico de cada instrumento
- No-linealidad del factor de escala en % del rango
- Ancho de banda AB[Hz]
- Sensibilidades del sesgo y del factor de escala con la temperatura
- Sensibilidades del sesgo y del factor de escala con la aceleración
- Aceleración de sobre vida al choque en [g]
- Inestabilidad del factor de escala
- Desconocimiento en la alineación
- Inestabilidad del sesgo
- Ruido blanco continuo
- Resolución

La inestabilidad del sesgo (*rate/acceleration bias instability* en ingles) es expresada para los giróscopos en [º/hr] o en [º/seg] y para los acelerómetros en [mg] o [μg], según sea el nivel de calidad.

La potencia del ruido blanco continuo (*rate white noise o acceleration white noise),* se especifica mediante su DEP. También denominado ARW (*angle random walk)* o VRW (*velocity random walk*) según se trate de giróscopos o de acelerómetros y expresado según las siguientes formas equivalentes:

$$\text{DEP}\rightarrow\text{ARW: } 1[°/\text{seg}]/\sqrt{\text{Hz}}=1[°/\sqrt{\text{seg}}] = 60[°/\sqrt{\text{hr}}],$$

$$\text{DEP}\rightarrow\text{VRW: } 1[\text{g}]/\sqrt{\text{Hz}}=9{,}8[\text{m/seg}]/[\sqrt{\text{seg}}] = 588[\text{m/s}]/\sqrt{\text{hr}}].$$

La resolución está ligada a la potencia del ruido blanco y al ancho de banda AB del instrumento lo que conduce a las siguientes relaciones entre la resolución y el ARW o el VRW:

Resolución del giróscopo [°/seg](rms)=

$$=\{\text{DEP}[°/\text{seg}]^2/[\text{Hz}]*\text{AB}[\text{Hz}]\}^{1/2}=\text{ARW}([°/\text{seg}]/\sqrt{[\text{Hz}]})*\sqrt{\text{AB}[\text{Hz}]}$$

Resolución del acelerómetro [g](rms)=

$$=\{\text{DEP}[\text{g}]^2/[\text{Hz}]*\text{AB}[\text{Hz}]\}^{1/2}=\text{VRW}([\text{g}]/\sqrt{[\text{Hz}]})*\sqrt{\text{AB}[\text{Hz}]}$$

Los instrumentos inerciales se clasifican según su calidad según las siguientes clases:

- Calidad “Navegación”: Horas de navegación sin ayuda.
- Calidad “Aviación”: Pueden alcanzan calidad navegación con ayuda externa
- Calidad “Táctico”: Navegación sin ayuda en segundos o pocos min. Pueden alcanzar calidad navegación con ayuda externa.
- Calidad “Regular (o rate grade)”: Sólo útiles con ayuda externa.

En particular para los giróscopos se considera además un nivel de calidad llamada *de aviación*. Las Tablas 2.4 y 2.5 indican los rangos de performance usuales establecidos para estas denominaciones así como las tecnologías más usadas al presente.

Parámetro/calidad	***Rate grade MEMS***	***Tácticos MEMS IFOG***	***Aviación RLG IFOG***	***Navegación RLG IFOG***
ARW [°/√h]	>0,5	0,5-0,05	<0.05	<0,001
Inestab. sesgo [°/h]	>10	1-10	<0.1	<0,01 (1nm/hr)
Inestabilidad del f.e. %	0,1-1	0,01-0,1	<0.01	<0,001
Rango dinám. [°/seg]	50-1000	>500	50-300	>400
Ancho de Banda [Hz]	>70	~500	~100	100-500
Costo UMI $US	500-5K	5K-20K	20K-50K	50-100K

Tabla 2.4: Categorías de Giróscopos.

Parámetro/Calidad	***Regular MEMS***	***Tácticos***	***Navegación***
Vel. browniana (VRW) [g/√h]	0.5-5mg/√Hz (airbag)	50-500 [mg/ √Hz]	<10 [μg/ √Hz]
Inestabilidad del sesgo [g]	10-100[mg]	0.2-1[mg]	10-100 μg
Inestabilidad factor escala %.	>1%	100-1000 ppm	<100ppm
Rango dinámico [g]	2-50 (airbag)	>50	2-50
Ancho de Banda [Hz]	DC-400	50-300	50-300

Tabla 2.5: Categorías de Acelerómetros.

Capítulo 3
Cinemática de la Orientación

Al igual que su posición, la orientación de un cuerpo en el espacio es relativa al sistema de referencia elegido. Los sistemas de referencias considerados en navegación son bases ortonormales, o sea, ternas de vectores de módulo unitario (versores) mutuamente ortogonales en el espacio euclidiano de dimensión 3: $\mathbb{E}^3$. Dadas tres direcciones ortogonales o ejes en el espacio $\mathbb{E}^3$ subsiste la ambigüedad de decidir el sentido del versor que "orienta" a cada eje. Existen sólo dos maneras de asignar "flechas" a estos ejes sin que una asignación pueda obtenerse a partir de la otra mediante alguna rotación de los tres ejes en su conjunto. A cada una de estas maneras las llamamos "*orientación de la terna*" y por definición llamaremos a una *positiva* y a la otra *negativa*. Aunque definiremos más precisamente este concepto, la orientación positiva suele llamarse "de la mano derecha" por que corresponde a cerrar el primer versor sobre el segundo como los dedos sobre la palma de la mano derecha mientras que el pulgar de la misma mano indica la dirección del tercer versor. Para evitar ambigüedades, por convención se adopta entonces la orientación positiva para las ternas de referencia.

Un objetivo primordial de la navegación consiste en conocer en todo instante tanto la orientación del vehículo respecto de las diversas ternas de referencia relevantes para la aplicación en curso, cuanto, las transformaciones de coordenadas que vinculan a dichas ternas. Para describir y caracterizar matemáticamente la orientación relativa entre ternas se utilizan ciertos conjuntos de parámetros, llamados *parametrizaciones,* cuyos valores numéricos son actualizados permanentemente por el algoritmo de navegación. En este Capítulo se introducen las parametrizaciones de la orientación de un cuerpo más usadas en la práctica.

3.1 Parametrizaciones de la orientación de un cuerpo en el espacio

La Fig. 3.1 muestra dos ternas de vectores ortonormales de orientación positiva donde una de ellas $\{\mathbf{a}\}$ es considerada la de referencia y la otra $\{\mathbf{b}\}$ la de un cuerpo rígido dado. La condición de orientación positiva es equivalente a decir que el producto triple de sus componentes satisface:

$$\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = 1; \quad \mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) = 1 \tag{3.1}$$

Los ejes de la terna $\{\mathbf{b}\}$ apuntan normalmente según direcciones del cuerpo de interés para la aplicación. Por ejemplo, en un vehículo el eje x suele estar en el eje longitudinal, cercano a la dirección del desplazamiento y los otros dos en un plano ortogonal con uno de ellos paralelo a la vertical en condiciones nominales de movimiento. Se supondrá que la terna $\{\mathbf{b}\}$ se obtiene trasladando la terna $\{\mathbf{a}\}$ paralela a sí misma al centro de coordenadas de la terna $\{\mathbf{b}\}$ (punto $\mathbf{p}$ de la localización del cuerpo) y aplicándole una rotación continua arbitraria en un intervalo de tiempo $[t_o,t)$ tal que $\{\mathbf{b}(t_o)\}\equiv\{\mathbf{a}\}$.

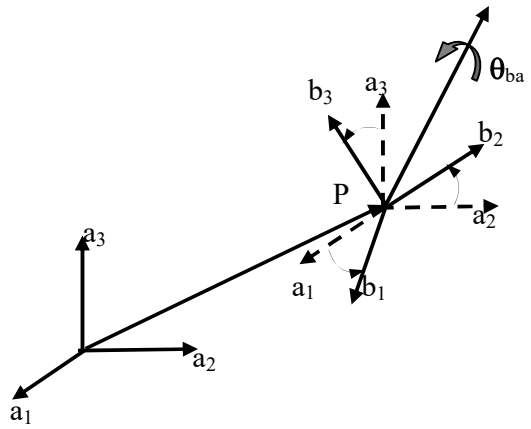


Figura 3.1: Orientación relativa de dos ternas en el espacio

Interesa definir un conjunto de parámetros que caractericen la orientación* de cualquier terna {**b**} respecto de otra {**a**}. Las parametrizaciones más usuales de la orientación de un cuerpo son:

- La matriz de cosenos directores (MCD).
- El eje y el ángulo de Euler.
- Los ángulos de Euler.
- Los parámetros simétricos de Euler o cuaterniones.

El propósito de este Capítulo es introducir dichas parametrizaciones junto con las ecuaciones cinemáticas que describen su variación con el tiempo. No es de extrañar que estas parametrizaciones estén íntimamente relacionadas con un clásico teorema de Euler (1707-1783) sobre las rotaciones de un cuerpo con un punto fijo en el espacio. Por esta razón, previo a introducir las parametrizaciones de la orientación, estudiaremos las rotaciones arbitrarias alrededor de un punto, lo cual nos conducirá a formular el mencionado teorema de Euler.

3.2 Rotaciones en $\mathbb{E}^3$

El vector velocidad lineal instantánea $\mathbf{v}(t)\in\mathbb{E}^3$ de un punto $\mathbf{p}\in\mathbb{E}^3$ en rotación alrededor de un eje, posiblemente variante en el tiempo, que contiene al origen de coordenadas **O**, fijo en el espacio euclidiano $\mathbb{E}^3$, está dada por el producto vectorial:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{p}(t) \tag{3.2}$$

Donde el vector $\boldsymbol{\omega}(t)\in\mathbb{E}^3$ tiene la dirección del eje de rotación y la magnitud de la velocidad angular instantáneos (ver Fig. 3.2). Denotando $\mathbf{x}^a$ al elemento de $\mathbb{R}^3$ constituido por las coordenadas del vector $\mathbf{x}\in\mathbb{E}^3$ respecto de una dada terna ortonormal

* En ingles "attitude" dio lugar al anglisismo "actitud", usual en la jerga técnica en nuestro idioma.

positiva {**a**} centrada en el origen **O**, la Ec. de rotación (3.2) se expresa en coordenadas de la terna {**a**} como:

$$\dot{\mathbf{p}}^a(t) = \boldsymbol{\omega}^a(t) \times \mathbf{p}^a(t) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^a(t))\mathbf{p}^a(t); \;\; \mathbf{p}^a(t_0) = \mathbf{p}_0^a \tag{3.3}$$

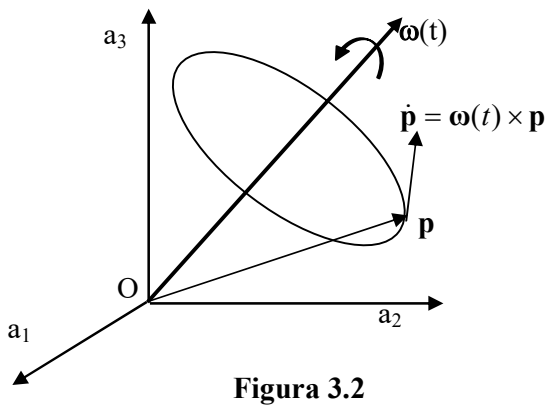


Figura 3.2

en la cual $\dot{\mathbf{p}}^a$, $\mathbf{p}^a(t)$, $\boldsymbol{\omega}^a(t)$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ y se introdujo el operador matricial del producto-vectorial ($\boldsymbol{\omega}^a \times$) expresado mediante la matriz anti-simétrica:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^a) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3^a & \omega_2^a \\ \omega_3^a & 0 & -\omega_1^a \\ -\omega_2^a & \omega_1^a & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})^a = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^a)\mathbf{p}^a; \; \forall \boldsymbol{\omega}^a, \mathbf{p}^a \in \mathbb{R}^3; \forall \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p} \in \mathbb{E}^3 \tag{3.4}$$

La siguiente propiedad del operador $\mathbf{S}(\cdot)$ puede probarse por simple sustitución y será de utilidad en el resto de este libro: Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ cualesquiera, entonces:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{S}(\mathbf{v}) - \mathbf{S}(\mathbf{v})\mathbf{S}(\mathbf{u}) \tag{3.5}$$

La solución de una ecuación diferencial lineal variante en el tiempo como la (3.3) se obtiene mediante la matriz de transición de estado (o matriz fundamental) $\mathbf{C}^a(t,t_0)$ como sigue (ver por ejemplo Zadeh/Desoer, 1963):

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}^a(t) = \mathbf{C}^a(t,t_0)\mathbf{p}^a(t_0); \\ &\dot{\mathbf{C}}^a(t,t_0) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^a(t))\mathbf{C}^a(t,t_0); \; \mathbf{C}^a(t_0,t_0) = I \end{aligned} \tag{3.6}$$

Las Ecs. de rotación (3.6) describen la evolución temporal a partir de t_0 de las coordenadas del punto móvil **p** respecto de la terna fija **{a}**, cuando **p** es sometido a una rotación caracterizada por el vector velocidad angular instantáneo $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Enunciamos dos propiedades importantes de la solución matricial $\mathbf{C}^a(t,t_0)$ de la (3.6) denominada en este contexto matriz de rotación.

Propiedad 1:

Para todo t y t_0, la matriz de rotación a coeficientes reales $\mathbf{C}^a(t,t_0)$ solución de (3.6) es:

$$i)\ \text{Ortogonal (unitaria)}: \ \mathbf{C}^a(t,t_0)^T\mathbf{C}^a(t,t_0) = I \tag{3.7}$$

$$ii)\ \text{Propia}: \ \mathbf{c}_1(t)\cdot(\mathbf{c}_2(t)\times\mathbf{c}_3(t)) = \det(\mathbf{C}^a(t,t_0)) = +1 \tag{3.8}$$

Donde $\mathbf{c}_1(t),\mathbf{c}_2(t),\mathbf{c}_3(t)$ representan las columnas de $\mathbf{C}^a(t,t_0)$.

<u>Demostración:</u> Usamos primeramente (3.6) y la definición (3.4) para obtener:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{C}^a(t,t_0)^T\mathbf{C}^a(t,t_0) &= \mathbf{C}^a(t,t_0)^T\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^a(t))^T\mathbf{C}^a(t,t_0)+\mathbf{C}^a(t,t_0)^T\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^a(t))\mathbf{C}^a(t,t_0)\\ &= \mathbf{C}^a(t,t_0)^T(\mathbf{S}(-\boldsymbol{\omega}^a(t))+\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^a(t))\mathbf{C}^a(t,t_0) = 0\end{aligned}$$

De la anterior surge que: $\mathbf{C}^a(t,t_0)^T\mathbf{C}^a(t,t_0) = \text{constante} = \mathbf{C}^a(t_0,t_0)^T\mathbf{C}^a(t_0,t_0) = I;\ \forall t$ lo que prueba *i*). Usando ahora la propiedad del determinante de un producto de matrices y la ortogonalidad de $\mathbf{C}^a(t,t_0)$ (Ec. (3.7)) se tiene:

$$\det(\mathbf{C}^a(t,t_0)^T\mathbf{C}^a(t,t_0)) = \left(\det(\mathbf{C}^a(t,t_0))\right)^2 = 1 \Rightarrow \det(\mathbf{C}^a(t,t_0)) = \pm 1\forall t \tag{3.9}$$

Por la continuidad de la solución de la ecuación diferencial (3.6) respecto de sus condiciones iniciales y de la función determinante, dado que $\det(\mathbf{C}^a(t_0,t_0)) = 1$, sólo puede ser $\det(\mathbf{C}^a(t,t_0)) = 1,\ \forall t \geq t_0$. Teniendo en cuenta que la primera igualdad de (3.8) surge de la definición de determinante, esto prueba finalmente *ii*).

■

Como consecuencia de (3.7), $\mathbf{C}^a(t,t_0)$ preserva el producto escalar y en particular la norma del vector inicial $\|\mathbf{p}^a(t_0)\|$. En efecto, sean $\mathbf{p}^a(t)$ y $\mathbf{q}^a(t)$ dos soluciones de las Ecs. (3.6) con condiciones iniciales, respectivamente, $\mathbf{p}^a(t_0)$ y $\mathbf{q}^a(t_0)$, entonces: $\mathbf{p}^a(t)^T\mathbf{q}^a(t) = \mathbf{p}^a(t_0)^T\mathbf{C}^a(t,t_0)^T\mathbf{C}^a(t,t_0)\mathbf{q}^a(t_0) = \mathbf{p}^a(t_0)^T\mathbf{q}^a(t_0),\ \forall t$.

Como $\det(\mathbf{C}^a(t,t_0)) = 1,\ \forall t \geq t_0$ la matriz $\mathbf{C}^a(t,t_0) \in \mathbb{R}^{3x3}$ no tiene valores propios nulos, por lo tanto, si $(\lambda(t),\mathbf{u}(t))$ es un par *valor/vector propios* posiblemente complejos de $\mathbf{C}^a(t,t_0)$, entonces de (3.7) se tiene que:

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}^a(t,t_0)\mathbf{u}(t) = \lambda(t)\mathbf{u}(t) \Rightarrow\\ &\left\|\mathbf{C}^a(t,t_0)\mathbf{u}(t)\right\|^2 = \|\mathbf{u}(t)\|^2 = |\lambda(t)|^2\|\mathbf{u}(t)\|^2 \Rightarrow |\lambda(t)| = 1;\forall t\end{aligned} \tag{3.10}$$

Como además sus valores propios cumplen que $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(\mathbf{C}^a(t,t_0)) = 1$, siendo $\mathbf{C}^a(t,t_0)$ real, por (3.10), al menos uno de ellos debe ser: $\lambda_1(t) = 1$ y los otros tales que $\lambda_2(t) = \overline{\lambda}_3(t)$ con $|\lambda_2(t)| = |\lambda_3(t)| = 1$ (esto incluye el caso $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda_3(t) = 1$

correspondiente a la "no rotación" $\mathbf{C}^a(t,t_0)=I$, lo que ocurriría, por ejemplo, si $\boldsymbol{\omega}(t)\equiv 0$). La existencia de al menos un valor propio unitario de $\mathbf{C}^a(t,t_0)$ permite enunciar la:

Propiedad 2:
Toda matriz de rotación solución de la ecuación de rotación (3.6), admite en cada instante *t* un eje invariante $\breve{\boldsymbol{\theta}}(t)$ * tal que †:

$$\breve{\boldsymbol{\theta}}(t)=\mathbf{C}^a(t,t_0)\breve{\boldsymbol{\theta}}(t) \tag{3.11}$$

■

3.3 Matriz de cosenos directores (MCD)

Consideremos dos ternas ortonormales y propias {**a**} y {**b**} que comparten el mismo origen **O** en todo *t* (ver Fig. 3.3).

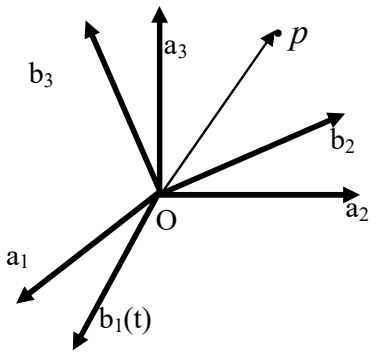


Figura 3.3: Rotación de una terna {b} respecto de una terna fija {a}.

Sea un vector fijo $\mathbf{p}\in\mathbb{E}^3$ expresado simultáneamente según ambas ternas como: $\mathbf{p}=\sum_i p_i^a\mathbf{a}_i=\sum_i p_i^b\mathbf{b}_i$. Por ser {**a**} y {**b**} ortonormales se tiene que $p_i^a=\langle\mathbf{p},\mathbf{a}_i\rangle$; $p_i^b(t)=\langle\mathbf{p},\mathbf{b}_i\rangle$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indica el producto escalar en $\mathbb{E}^3$, de modo que las coordenadas del mismo punto según ambas ternas quedan vinculadas por

$$\begin{aligned}&p_j^a=\left\langle\sum_i p_i^b\mathbf{b}_i,\mathbf{a}_j\right\rangle=\sum_i\langle\mathbf{a}_j,\mathbf{b}_i\rangle p_i^b=\sum_i c_b^a(j,i)p_i^b\Rightarrow\\&\mathbf{p}^a=\mathbf{C}_b^a\mathbf{p}^b\ ;\ \mathbf{C}_b^a=\left[c_b^a(j,i)\right]\end{aligned} \tag{3.12}$$

Siendo $\mathbf{C}_b^a$ la matriz que transforma las coordenadas del vector **p** expresado, respectivamente, en las ternas {**a**} y {**b**} y cuyos elementos son los *cosenos directores*: $c_b^a(j,i)=\langle\mathbf{a}_j,\mathbf{b}_i\rangle=\cos(\phi_{j,i})$ (ver Fig. 3.4). Así mismo intervirtiendo en las anteriores

* En el caso trivial de no rotación todo eje es invariante; $\breve{x}$ denota al versor unitario de *x*.
† En lo sucesivo denotamos con $\breve{x}$ al versor unitario correspondiente a un dado vector *x*.

los elementos de $\{\mathbf{a}\}$ y $\{\mathbf{b}\}$ llegaríamos a que $\mathbf{p}^b = \mathbf{C}_a^b \mathbf{p}^a$ con $\mathbf{C}_a^b = \left[c_a^b(j,i) \right]$ con $c_a^b(j,i) = \left\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_i \right\rangle = \left\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j \right\rangle = c_b^a(i,j)$ con lo cual se tiene que $(\mathbf{C}_b^a)^{-1} = (\mathbf{C}_b^a)^T$:

$$\mathbf{p}^b = \mathbf{C}_a^b \mathbf{p}^a = (\mathbf{C}_b^a)^T \mathbf{p}^a ;\ \forall \mathbf{p}^a \tag{3.13}$$

Con lo cual una MCD es siempre una matriz ortogonal y unitaria (Propiedad 1) que transforma las coordenadas entre dos ternas ortonormales positivas. La composición de rotaciones o de cambios de coordenadas puede obtenerse mediante el simple producto usual entre matrices. Esta propiedad la convierte en una de las parametrizaciones fundamentales de la orientación de un cuerpo tanto desde el punto de vista práctico como teórico. Destacamos, sin embargo, que la ortonormalidad de sus columnas impone las siguientes 6 condiciones entre ellas:

$$\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j = \begin{cases} 0, \ si\ i \neq j \\ 1, \ si\ i = j \end{cases} \tag{3.14}$$

con lo cual, 6 de los 9 parámetros que caracterizan la MCD resultan redundantes aunque sea necesario actualizar a todos durante la navegación. Más aun, en cada instante de actualización deben validarse numéricamente las condiciones (3.14) a riesgo de falsear resultados provenientes de suponer erróneamente que $(\mathbf{C}_b^a)^T = \mathbf{C}_a^b$. Esta desventaja tiene como lado positivo la posibilidad de usar la redundancia paramétrica precisamente para validar el cálculo y supervisar la propagación de errores. En ciertas aplicaciones las desventajas pueden hacer sin embargo preferible otras parametrizaciones como las que introduciremos más adelante.

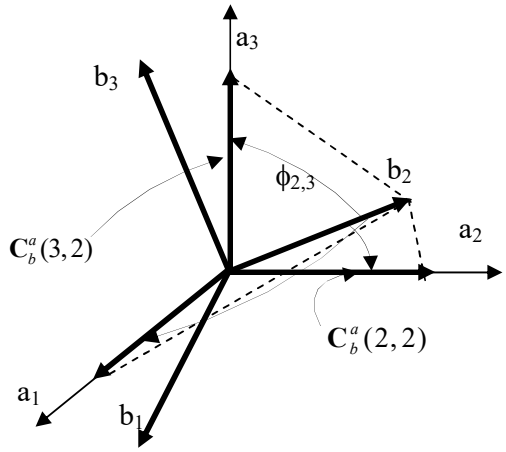


Figura 3.4

3.3.1 Propiedades de las MCD

A continuación enunciamos algunas propiedades de las MCD, consecuencias directas de las **Propiedades 1 y 2**, que son de interés en el desarrollo de este libro. Las mismas se encuentran en textos básicos de álgebra de matrices por lo cual, dejamos al interés del lector las demostraciones de las mismas.

Sea $\mathbf{C}_a^b$ la MCD que transforma las coordenadas entre dos ternas arbitrarias ortonormales y propias $\{\mathbf{a}\}$ y $\{\mathbf{b}\}$ entonces se cumple que:

MCD1: Toda MCD es autoadjunta $\Rightarrow$ MCD=adj(MCD).
MCD2: Sean $\mathbf{u}^a$ y $\mathbf{v}^a$ las coordenadas de un vector según la terna $\{\mathbf{a}\}$, entonces: $\mathbf{C}_a^b(\mathbf{u}^a \times \mathbf{v}^a) = \mathbf{u}^b \times \mathbf{v}^b$.
MCD3: $\mathbf{S}(\mathbf{u}^b) = \mathbf{S}(\mathbf{C}_a^b \mathbf{u}^a) = \mathbf{C}_a^b \mathbf{S}(\mathbf{u}^a)\mathbf{C}_b^a \Rightarrow \mathbf{C}_b^a \mathbf{S}(\mathbf{u}^b) = \mathbf{S}(\mathbf{u}^a)\mathbf{C}_b^a$.

3.3.2 Cinemática de la MCD

Consideramos una rotación impulsada por la velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\omega}_{ab}(t)$ desde la terna fija $\{\mathbf{a}\}$ a la terna "móvil" $\{\mathbf{b}(t)\}$ para $t \geq t_0$ y tal $\{\mathbf{b}(t_o)\}=\{\mathbf{a}\}$. Ambas ternas comparten el mismo origen **O** en todo *t*. Dado que $\{\mathbf{a}\}$ es propia, por la Propiedad 1 también lo será $\{\mathbf{b}(t)\}$ para $t \geq t_0$. De acuerdo con la (3.6) los elementos de la terna $\{\mathbf{b}(t)\}$ expresados en $\{\mathbf{a}\}$ están dados por:

$$\begin{aligned} &\left\{\mathbf{b}_1^a(t) \;\; \mathbf{b}_2^a(t) \;\; \mathbf{b}_3^a(t)\right\} = \mathbf{C}^a(t,t_0)\left\{\mathbf{a}_1^a \;\; \mathbf{a}_2^a \;\; \mathbf{a}_3^a\right\};\ \forall t \geq t_0 \\ &\dot{\mathbf{C}}^a(t,t_0) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ab}^a(t))\mathbf{C}^a(t,t_0);\ \ \mathbf{C}^a(t_0,t_0) = I \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pero, cada componente $\mathbf{a}_i$ expresado en $\{\mathbf{a}\}$ es, claramente, $\mathbf{a}_i^a = \mathbf{e}_i$, la *i*-ésima columna de la identidad matricial I_3. Si ahora a partir de (3.15) evaluamos los cosenos $c_b^a(j,i;t)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} &c_b^a(j,i;t) = \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{b}_i(t)\rangle = (\mathbf{a}_j^a)^T \mathbf{C}^a(t,t_0)\mathbf{a}_i^a = \mathbf{C}^a(t,t_0)(j,i) \Rightarrow \\ &\mathbf{C}_b^a(t) = \mathbf{C}^a(t,t_0) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Con lo cual, la matriz de cosenos directores (MCD) que transforma las coordenadas de un punto expresado en terna $\{\mathbf{b}(t)\}$ en las coordenadas del mismo punto expresado en terna $\{\mathbf{a}\}$ ($\mathbf{p}^a = \mathbf{C}_b^a \mathbf{p}^b$) es la solución de la siguiente ecuación diferencial matricial.

$$\dot{\mathbf{C}}_b^a = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ab}^a(t))\mathbf{C}_b^a;\ \ \mathbf{C}_b^a(t_0) = I \tag{3.17}$$

En forma más general, la condición inicial de la ecuación anterior podría ser $\mathbf{C}_b^a(t_0) \neq I$ indicando una rotación inicial no nula entre $\{\mathbf{b}(t_0)\}$ y $\{\mathbf{a}\}$, de esta forma formulamos la ecuación general de la cinemática de la MCD como:

$$\dot{\mathbf{C}}_b^a(t,t_o) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ab}^a(t))\mathbf{C}_b^a(t,t_o);\quad \mathbf{C}_b^a(t_o,t_o) = \mathbf{C}_b^a(t_o) \tag{3.18}$$

Dado que $\mathbf{C}_a^b = (\mathbf{C}_b^a)^T$, la ecuación diferencial para $\mathbf{C}_a^b$ se obtiene trasponiendo al Ec. (3.18) y usando la propiedad de antisimetría de la matriz definida en (3.4):

$$\dot{\mathbf{C}}_a^b(t,t_o) = \mathbf{C}_a^b(t,t_o)\mathbf{S}^T(\boldsymbol{\omega}_{ab}^a(t)) = -\mathbf{C}_a^b(t,t_o)\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ab}^a(t)) = \mathbf{C}_a^b(t,t_o)\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ba}^a(t)); \tag{3.19}$$

De la (3.18) y (3.19) resulta que, según en que sistema de coordenadas esté expresada la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{ab}(t)$, la ecuación de propagación de la MCD a partir de la condición inicial arbitraria: $\mathbf{C}_b^a(t_o,t_o)=\mathbf{C}_b^a(t_o)$ (o su transpuesta según corresponda) se escribe:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{C}}_b^a(t,t_o)&=\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ab}^a(t))\mathbf{C}_b^a(t,t_o)\Rightarrow\dot{\mathbf{C}}_a^b(t,t_o)=\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ba}^b(t))\mathbf{C}_a^b(t,t_o)\\ \dot{\mathbf{C}}_b^a(t,t_o)&=\mathbf{C}_b^a(t,t_o)\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ab}^b(t))\Rightarrow\dot{\mathbf{C}}_a^b(t,t_o)=\mathbf{C}_a^b(t,t_o)\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ba}^a(t))\end{aligned}\tag{3.20}$$

3.4 Angulo vectorial de rotación o eje y ángulo de Euler

De acuerdo con la **Propiedad 2**, el resultado final de una rotación arbitraria de un cuerpo alrededor de un punto fijo equivale a una rotación única alrededor de un eje invariante. El eje es la dirección propia de la matriz de rotación entre la terna inicial y la final y se corresponde con el único valor propio real y unitario de la MCD del cambio de coordenadas. La importancia de esta conclusión justifica estudiar más en detalle las:

3.4.1. Rotaciones alrededor de un eje de dirección invariante

Cuando la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{ab}(t)$ se mantiene paralela a sí misma (ver Fig. 3.5), el ángulo vectorial $\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)$ rotado por la terna $\{\mathbf{b}\}$ desde $\{\mathbf{b}(t_0)\}=\{\mathbf{a}\}$ hasta $\{\mathbf{b}(t)\}$; $(\boldsymbol{\theta}_{ba}(t):\{\mathbf{a}\}\rightarrow\{\mathbf{b}(t)\})$ es tal que $\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)$ es paralelo a $\boldsymbol{\omega}_{ab}(t)$ para todo t y entonces se expresa mediante la integral vectorial:

$$\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)=\int_{t_o}^{t}\boldsymbol{\omega}_{ab}(\tau)d\tau;\tag{3.21}$$

Claramente, en este caso, la dirección del vector $\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)$ coincide con la del eje invariante de la rotación llamado *eje de Euler.* El módulo $\theta_{ba}(t)=\|\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)\|$, llamado *ángulo de Euler,* es el ángulo efectivo rotado positivamente (en el sentido horario) alrededor del eje de Euler en el intervalo $[t_0,t]$ cuando el vector $\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)$ es mirado desde el origen. Por tratarse de un eje invariante, $\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)$ tiene las mismas coordenadas tanto en $\{\mathbf{a}\}$ como en $\{\mathbf{b}(t)\}$, lo que justifica suprimir el superíndice sin riesgo de ambigüedad en la notación, lo mismo ocurre en este caso con $\boldsymbol{\omega}_{ab}(t)$.

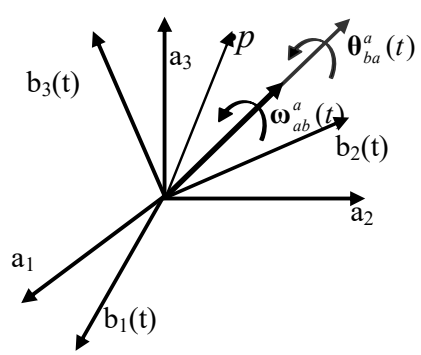


Figura 3.5: Rotación con eje invariante de {b} respecto de la {a}.

Es fácil demostrar que puesto que $\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)$ y $\boldsymbol{\omega}_{ab}(t)$ son paralelos, las siguientes matrices conmutan (de hecho en cualquier instante de tiempo ambas matrices son proporcionales).

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ab}(t)); \qquad \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)) = \int_{t_o}^{t} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ab}(\tau))d\tau \tag{3.22}$$

bajo estas condiciones, la ecuación diferencial (3.17) admite una solución explícita (ver por ejemplo Zadeh/Desoer 1963, pp. 340) para la matriz de rotación o MCD. El lector podrá verificar por simple sustitución en (3.17) la solución que escribimos a continuación.

$$\mathbf{C}_b^a(t) = \exp\left[\int_{t_o}^{t} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ab}(\tau))d\tau\right] = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)); \tag{3.23}$$

3.4.2 Relación del ángulo vectorial de Euler con la MCD

Claramente, siempre será posible rotar una terna respecto de otra un *ángulo vectorial* $\boldsymbol{\theta}_{ba}$ arbitrario mediante una velocidad angular paralela a dicho ángulo (incluso constante). Esto permite re-expresar la Ec (3.23) prescindiendo de la variable t y así obtener la MCD que transforma las coordenadas entre dos ternas en función del vector ángulo que transfiere una en la otra.

Sea $\boldsymbol{\theta}_{ba} : \{\mathbf{a}\} \rightarrow \{\mathbf{b}\}$ y $\mathbf{C}_b^a = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{ba}) = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ba}))$. Usando la definición de la exponencial de una matriz (Zadeh/Desoer, 1963 o Titterton/Weston, 1997, pp. 296) y luego de manipular algunas series trigonométricas se obtiene la siguiente expresión para la MCD del cambio de coordenadas en función del ángulo vectorial $\boldsymbol{\theta}_{ba}$.

$$\mathbf{C}_b^a = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{ba}) \triangleq \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ba})) = \mathbf{I} + \frac{\operatorname{sen}\theta_{ba}}{\theta_{ba}}\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ba}) + \frac{(1-\cos\theta_{ba})}{\theta_{ba}{}^2}\mathbf{S}^2(\boldsymbol{\theta}_{ba}) \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{ba} \triangleq \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}; \; \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ba}) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix}; \; \theta_{ba} \triangleq \|\boldsymbol{\theta}_{ba}\| \tag{3.25}$$

Puesto que $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ba})\boldsymbol{\theta}_{ba} = \boldsymbol{\theta}_{ba} \times \boldsymbol{\theta}_{ba} = 0 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ba})^2\boldsymbol{\theta}_{ba}$, de la Ec. (3.24) resulta que $\mathbf{C}_b^a\boldsymbol{\theta}_{ab} = \boldsymbol{\theta}_{ab}$. Claramente y en concordancia con la Propiedad 2, $\boldsymbol{\theta}_{ba}$ es paralelo a una dirección propia de $\mathbf{C}_b^a$ con valor propio unitario.

A partir de la representación *eje y ángulo de Euler*: $\boldsymbol{\theta}_{ba} = (\breve{\boldsymbol{\theta}}_{ba}, \theta_{ba})$ e introduciendo el divisor θ_{ba} al interior de $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ba})$, de la Ec. (3.24) se obtiene la *fórmula de rotación de Rodrigues* para la MCD:

$$\mathbf{C}_b^a = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ba})) = \mathbf{I} + \operatorname{sen}\theta_{ba}\mathbf{S}(\breve{\boldsymbol{\theta}}_{ba}) + (1 - \cos\theta_{ba})\mathbf{S}^2(\breve{\boldsymbol{\theta}}_{ba}) \tag{3.26}$$

Destacamos que, por definición, el ángulo vectorial $\boldsymbol{\theta}_{ba}$ progresa en el sentido inverso al del operador matricial de cambio de coordenadas, es decir: mientras que $\boldsymbol{\theta}_{ba}$ denota el ángulo rotado desde la "terna inicial" $\{\mathbf{a}\}$ hasta la "terna final" $\{\mathbf{b}\}$, $\mathbf{C}_b^a$ opera sobre las coordenadas en la "terna final" $\{\mathbf{b}\}$ para obtener las coordenadas en la "terna inicial" $\{\mathbf{a}\}$. También es posible expresar $\mathbf{C}_b^a$ en función del ángulo rotado $\boldsymbol{\theta}_{ab}$ invirtiendo el signo del argumento de la exponencial en la Ec. (3.26).

De la Ec. (3.24) se obtiene la siguiente relación que permite calcular el *ángulo de Euler* a partir de la MCD.

$$traza(\mathbf{C}_b^a) = traza(\mathbf{C}_a^b) = 1 + 2\cos\theta_{ba} \Rightarrow \cos(\theta_{ba}) = \frac{traza(\mathbf{C}_b^a) - 1}{2} \tag{3.27}$$

Notar que la $traza(\mathbf{C}_b^a)$ es sólo función del módulo del ángulo rotado y no de las coordenadas del eje de rotación. A partir de las Ecs. (3.26), reexpresadas como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_b^a &= \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ba})) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta + \breve{\theta}_x^2(1-\cos\theta) & \breve{\theta}_x\breve{\theta}_y(1-\cos\theta) - \breve{\theta}_z\mathrm{sen}\theta & \breve{\theta}_x\breve{\theta}_z(1-\cos\theta) + \breve{\theta}_y\mathrm{sen}\theta \\ \breve{\theta}_x\breve{\theta}_y(1-\cos\theta) + \breve{\theta}_z\mathrm{sen}\theta & \cos\theta + \breve{\theta}_y^2(1-\cos\theta) & \breve{\theta}_y\breve{\theta}_z(1-\cos\theta) - \breve{\theta}_x\mathrm{sen}\theta \\ \breve{\theta}_x\breve{\theta}_z(1-\cos\theta) - \breve{\theta}_y\mathrm{sen}\theta & \breve{\theta}_y\breve{\theta}_z(1-\cos\theta) + \breve{\theta}_x\mathrm{sen}\theta & \cos\theta + \breve{\theta}_z^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.28}$$

surgen las siguientes relaciones que permiten calcular el *eje de Euler* a partir de la MCD cuando $\mathrm{sen}\theta_{ba} \neq 0$:

$$\begin{aligned} &\bullet\ \breve{\theta}_x = (\mathbf{C}_b^a(3,2) - \mathbf{C}_b^a(2,3)) / 2\mathrm{sen}\theta_{ba}; \\ &\bullet\ \breve{\theta}_y = (\mathbf{C}_b^a(1,3) - \mathbf{C}_b^a(3,1)) / 2\mathrm{sen}\theta_{ba}; \\ &\bullet\ \breve{\theta}_z = (\mathbf{C}_b^a(2,1) - \mathbf{C}_b^a(1,2)) / 2\mathrm{sen}\theta_{ba} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Si bien la Ec. (3.29) es indeterminada cuando $\mathrm{sen}\theta_{ba} = 0$, la Ec. (3.27) permite decidir previamente si no hay rotación alguna, en cuyo caso $\cos(\theta_{ba})=1 \Leftrightarrow \mathbf{C}_b^a = I$ o bien si $\cos(\theta_{ba})=-1$ y en tal caso las coordenadas del versor $\breve{\boldsymbol{\theta}}_{ba}$ se obtienen usando:

$$\frac{\mathbf{C}(2,1)}{\mathbf{C}(2,3)} = \frac{\breve{\theta}_x}{\breve{\theta}_z};\ \frac{\mathbf{C}(2,1)}{\mathbf{C}(3,1)} = \frac{\breve{\theta}_y}{\breve{\theta}_z};\ \frac{\mathbf{C}(1,3)}{\mathbf{C}(2,3)} = \frac{\breve{\theta}_x}{\breve{\theta}_y} \tag{3.30}$$

Cuando $\mathrm{sen}\theta_{ba} \neq 0$, las dos soluciones de la Ec. (3.27) de signo opuesto para θ_{ba} se corresponden con dos soluciones de las Ecs. (3.29) con sentido opuesto para el eje de Euler. Esto refleja el hecho de que una rotación de un ángulo θ_{ba} alrededor de $\breve{\boldsymbol{\theta}}_{ba}$ es equivalente a una rotación de un ángulo $-\theta_{ba}$ alrededor de $-\breve{\boldsymbol{\theta}}_{ba}$.

De las Ecs. (3.24) a (3.30) y la **Propiedad 2** se concluye que: *es posible asociar a cada MCD una rotación uniforme alrededor de un eje invariante.* En otros términos el

resultado de cualquier rotación equivale a una única rotación descrita por un ángulo vectorial $\boldsymbol{\theta}$ de módulo θ y eje $\breve{\boldsymbol{\theta}}$. Este resultado es clásicamente expresado por el:

Teorema de Euler
El resultado final de cualquier movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo es indistinguible de una rotación alrededor de un único eje invariante: el eje de Euler.

■

Entre las ventajas de la representación del ángulo vectorial de Euler destacamos la de requerir el número mínimo de parámetros (las 3 componentes de $\boldsymbol{\theta}_{ba} \in \mathbb{R}^3$ o dirección y módulo), además, su claro sentido geométrico resulta de interés en muchas aplicaciones. Sin embargo, como veremos, no posee una regla sencilla de composición. Además, la falta de redundancia de sus parámetros no permite supervisar errores numéricos como en el caso de la MCD o el cuaternión -que veremos más adelante.

3.4.3 Composición de rotaciones

El cambio en la orientación de un cuerpo sometido a una secuencia de rotaciones no es sólo función de las rotaciones individuales, sino también del orden en que estas son aplicadas. Matemáticamente esto se enuncia diciendo que "el grupo de las rotaciones no es conmutativo."

Sean las ternas $\{\mathbf{a}\}$ $\{\mathbf{b}\}$ y $\{\mathbf{c}\}$ en E^3 ortonormales y positivas que comparten el origen $\mathbf{O}$ y sean $\boldsymbol{\theta}_{ba} \in \mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{\theta}_{cb} \in \mathbb{R}^3$ los ángulos de Euler tales que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{ba} : \{\mathbf{a}\} \to \{\mathbf{b}\} \Rightarrow \mathbf{C}_b^a = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{ba}) = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ba})) \\ \boldsymbol{\theta}_{cb} : \{\mathbf{b}\} \to \{\mathbf{c}\} \Rightarrow \mathbf{C}_c^b = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{cb}) = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{cb})) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Denotamos la composición de ambas rotaciones como

$$\boldsymbol{\theta}_{ca} \equiv \boldsymbol{\theta}_{cb} \circ \boldsymbol{\theta}_{ba} \tag{3.32}$$

es por definición, el único vector ángulo $\boldsymbol{\theta}_{ca} \in \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\boldsymbol{\theta}_{ca} : \{\mathbf{a}\} \to \{\mathbf{c}\} \Rightarrow \mathbf{C}_c^a = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{ca}) = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ca})) \tag{3.33}$$

Pero además:

$$\mathbf{C}_c^a = \mathbf{C}_b^a \mathbf{C}_c^b = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{ca}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{cb} \circ \boldsymbol{\theta}_{ba}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{ba})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{cb}) \tag{3.34}$$

Como se advierte fácilmente de la ley de composición (3.34), la no conmutatividad de las rotaciones es una consecuencia directa de la no conmutatividad del producto matricial ($\mathbf{C}_b^a \mathbf{C}_c^b \neq \mathbf{C}_c^b \mathbf{C}_b^a$).

Usando, en primer lugar, el hecho de que la exponencial de una matriz preserva la relación de similitud, es decir: $\exp(\Gamma \mathbf{A} \Gamma^{-1}) = \Gamma \exp(\mathbf{A}) \Gamma^{-1}$, y luego la propiedad MCD3: $\mathbf{S}(\mathbf{C}_b^a \mathbf{u}^b) = \mathbf{C}_b^a \mathbf{S}(\mathbf{u}^b) \mathbf{C}_a^b$, a partir de la (3.34), luego de algunas manipulaciones, es posible demostrar que:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{cb}\circ\boldsymbol{\theta}_{ba}) &= \mathbf{C}_b^a\exp(S(\boldsymbol{\theta}_{cb})) = \exp(S(\mathbf{C}_b^a\boldsymbol{\theta}_{cb}))\mathbf{C}_b^a = \mathbf{C}(\mathbf{C}_b^a\boldsymbol{\theta}_{cb})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{ba})\\ &= \exp(S(\boldsymbol{\theta}_{ba}))\mathbf{C}_c^b = \mathbf{C}_c^b\exp(S(\mathbf{C}_b^c\boldsymbol{\theta}_{ba})) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{cb})\mathbf{C}(\mathbf{C}_b^c\boldsymbol{\theta}_{ba})\end{aligned} \tag{3.35}$$

A partir de lo cual se obtienen las expresiones equivalentes:

$$\boldsymbol{\theta}_{cb}\circ\boldsymbol{\theta}_{ba} = \mathbf{C}_b^c\boldsymbol{\theta}_{ba}\circ\boldsymbol{\theta}_{cb} = \boldsymbol{\theta}_{ba}\circ\mathbf{C}_b^a\boldsymbol{\theta}_{cb} \tag{3.36}$$

3.5 Espacio vectorial de las pequeñas rotaciones

Veremos, que cuando las rotaciones son lo suficientemente pequeñas, éstas no sólo conmutan, si no que además constituyen (son isomorfas con) un espacio vectorial.

Sea $\delta\boldsymbol{\theta} = \delta\theta\breve{\boldsymbol{\theta}}$ un ángulo vectorial pequeño con $\delta\theta \in \mathbb{R}^+$ y $\breve{\boldsymbol{\theta}}$ versor de Para $\delta\theta \to 0$ es posible escribir:

$$\exp(\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta})) = \mathbf{I} + \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{o}(\delta\theta) \tag{3.37}$$

Donde la matriz residual $\mathbf{o}(\delta\theta)$ es tal que*:

$$\lim_{\delta\theta\to 0^+}\frac{\|\mathbf{o}(\delta\theta)\|_2}{\delta\theta} \to 0 \tag{3.38}$$

De este modo la Ec. (3.37) justifica la siguiente aproximación de primer orden cuando $\delta\theta \to 0$:

$$\exp(\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta})) \approx \mathbf{I} + \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}) \tag{3.39}$$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon = \max(|\alpha|,|\beta|)$ y dos versores no necesariamente colineales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Consideremos la composición de ángulos $\beta\mathbf{v}_2\circ\alpha\mathbf{v}_1$ cuya MCD es por definición:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\alpha\mathbf{v}_1\circ\beta\mathbf{v}_2) &= \mathbf{C}(\beta\mathbf{v}_2)\mathbf{C}(\alpha\mathbf{v}_1) = \exp(\mathbf{S}(\beta\mathbf{v}_2))\exp(\mathbf{S}(\alpha\mathbf{v}_1))\\ &= [\mathbf{I} + \mathbf{S}(\beta\mathbf{v}_2) + \mathbf{o}(|\beta|)][\mathbf{I} + \mathbf{S}(\alpha\mathbf{v}_1) + o(|\alpha|)]\\ &= \mathbf{I} + \mathbf{S}(\alpha\mathbf{v}_1) + \mathbf{S}(\beta\mathbf{v}_2) + \mathbf{o}(\varepsilon) = \mathbf{I} + \mathbf{S}(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) + \mathbf{o}(\varepsilon)\end{aligned} \tag{3.40}$$

De la última igualdad y la expresión (3.37) resulta trivialmente que para $\varepsilon \to 0$:

$$\mathbf{C}(\beta\mathbf{v}_2\circ\alpha\mathbf{v}_1) \sim \mathbf{C}(\alpha\mathbf{v}_1\circ\beta\mathbf{v}_2) \sim \mathbf{C}(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) \tag{3.41}$$

Lo que nos permite concluir que para ángulos suficientemente pequeños la composición de rotaciones es conmutativa y se corresponde con la composición vectorial de los ángulos involucrados.

---

* $\|\mathbf{M}\|_2$ indica la norma euclidiana inducida de la matriz $\mathbf{M}$

3.6 Diferencial de una MCD

Sean, como se indica en la Fig. 3.6, la terna de "partida" {**a**} y la de "llegada" {**b**}, distantes de un ángulo vectorial $\boldsymbol{\theta}_{ba}$, las ternas nominales de la transformación de coordenadas $\mathbf{C}_b^a$ y sean $\{\hat{\mathbf{a}}\}$ **y** $\{\hat{\mathbf{b}}\}$ posibles estimaciones de las ternas nominales, separadas, respectivamente de las primeras, por pequeños ángulos de "desalineamiento" vectoriales $\delta\boldsymbol{\theta}_a = \boldsymbol{\theta}_{\hat{a}a}$ en la terna de "partida" y $\delta\boldsymbol{\theta}_b = \boldsymbol{\theta}_{\hat{b}b}$ en la terna de "llegada".

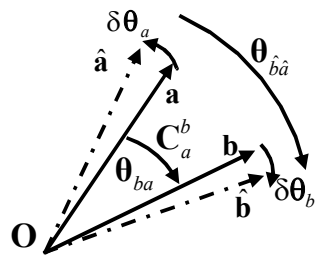


Figura 3.6: Ternas a, b con sus aproximaciones.

A partir de la Fig. 3.6, se tiene $\boldsymbol{\theta}_{\hat{b}\hat{a}} \equiv \boldsymbol{\theta}_{\hat{b}b} \circ \boldsymbol{\theta}_{ba} \circ \boldsymbol{\theta}_{a\hat{a}}$. La ley de composición de rotaciones (3.32)-(3.34) permite escribir:

$$\mathbf{C}_{\hat{b}}^{\hat{a}} = \mathbf{C}_a^{\hat{a}}\mathbf{C}_b^a\mathbf{C}_{\hat{b}}^b = \mathbf{C}(-\delta\boldsymbol{\theta}_a)\mathbf{C}_b^a\mathbf{C}(\delta\boldsymbol{\theta}_b) \tag{3.42}$$

Usando la (3.35) y (3.36), es posible demostrar las dos siguientes expresiones equivalentes de la (3.42):

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\hat{b}}^{\hat{a}} &= \mathbf{C}(-\delta\boldsymbol{\theta}_a)\mathbf{C}(\mathbf{C}_b^a\delta\boldsymbol{\theta}_b)\mathbf{C}_b^a = \mathbf{C}(\delta\boldsymbol{\theta}_{ba}^a)\mathbf{C}_b^a \\ &= \mathbf{C}_b^a\mathbf{C}(-\mathbf{C}_a^b\delta\boldsymbol{\theta}_a)\mathbf{C}(\delta\boldsymbol{\theta}_b) = \mathbf{C}_b^a\mathbf{C}(\delta\boldsymbol{\theta}_{ba}^b)\end{aligned} \tag{3.43}$$

en las cuales, invocando la ley de composición (3.34), se introdujeron las definiciones: $\delta\boldsymbol{\theta}_{ba}^b \triangleq \delta\boldsymbol{\theta}_b \circ (-\mathbf{C}_a^b\delta\boldsymbol{\theta}_a)$ y $\delta\boldsymbol{\theta}_{ba}^a \triangleq \mathbf{C}_b^a\delta\boldsymbol{\theta}_b \circ (-\delta\boldsymbol{\theta}_a)$. El mismo razonamiento que conduce a las (3.43), permite demostrar que:

$$\delta\boldsymbol{\theta}_{ba}^b = \mathbf{C}_a^b\delta\boldsymbol{\theta}_{ba}^a \tag{3.44}$$

de modo que se trata del mismo error angular vectorial expresado en ambas ternas de coordenadas. Geométricamente, el error angular $\delta\boldsymbol{\theta}_{ba}$ es la composición del error angular en la terna de llegada con el error angular en la terna de partida cambiado de signo. Notar la imposibilidad de distinguir las contribuciones independientes de los desalineamientos $\delta\boldsymbol{\theta}_a$ y $\delta\boldsymbol{\theta}_b$, respectivamente, en la terna de "partida" y en la terna de "llegada", sobre $\delta\boldsymbol{\theta}_{ba}$ que por tanto es visto como el error en el ángulo vectorial $\boldsymbol{\theta}_{ba}$ entre ambas ternas.

Conocido $\delta\boldsymbol{\theta}_{ab} = -\delta\boldsymbol{\theta}_{ba}$ la MCD nominal podrá reconstruirse a partir de su estimación mediante cualquiera de las formas:

$$\mathbf{C}_b^a = \exp(\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_{ab}^a))\mathbf{C}_{\hat{b}}^{\hat{a}} = \mathbf{C}_{\hat{b}}^{\hat{a}}\exp(\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_{ab}^b)) \tag{3.45}$$

Para $\delta\theta_{ab} \le \varepsilon$, la Ec. (3.37) junto con las Ecs. Ecs. (3.43) a (3.45) permiten calcular la variación $\Delta\mathbf{C}_b^a \triangleq \mathbf{C}_b^a - \mathbf{C}_{\hat{b}}^{\hat{a}}$ según las coordenadas en que esté expresada la diferencial angular $\delta\boldsymbol{\theta}_{ab}$:

$$\Delta\mathbf{C}_b^a \triangleq \mathbf{C}_b^a - \mathbf{C}_{\hat{b}}^{\hat{a}} = \mathbf{C}_b^a S(\delta\boldsymbol{\theta}_{ab}^b) + \mathbf{o}(\varepsilon) = S(\delta\boldsymbol{\theta}_{ab}^a)\mathbf{C}_b^a + \mathbf{o}(\varepsilon) \tag{3.46}$$

Siempre que $\max(\delta\theta_b, \delta\theta_a) \le \varepsilon/2$ y para ε suficientemente pequeño la propiedad de espacio vectorial de las pequeñas rotaciones permite afirmar que $\delta\boldsymbol{\theta}_{ab}^b \sim \mathbf{C}_a^b\delta\boldsymbol{\theta}_a - \delta\boldsymbol{\theta}_b$ ó $\delta\boldsymbol{\theta}_{ab}^a \sim \delta\boldsymbol{\theta}_a - \mathbf{C}_b^a\delta\boldsymbol{\theta}_b$ y además $\delta\theta_{ab} \le \varepsilon$. Así, la parte lineal de la variación en las (3.46) para $\varepsilon \to 0$ establece las siguientes dos formas alternativas de la diferencial de una MCD

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{C}_b^a &\triangleq \mathbf{C}_b^a\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_{ab}^b) = \mathbf{C}_b^a\mathrm{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_a^b - \delta\boldsymbol{\theta}_b) \\ \delta\mathbf{C}_b^a &\triangleq \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_{ab}^a)\mathbf{C}_b^a = \mathrm{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_a - \delta\boldsymbol{\theta}_b^a)\mathbf{C}_b^a \end{aligned} \tag{3.47}$$

3.7 Redefinición de la velocidad angular: significado geométrico

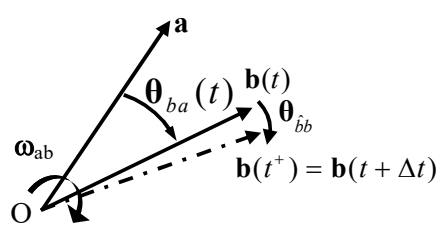


Figura 3.7: Rotación relativa entre 2 ternas.

Retomamos la representación de la velocidad angular entre dos ternas ortonormales positivas con origen común. De acuerdo con lo visto al final del párrafo anterior, supondremos, sin pérdida de generalidad, que la terna $\{\mathbf{a}\}$ es fija y que la terna $\{\mathbf{b}(t)\}$ rota diferenciablemente respecto de la primera a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{ab}$ (ver Fig. 3.7). Sean: $\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)$ y $\mathbf{C}_b^a(t)$ el ángulo y la MCD que vinculan ambas ternas en el instante *t*, $\boldsymbol{\theta}_{b^+b} : \{\mathbf{b}(t)\} \to \{\mathbf{b}(t^+)\}$ el ángulo rotado por la terna $\{\mathbf{b}(\mathrm{t})\}$ entre *t* y *t+Δt* y $\mathbf{C}_b^a(t+\Delta t) = \mathbf{C}_{b(t^+)}^a = \mathbf{C}_b^a(t)\mathbf{C}_{b(t^+)}^{b(t)}$ la MCD que vincula ambas ternas en *t+Δt*. Consideramos la variación:

$$\partial\mathbf{C}_b^a = \mathbf{C}_b^a(t+\Delta t) - \mathbf{C}_b^a(t) = \mathbf{C}_b^a(t)(\mathbf{C}_{b(t^+)}^{b(t)} - I) = \mathbf{C}_b^a(t)(\exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{b^+b}) - I) \tag{3.48}$$

Por la diferenciabilidad de la rotación se tiene que $\Delta t \to 0 \Rightarrow \theta_{b^+b} \to 0$. Usando la (3.37) calculamos el límite del cociente incremental:

$$\dot{\mathbf{C}}_b^a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\partial \mathbf{C}_b^a}{\Delta t} = \mathbf{C}_b^a \mathbf{S}(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\theta}_{b^+b}}{\Delta t}) = \mathbf{S}(\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{C}_b^a \frac{\boldsymbol{\theta}_{b^+b}}{\Delta t})\mathbf{C}_b^a \tag{3.49}$$

De este modo, comparando con (3.20) se tiene que:

$$\boldsymbol{\omega}_{ab}^b(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\theta}_{b^+b}}{\Delta t}; \quad \boldsymbol{\omega}_{ab}^a(t) = \mathbf{C}_b^a \boldsymbol{\omega}_{ab}^b(t) \tag{3.50}$$

Lo cual nos dice que $\boldsymbol{\omega}_{ab}(t)$ resulta ser la velocidad angular vectorial instantánea con que la terna $\{\mathbf{b}(t)\}$ "se aleja" respecto de la terna de referencia $\{\mathbf{a}\}$.

3.8 Rotaciones alrededor de los ejes coordenados: Ángulos de Euler

Particularizamos ahora las expresiones (3.24) a (3.26) para el caso de rotaciones alrededor de los ejes coordenados ***x, y, z*** (llamadas rotaciones elementales de Euler; ver Fig. 3.8).

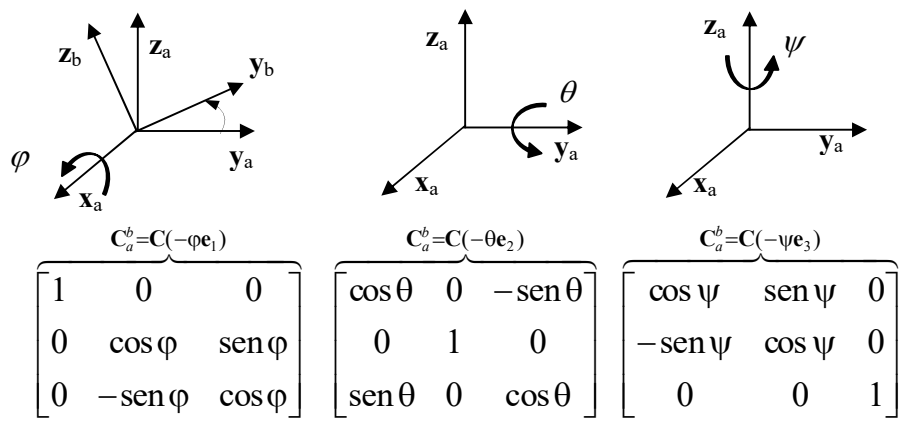


Figura 3.8: Ángulos y rotaciones elementales de Euler.

Ejemplificamos con una rotación positiva φ alrededor del eje ***x***, descrita en coordenadas como $\boldsymbol{\varphi}_{ba} = \varphi \boldsymbol{e}_1$. Calculamos primeramente los términos:

$$\mathbf{S}(\varphi\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi \\ 0 & \varphi & 0 \end{bmatrix}; \; \mathbf{S}^2(\varphi\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi^2 \end{bmatrix} = -\varphi^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{3.51}$$

que substituimos en la Ec. (3.24) para obtener la matriz de transformación de coordenadas (MCD) <u>operando en el mismo sentido que la rotación</u>:

$$\mathbf{C}_a^b = \mathbf{C}(-\boldsymbol{\varphi}_{ba}) = \exp(\mathbf{S}(-\varphi\boldsymbol{e}_1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

Con un procedimiento similar se obtienen las respectivas MCD asociadas a las otras *rotaciones elementales de Euler* indicadas en la Fig. 3.8.

3.8.1 Relación entre los ángulos de Euler y la MCD

En la Fig. 3.9 se ejemplifica como una terna {**b**} de ejes $\boldsymbol{x}^b$, $\boldsymbol{y}^b$, $\boldsymbol{z}^b$, coincidente inicialmente con la terna de referencia {**a**} de ejes $\boldsymbol{x}^a$, $\boldsymbol{y}^a$, $\boldsymbol{z}^a$, resulta de la secuencia de rotaciones elementales: $(\varphi@\boldsymbol{x}^b)(\theta@\boldsymbol{y}^{b'})(\psi@\boldsymbol{z}^a)$ (léase: *una rotación de un ángulo* ψ *alrededor del eje* $\boldsymbol{z}^b$*, seguida de una rotación de un ángulo* θ *alrededor del eje* $\boldsymbol{y}^{b'}$*, seguida de una rotación de un ángulo* φ *alrededor del eje* $\boldsymbol{x}^a$) equivalente a la composición de los ángulos de $\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{\varphi}_{bb''} \circ \boldsymbol{\theta}_{b''b'} \circ \boldsymbol{\psi}_{b'a} \equiv \varphi \boldsymbol{e}_1 \circ \theta \boldsymbol{e}_2 \circ \psi \boldsymbol{e}_3$.

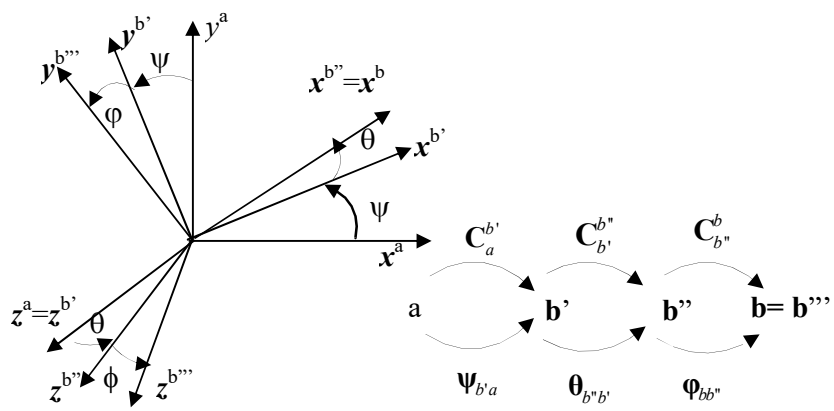


Figura 3.9: Composición de rotaciones elementales de Euler.

Componiendo matricialmente estas rotaciones se obtiene la MCD que transforma las coordenadas entre ambas ternas en función de los *ángulos de Euler* φ, θ y ψ:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_a^b &= \mathbf{C}_{b''}^b \mathbf{C}_{b'}^{b''} \mathbf{C}_a^{b'} = \mathbf{C}(-\varphi\mathbf{e}_1)\mathbf{C}(-\theta\mathbf{e}_2)\mathbf{C}(-\psi\mathbf{e}_3) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{bb''}} \circ \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{b''b'}} \circ \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{b'a}}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \mathrm{sen}\varphi \\ 0 & -\mathrm{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\mathrm{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \mathrm{sen}\psi & 0 \\ -\mathrm{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\mathbf{C}_a^b = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\,\mathrm{sen}\psi & -\mathrm{sen}\theta \\ -\cos\varphi\,\mathrm{sen}\psi + \mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\theta\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi + \mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\psi & \mathrm{sen}\varphi\cos\theta \\ \mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\psi + \cos\varphi\,\mathrm{sen}\theta\cos\psi & -\mathrm{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\psi & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

A partir de la (3.54), es fácil constatar la validez de las aproximaciones (3.40) y (3.41) aplicada reiteradamente para pequeños valores de $\psi, \theta\ y\ \varphi$, en efecto, para $\max(\psi,\theta,\varphi) \to 0$:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi}_{bb''} \circ \boldsymbol{\theta}_{b''b'} \circ \boldsymbol{\psi}_{b'a}) \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{bmatrix} \approx \mathbf{I} + \varphi\mathbf{S}(\mathbf{e}_1) + \theta\mathbf{S}(\mathbf{e}_2) + \psi\mathbf{S}(\mathbf{e}_3) \tag{3.55}$$

De la Ec. (3.54) se obtienen, asimismo, las siguientes relaciones inversas que permiten calcular los ángulos de Euler a partir de la MCD para la secuencia elegida.

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan(\mathbf{C}_a^b(2,3)/\mathbf{C}_a^b(3,3)) \\ \psi &= \arctan(\mathbf{C}_a^b(1,2)/\mathbf{C}_a^b(1,1)) \\ \theta &= \operatorname{arcsen}(-\mathbf{C}_a^b(1,3)) \end{aligned} \tag{3.56}$$

La última de las Ecs. (3.56) establece una ambigüedad para el valor de θ que es subsanada imponiendo $-\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$. Sin embargo, cuando $\theta \to \pm\pi/2$, las expresiones para φ y ψ de las anteriores resultan indeterminadas. En efecto, para cada uno de estos casos límites, la (3.54) se reescribe, respectivamente:

$$\begin{aligned} \theta \to \frac{\pi}{2} : \mathbf{C}_a^b &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \operatorname{sen}\varphi\cos\psi - \cos\varphi\operatorname{sen}\psi & \cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\psi & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \operatorname{sen}(\varphi-\psi) & \cos(\varphi-\psi) & 0 \\ \cos(\varphi-\psi) & -\operatorname{sen}(\varphi-\psi) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.57}$$

y análogamente:

$$\begin{aligned} \theta \to -\frac{\pi}{2} : \mathbf{C}_a^b &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\operatorname{sen}\varphi\cos\psi - \cos\varphi\operatorname{sen}\psi & \cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi - \cos\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\psi & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\operatorname{sen}(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) & 0 \\ -\cos(\varphi+\psi) & -\operatorname{sen}(\varphi+\psi) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.58}$$

Por lo que, según el caso, sólo será posible determinar la suma o la diferencia de los ángulos φ y ψ. Geométricamente lo anterior es consecuencia de que una rotación de 90º del ángulo intermedio θ hace que φ y ψ devengan rotaciones alrededor de un mismo eje sumándose algebraicamente sus efectos. La indefinición de φ y ψ, resultante del pasaje de θ por las singularidades $\pm\pi/2$ puede, sin ciertos recaudos, provocar la perdida definitiva del seguimiento del primer par de ángulos por parte de un algoritmo de navegación. Este fenómeno, observado inicialmente en plataformas estabilizadas, es denominado *bloqueo de gimbal (gimbal lock* en la literatura inglesa).

Wertz, (1988, pp. 417) demuestra que cualquier rotación puede ser descompuesta en una secuencia de, a lo sumo, 3 *rotaciones elementales de Euler* no colineales. Esto equivale a afirmar que cualquier MCD puede expresarse como el producto de, a lo sumo, tres rotaciones elementales no colineales. Dados 3 ángulos de Euler φ, θ, ψ es necesario aún especificar la secuencia *i-j-k* de los ejes alrededor de los cuales son aplicadas las rotaciones. Una misma rotación resultante puede obtenerse usando cualquier secuencia de ejes siempre que no haya dos ejes consecutivos iguales (Wertz,

1988, Ap. E). Esto da lugar a 6 permutaciones con 3 ejes distintos (o de tipo I, tal como la secuencia 3-2-1 en el ejemplo (3.53)-(3.56)) más 6 secuencias con los ejes 1º y 3º coincidentes (ó de tipo II). Así, 12 secuencias diferentes pueden dar lugar a una misma rotación resultante (y por consiguiente a una misma MCD) por lo que esta representación sólo resulta unívoca una vez especificada la secuencia de ejes elegida. Como el lector podrá advertir, las secuencias de tipo I conducirán siempre a singularidades para un valor del ángulo intermedio $\theta = \pm\pi/2$ (ver Eqs. (3.56) a (3.58)). En cambio, para las secuencias del tipo II en que $i \equiv k$, la singularidad se presentará cuando el ángulo intermedio adopte el valor $\theta = \pi$ condición, en este caso, para que φ *y* ψ constituyan rotaciones superpuestas alrededor de un mismo eje de la terna de referencia. Las ambigüedades de este caso son evitadas imponiendo $\theta \in (0, \pi]$.

Su claro significado geométrico ha asegurado a esta parametrización una amplia difusión en aplicaciones tanto aeronáuticas, marítimas como espaciales. Con el *eje y ángulo de Euler* esta representación comparte la ventaja de no poseer parámetros redundantes (dada la secuencia de ejes) aunque también la desventaja de una compleja regla de composición.

3.8.2 Ecuación cinemática de los ángulos de Euler

Como vimos, la triada de ángulos de Euler son rotaciones aplicadas en una dada secuencia alrededor de ejes preestablecidos de una terna $\{\mathbf{b}\}$ en rotación respecto de otra terna $\{\mathbf{a}\}$. A continuación ilustramos el procedimiento para formular las ecuaciones cinemáticas para el caso desarrollado en el párrafo anterior, es decir, para la secuencia: $(\varphi@\boldsymbol{x}'')(\theta@\boldsymbol{y}')(\psi@\boldsymbol{z})$. El lector podrá extender el procedimiento a otras secuencias de rotaciones. Si la rotación fuese solamente, por ejemplo, alrededor de los ejes $\boldsymbol{z}$ ó $\boldsymbol{x}''$ la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{ab}$ entre las ternas sería, respectivamente: $\boldsymbol{\omega}_{ab} = \dot{\psi}\mathbf{z}$ ó $\boldsymbol{\omega}_{ab} = \dot{\varphi}\mathbf{x}''$. Cuando el cambio ocurre simultáneamente en los tres ángulos, la velocidad angular entre ambas ternas es la composición vectorial de las velocidades angulares en cada eje. Expresada en coordenadas de $\{\mathbf{b}\}$ dicha velocidad angular resulta.

$$\boldsymbol{\omega}_{ab}^{b} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{x}'')^{b} + \dot{\theta}(\boldsymbol{y}')^{b} + \dot{\psi}(\boldsymbol{z})^{b} \tag{3.59}$$

Teniendo en cuenta la composición de MCD de la Ec. (3.53) y la Fig. 3.9, se determinan las coordenadas de $\boldsymbol{\omega}_{ab}^{b}$ del siguiente modo:

$$\boldsymbol{\omega}_{ab}^{b} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{x}'')^{b} + \dot{\theta}(\boldsymbol{y}')^{b} + \dot{\psi}\boldsymbol{z}^{b} = \dot{\varphi}\boldsymbol{x}^{b} + \dot{\theta}C_{b'}^{b}\boldsymbol{y}^{b'} + \dot{\psi}C_{a}^{b}\boldsymbol{z}^{a}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ab}^{b} = \dot{\varphi}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \dot{\theta}C_{b''}^{b}C_{b'}^{b''}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \dot{\psi}C_{a}^{b}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\cos\theta\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} \triangleq \mathbf{M}_{321}^{-1}(\phi,\theta)\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} \tag{3.60}$$

En la segunda de las (3.60) se usaron las relaciones: $\boldsymbol{x}^{b} = e_1$; $\boldsymbol{y}^{b'} = e_2$; $\boldsymbol{z}^{a} = e_3$, donde e_i es la i-ésima columna de la matriz identidad I_3. La Matriz $\mathbf{M}_{321}$ convierte las derivadas de los ángulos de Euler para la secuencia elegida (321) en la velocidad angular. Finalmente, la ecuación cinemática de los ángulos de Euler se escribe a partir de la Ec. (3.60), mediante:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{321}(\phi,\theta)\boldsymbol{\omega}_{ab}^{b} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{sen}\varphi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi/\cos\theta & \cos\varphi/\cos\theta \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ab}^{b} \tag{3.61}$$

Ese importante destacar que las ecuaciones anteriores resultan singulares en el pasaje de θ por $\theta=\pm\pi/2$. Como se mostró en el párrafo anterior esta singularidad esta asociada a la abrupta indistinguibilidad entre los ángulos φ y ψ y a la consiguiente indefinición de sus valores. Este hecho constituye una seria limitación para el uso de esta parametrización en la integración numérica de las ecuaciones cinemáticas de la orientación.

3.9 Parámetros simétricos de Euler o cuaterniones

Dada una rotación $\boldsymbol{\theta}_{ba} : \{\mathbf{a}\} \rightarrow \{\mathbf{b}\}$ con componentes del eje $\breve{\boldsymbol{\theta}}_{ba}$ (en cualquiera de ambas ternas): $\breve{\theta}_x = \cos\alpha$, $\breve{\theta}_z = \cos\gamma$, $\breve{\theta}_y = \cos\beta$ (ver Fig. 3.10); definimos el *cuaternión* $\mathbf{q}_b^a = \mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}_{ba}) \in \mathbb{R}^4$ y su *conjugado* $\mathbf{q}_b^{a*}$ asociados a la rotación como:

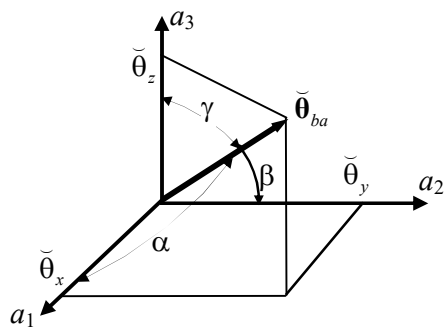


Figura 3.10: Representación del eje de Euler.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_b^a &= \mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}_{ba}) \triangleq \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{q}}_b^a \\ \hline q_{b\,4}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \breve{\boldsymbol{\theta}}_{ba}\sin(\theta_{ba}/2) \\ \hline \cos(\theta_{ba}/2) \end{bmatrix} \\ \mathbf{q}_b^{a*} &\triangleq \begin{bmatrix} -\vec{\mathbf{q}}_b^a \\ \hline q_{b\,4}^a \end{bmatrix} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}_{ab}) \end{aligned} \tag{3.62}$$

Donde: $\theta_{ba} = \|\boldsymbol{\theta}_{ba}\|$; $q_{b\,4}^a = \cos(\theta_{ba}/2) \in \mathbb{R}$ es la "*parte escalar*" del cuaternión y $\vec{\mathbf{q}}_b^a = \sin(\theta_{ba}/2)\breve{\boldsymbol{\theta}}_{ba} \in \mathbb{R}^3$ la "*parte vectorial*". También es usual la siguiente notación [vector, escalar]: $\mathbf{q}_b^a = [\vec{q}_b^a, q_{b\,4}^a]$, $\vec{\mathbf{q}}_b^a = \vec{\mathbf{q}} = [q_1 \;\; q_2 \;\; q_3]^T$

De la definición surge claramente que el cuaternión tiene norma unitaria, es decir: $\left\|\mathbf{q}_a^b\right\|^2 \triangleq \mathbf{q}_a^{bT}\mathbf{q}_a^b = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$.

3.9.1 Dos cuaterniones para una misma rotación

Dado un versor de dirección arbitraria $\breve{\boldsymbol{\theta}}$ en $\mathbb{R}^3$ (ver Fig. 3.11), consideramos los ángulos vectoriales: $\boldsymbol{\theta} = \theta\breve{\boldsymbol{\theta}}$ y $\boldsymbol{\theta}' = \theta'(-\breve{\boldsymbol{\theta}})$ con $\theta' = (2\pi - \theta)$. Claramente, $\theta \in [0, 2\pi) \Rightarrow \theta' \in [0, 2\pi)$ y ambos ángulos representan la misma rotación.

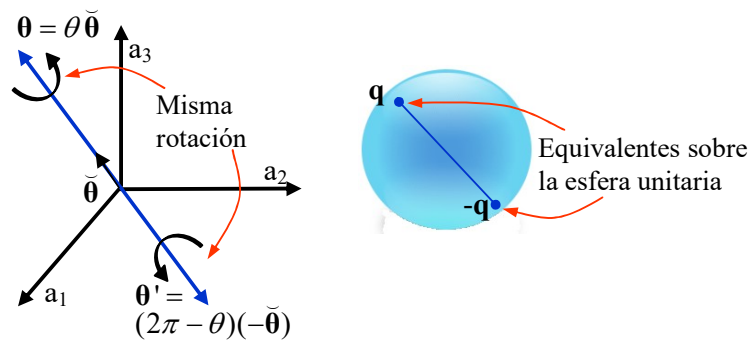


Figura 3.11: Dos cuaterniones para una rotación.

Ahora bien, a partir de la definición (3.62) el cuaternión $\mathbf{q}'(\boldsymbol{\theta}')$ asociado a la rotación $\boldsymbol{\theta}'$ resulta ser:

$$\mathbf{q}'(\boldsymbol{\theta}') = \begin{bmatrix} (-\breve{\boldsymbol{\theta}})\sin(\pi - \theta/2) \\ \hline \cos(\pi - \theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\breve{\boldsymbol{\theta}}\sin(\theta/2) \\ \hline -\cos(\theta/2) \end{bmatrix} = -\mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}) \tag{3.63}$$

Con lo cual, en la esfera de los cuaterniones unitarios cada cuaternión es equivalente a su simétrico respecto del origen. La ambigüedad debida a la no-unicidad de la representación de las rotaciones mediante cuaterniones se evita limitando las rotaciones posibles al rango $[-\pi, \pi)$. Esto se logra evitando el cruce por cero de la componente escalar: $q_4 = \cos(\theta/2)$.

3.9.2 Relación entre cuaterniones y MCD

Usando las definiciones anteriores y las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\sin(\theta) = 2\sin\theta/2\cos\theta/2; \quad 1 - \cos\theta = 2\sin^2\theta/2;$$

de las expresiones (3.26) surgen las siguientes expresiones que permiten calcular la MCD en función del cuaternión o su conjugado asociado a una misma rotación entre ternas: $\mathbf{C}_b^a(\mathbf{q}_b^a)$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{q}) &= I + 2q_4\mathbf{S}(\vec{\mathbf{q}}) + 2\mathbf{S}^2(\vec{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}^*) &= I - 2q_4\mathbf{S}(\vec{\mathbf{q}}) + 2\mathbf{S}^2(\vec{\mathbf{q}}) \end{aligned} \tag{3.64}$$

Sustituyendo en las anteriores las definiciones (3.62) y desarrollando (o bien usando directamente la (3.28)) se obtienen, respectivamente, las expresiones de la MCD en función de las componentes del cuaternión o su conjugado:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_4^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_3q_4) & 2(q_1q_3 + q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 + q_3q_4) & q_4^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 - q_2q_4) & 2(q_2q_3 + q_1q_4) & q_4^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}^*) = \begin{bmatrix} q_4^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & q_4^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & q_4^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

Inversamente, los componentes del cuaternión: $\vec{q}$, q_4 pueden calcularse en función de la MCD usando:

$$traza(\mathbf{C}) = traza(\mathbf{C}) = 3q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 4q_4^2 - 1 \Rightarrow q_4 = \pm\frac{1}{2}(traza(\mathbf{C}) + 1)^{1/2} \tag{3.67}$$

$$\mathbf{C}^T - \mathbf{C} = 4q_4\mathbf{S}(\vec{q}) \Rightarrow \mathbf{S}(\vec{q}) = \pm\frac{1}{2(1 + traza\mathbf{C})^{1/2}}[\mathbf{C}^T - \mathbf{C}] \tag{3.68}$$

La ambigüedad de signo en las Ecs. (3.67) y (3.68) es sólo aparente ya que como es posible ver de las (3.65) y (3.66) un cambio de signo en todas las componentes del cuaternión produce la misma MCD y por tanto la misma rotación.

3.9.3 Representación hipercompleja y álgebra de cuaterniones

Algunas propiedades importantes de la representación de las rotaciones mediante cuaterniones surgen de la formulación hipercompleja introducida originalmente por W. Hamilton en 1866 y retomada más tarde por Whittaker en 1944:

$$\mathbf{q} \triangleq q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4; \quad \mathbf{q}^* \triangleq -q_1 i - q_2 j - q_3 k + q_4 \tag{3.69}$$

Bajo las reglas de multiplicación:

$$ij = k \text{ (ciclicidad)}; \quad ji = -k \text{ (anticiclicidad)}; \quad ii = -1(antinormalidad) \tag{3.70}$$

Se define el producto o composición de dos cuaterniones **r** y **q** como:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} = \mathbf{rq} &= s_1 i + s_2 j + s_3 k + s_4 \\ &= (r_1 i + r_2 j + r_3 k + r_4)(q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4) \\ &= i(r_4 q_1 - r_3 q_2 + r_2 q_3 + r_1 q_4) + j(r_3 q_1 + r_4 q_2 - r_1 q_3 + r_2 q_4) \\ &\quad + k(-r_2 q_1 + r_1 q_2 + r_4 q_3 + r_3 q_4) - (r_1 q_1 + r_2 q_2 + r_3 q_3) + r_4 q_4 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Lo que en notación matricial resulta:

$$\mathbf{rq} = \left[\begin{array}{ccc|c} r_4 & -r_3 & r_2 & r_1 \\ r_3 & r_4 & -r_1 & r_2 \\ -r_2 & r_1 & r_4 & r_3 \\ \hline -r_1 & -r_2 & -r_3 & r_4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \hline q_4 \end{array}\right] \tag{3.72}$$

Claramente, el producto (3.71) ó (3.72) no es conmutativo es decir: $\mathbf{rq} \neq \mathbf{qr}$. Por otra parte, es fácil verificar que: $(\mathbf{rq})^* = \mathbf{q}^*\mathbf{r}^*$ y además, que: $\mathbf{qq}^* = 0i + 0j + 0k + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$. Por último es fácil comprobar que el elemento unitario del producto (3.71) es: $\mathbf{q}_o \triangleq$ 0i+ 0j+ 0k+1. Utilizando la notación [vector, escalar] introducida después de la Ec. (3.62), el producto (3.71) o (3.72) se reescribe a su vez como:

$$\mathbf{rq} = [\vec{\mathbf{r}},\, r_4][\vec{\mathbf{q}},\, q_4] == \left[\begin{array}{c|c} r_4\mathbf{I} + S(\vec{\mathbf{r}}) & \vec{\mathbf{r}} \\ \hline -\vec{\mathbf{r}}^T & r_4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \vec{\mathbf{q}} \\ q_4 \end{array}\right] = [r_4\vec{\mathbf{q}} + q_4\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{q}},\, r_4 q_4 - \vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{q}}] \tag{3.73}$$

3.9.4 Transformación de vectores de $\mathbb{R}^3$ mediante cuaterniones

Sean: una rotación $\boldsymbol{\theta}_{ba} : \{\mathbf{a}\} \to \{\mathbf{b}\}$, un vector $\mathbf{v}^a \in \mathbb{R}^3$ expresado en componentes de la terna $\{\mathbf{a}\}$ y el cuaternión $\mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}_{ba}) = [\vec{\mathbf{q}},\, q_4]$, definido en la Ec. (3.62). Definimos la "*cuaternización*" de $\mathbf{v}^a$: $\mathbf{v}_q^a \triangleq [\mathbf{v}^a,\, 0]$ y, aplicando las reglas introducidas arriba, calculamos el producto:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_a^b \mathbf{v}_q^a (\mathbf{q}_a^b)^* &= \left[\begin{array}{c|c} q_4\mathbf{I} + S(\vec{\mathbf{q}}) & \vec{\mathbf{q}} \\ \hline -\vec{\mathbf{q}}^T & q_4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{v}^a \\ 0 \end{array}\right](\mathbf{q}_a^b)^* = \left[\begin{array}{c} q_4\mathbf{v}^a + S(\vec{\mathbf{q}})\mathbf{v}^a \\ \hline -\vec{\mathbf{q}} \bullet \mathbf{v}^a \end{array}\right](\mathbf{q}_a^b)^* \\
&= \left(\mathbf{q}_a^b \left[\begin{array}{c} -q_4\mathbf{v}^a - S(\vec{\mathbf{q}})\mathbf{v}^a \\ \hline -\vec{\mathbf{q}} \bullet \mathbf{v}^a \end{array}\right]\right)^* = \left(\left[\begin{array}{c|c} q_4\mathbf{I} + S(\vec{\mathbf{q}}) & \vec{\mathbf{q}} \\ \hline -\vec{\mathbf{q}}^T & q_4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} -q_4\mathbf{v}^a - S(\vec{\mathbf{q}})\mathbf{v}^a \\ \hline -\vec{\mathbf{q}} \bullet \mathbf{v}^a \end{array}\right]\right)^* \\
&= \left[\begin{array}{c} -\left((q_4)^2\mathbf{I} + 2q_4 S(\vec{\mathbf{q}}) + S^2(\vec{\mathbf{q}}) + \vec{\mathbf{q}}\vec{\mathbf{q}}^T\right)\mathbf{v}^a \\ \hline \vec{\mathbf{q}}^T(\vec{\mathbf{q}} \times \mathbf{v}^a) \end{array}\right]^*
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Si en la anterior se usan la identidad matricial (que el lector podrá verificar): $S^2(\vec{\mathbf{q}}) + \|\vec{\mathbf{q}}\|^2\mathbf{I} = \vec{\mathbf{q}}\vec{\mathbf{q}}^T$, junto con las relaciones $\|\mathbf{q}_b^a\|^2 = 1$ y (3.64), se obtiene la regla de transformación de coordenadas mediante cuaterniones.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{q}_a^b \mathbf{v}_q^a (\mathbf{q}_a^b)^* = \left[\begin{array}{c} \left(\mathbf{I} + 2q_4 S(\vec{\mathbf{q}}) + 2S^2(\vec{\mathbf{q}})\right)\mathbf{v}^a \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{C}_a^b(\mathbf{q}_a^b)\mathbf{v}^a \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}^b \\ \hline 0 \end{array}\right] = \mathbf{v}_q^b \\
&\Rightarrow \mathbf{v}_q^b \mathbf{q}_a^b = \mathbf{q}_a^b \mathbf{v}_q^a
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Consideremos ahora las ternas {**a**}, {**b**} y {**c**}. Los ángulos vectoriales $\boldsymbol{\theta}_{ab}/\boldsymbol{\theta}_{bc}/\boldsymbol{\theta}_{ac}$ se corresponden, respectivamente, con las rotaciones "desde" las ternas {**b**}/{**c**}/{**c**} "hacia" las ternas {**a**}/{**b**}/{**a**}. Usando la definición (3.62) establecemos los respectivos cuaterniones:

$$\mathbf{q}_a^b = \begin{bmatrix} \breve{\boldsymbol{\theta}}_{ab} \sin\theta_{ab}/2 \\ \hdashline \cos\theta_{ab}/2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}_b^c = \begin{bmatrix} \breve{\boldsymbol{\theta}}_{bc} \sin\theta_{bc}/2 \\ \hdashline \cos\theta_{bc}/2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}_a^c = \begin{bmatrix} \breve{\boldsymbol{\theta}}_{ac} \sin\theta_{ac}/2 \\ \hdashline \cos\theta_{ac}/2 \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

Sean ahora $\mathbf{v}_q^a, \mathbf{v}_q^b, \mathbf{v}_q^c$ las cuaternizaciones de las representaciones en coordenadas de un dado vector **v** según las ternas arriba indicadas. Usando sucesivamente la regla (3.75), se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_q^b &= \mathbf{q}_a^b \mathbf{v}_q^a (\mathbf{q}_a^b)^* \\ \mathbf{v}_q^c &= \mathbf{q}_b^c \mathbf{v}_q^b (\mathbf{q}_b^c)^* \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{v}_q^c = \mathbf{q}_b^c \mathbf{q}_a^b \mathbf{v}_q^a (\mathbf{q}_a^b)^* (\mathbf{q}_b^c)^* = \mathbf{q}_b^c \mathbf{q}_a^b \mathbf{v}_q^a (\mathbf{q}_b^c \mathbf{q}_a^b)^* = \mathbf{q}_a^c \mathbf{v}_q^a (\mathbf{q}_a^c)^* \tag{3.77}$$

Por lo que resulta que el producto obtenido a partir de la representación hipercompleja (3.71), (3.72) y (3.73) da la regla de composición de cuaterniones compatible con la transformación encadenada de coordenadas. Es decir:

$$\mathbf{q}_a^c = \mathbf{q}_b^c \mathbf{q}_a^b \Rightarrow \mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}_{ac}) = \mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}_{bc})\mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}_{ab}) \tag{3.78}$$

Interesa destacar que la anterior define la misma ley de composición entre ángulos vectoriales (3.34) por lo cual resulta:

$$\mathbf{C}_a^c(\mathbf{q}_a^c) = \mathbf{C}_b^c(\mathbf{q}_b^c)\mathbf{C}_a^b(\mathbf{q}_a^b) \tag{3.79}$$

Lo que por otra parte puede verificarse directamente usando las definiciones (3.65) o (3.66).

3.9.5 Relación entre cuaterniones y ángulos de Euler

Consideramos ahora los cuaterniones asociados a las rotaciones elementales de Euler:

$$\mathbf{q}_i(\theta) = \mathbf{q}(\theta\mathbf{e}_i) \triangleq \left[-\mathbf{e}_i \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2} \right] = \left[\vec{\mathbf{q}}(\theta), q_4(\theta) \right]_i; \quad i = 1,2,3 \tag{3.80}$$

Donde los ángulos vectoriales $\theta\mathbf{e}_i$; i=1,2,3 representan rotaciones elementales positivas alrededor, respectivamente, de los ejes coordenados ***x, y, z***. Si el pasaje de la terna {**a**} a la {**b**} corresponde a una secuencia de rotaciones elementales de Euler tal que: {**b**}≡{ϕ@***x***''}{θ@***y***'}{ψ@***z***}{**a**} como en la Ec. (3.53), de acuerdo con la regla de composición (3.78).

$$\mathbf{q}_a^b = \mathbf{q}_1(\phi)\mathbf{q}_2(\theta)\mathbf{q}_3(\psi)$$

Una vez más la notación hipercompleja nos facilita el cálculo de estas composiciones elementales. En efecto partiendo de la definición de productos hipercomplejos (3.71), el cuaternión resultante en notación se obtiene según:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_a^b &= \mathbf{q}_1(\phi)\mathbf{q}_2(\theta)\mathbf{q}_3(\psi) = (-i\sin\frac{\phi}{2}+\cos\frac{\phi}{2})(-j\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})(-k\sin\frac{\psi}{2}+\cos\frac{\psi}{2})\\ &= i\left(-\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}\right)+j\left(-\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\phi}{2}-\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}\right)+\\ &+k\left(-\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}+\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}\right)+\left(\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}\right)\end{aligned} \tag{3.81}$$

Los cuaterniones ofrecen una parametrización muy eficaz de la orientación debido que sólo tienen un parámetro redundante comparado con 6 de las MCD lo que se refleja en importantes ventajas computacionales mientras que comparten con las MCD una ley sencilla de composición. Esta última propiedad los hace preferibles en ciertos casos a otras parametrizaciones como los *ángulos de Euler* o el *ángulo vectorial de rotación (eje y ángulo de Euler)* que, aunque sin parámetros redundantes no poseen una ley de composición sencilla. Otra ventaja respecto de estas últimas parametrizaciones es la de no presentar singularidades o ambigüedades para ningún valor de sus parámetros que deba resolverse con información suplementaria. Cabe sin embargo señalar como desventaja cierta dificultad para interpretar geométricamente el sentido de sus parámetros.

3.9.6 Diferencial y ecuación cinemática del cuaternión

Tal como para la MCD, consideramos: dos ternas $\{\mathbf{a}\}$ y $\{\boldsymbol{b}\}$ distantes de un ángulo vectorial $\boldsymbol{\theta}_{ba}$; dos ternas $\{\hat{\mathbf{a}}\}$ y $\{\hat{\mathbf{b}}\}$ separadas de las primeras, respectivamente, por los pequeños ángulos vectoriales $\delta\boldsymbol{\theta}_b$ y $\delta\boldsymbol{\theta}_a$ (ver Fig. 3.6) y definimos: $\varepsilon \triangleq \max(\delta\theta_b, \delta\theta_a)$. De la definición (3.62) y el desarrollo de 1º orden de las funciones seno y coseno, resultan las siguientes expresiones para los cuaterniones cuasi- identidades:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{\hat{b}}^{b} &= \begin{bmatrix}\frac{\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{b}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\delta\theta_{\mathrm{b}}^2}}\end{bmatrix}+o(\varepsilon)=\begin{bmatrix}\frac{\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{b}}}{1}\end{bmatrix}+o(\varepsilon)=\begin{bmatrix}\frac{\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{b}}}{0}\end{bmatrix}+\mathbf{q}_0+o(\varepsilon);\\ \mathbf{q}_{a}^{\hat{a}} &= \begin{bmatrix}\frac{-\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{a}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\delta\theta_{\mathrm{a}}^2}}\end{bmatrix}+o(\varepsilon)\approx\begin{bmatrix}\frac{-\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{a}}}{1}\end{bmatrix}+o(\varepsilon)=-\begin{bmatrix}\frac{\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{a}}}{0}\end{bmatrix}+\mathbf{q}_0+o(\varepsilon)\end{aligned} \tag{3.82}$$

Donde se usó la definición del cuaternión identidad: $\mathbf{q}_0 = \left[\mathbf{0}^T \;\middle|\; 1\right]^T$. Considerando ahora los cuaterniones cercanos $\mathbf{q}_b^a(\boldsymbol{\theta}_{ba})$ y $\mathbf{q}_{\hat{b}}^{\hat{a}}(\boldsymbol{\theta}_{\hat{b}\hat{a}}) = \mathbf{q}_a^{\hat{a}}\mathbf{q}_b^a\mathbf{q}_{\hat{b}}^b$, evaluamos la diferencia:

$$\Delta\mathbf{q}_b^a \triangleq \mathbf{q}_b^a - \mathbf{q}_{\hat{b}}^{\hat{a}} = \mathbf{q}_b^a - \mathbf{q}_a^{\hat{a}}\mathbf{q}_b^a\mathbf{q}_{\hat{b}}^b, \tag{3.83}$$

Substituyendo las (3.82), la anterior puede rescribirse como:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{q}_b^a &\triangleq \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\theta}_a\\ \hline 0\end{bmatrix}\mathbf{q}_b^a - \tfrac{1}{2}\mathbf{q}_b^a\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\theta}_b\\ \hline 0\end{bmatrix} + o(\varepsilon)\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{q}_b^a\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\theta}_a^b - \delta\boldsymbol{\theta}_b\\ \hline 0\end{bmatrix} + o(\varepsilon) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\theta}_a - \delta\boldsymbol{\theta}_b^a\\ \hline 0\end{bmatrix}\mathbf{q}_b^a + o(\varepsilon)\end{aligned} \tag{3.84}$$

Donde las 2ª y 3ª igualdades se obtienen usando la segunda de las Ecs. (3.75) y factorizando luego $\mathbf{q}_b^a$ a derecha o izquierda según corresponda. Reutilizamos aquí los pequeños ángulos $\delta\boldsymbol{\theta}_{ab}^b \sim \mathbf{C}_a^b\delta\boldsymbol{\theta}_a - \delta\boldsymbol{\theta}_b$ y $\delta\boldsymbol{\theta}_{ab}^a \sim \mathbf{C}_b^a\boldsymbol{\theta}_{ab}^b$ (introducidos en las Ecs. (3.46)) para escribir la parte lineal de diferencia (3.83) ó (3.84) con lo que resultan las dos formas alternativas de la diferencial del cuaternión que se corresponden con las (3.47) para la MCD.

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{q}_b^a(\delta\boldsymbol{\theta}^b) &= \tfrac{1}{2}\mathbf{q}_b^a\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\theta}_{ab}^b\\ \hline 0\end{bmatrix}\\ \delta\mathbf{q}_b^a(\delta\boldsymbol{\theta}^a) &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\theta}_{ab}^a\\ \hline 0\end{bmatrix}\mathbf{q}_b^a\end{aligned} \tag{3.85}$$

Para establecer las ecuaciones cinemáticas del cuaternión, nos referimos nuevamente a la Fig. 3.7 y las magnitudes allí definidas con $\boldsymbol{\theta}_{b^+b} : \{\mathbf{b}(t)\} \to \{\mathbf{b}(t^+)\}$ el ángulo recorrido por la terna $\{\mathbf{b}(\mathrm{t})\}$ en rotación diferenciable entre t y $t+\Delta t$ lo que implica que $\Delta t \to 0 \Rightarrow \left\|\boldsymbol{\theta}_{b^+b}\right\| \to 0$. Consideramos la variación $\partial\mathbf{q}_b^a = \mathbf{q}_{b(t^+)}^a - \mathbf{q}_{b(t)}^a$ con $\mathbf{q}_{b(t^+)}^a = \mathbf{q}_{b(t)}^a\mathbf{q}_{b(t^+)}^{b(t)}$ evaluamos los siguientes límites de cociente incremental:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_b^a &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\partial\mathbf{q}_b^a}{\Delta t} = \mathbf{q}_b^a\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{q}_{b(t^+)}^{b(t)} - \mathbf{q}_0) = \frac{1}{2}\mathbf{q}_b^a\begin{bmatrix}\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\boldsymbol{\theta}_{b^+b}}{\Delta t}\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{q}_b^a\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}_{ab}^b(t)\\ 0\end{bmatrix}\\ \dot{\mathbf{q}}_b^a &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}_{ab}^a(t)\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{q}_b^a\end{aligned} \tag{3.86}$$

Donde, la última igualdad resulta de la expresión para la velocidad angular vectorial instantánea dada por las Ecs. (3.50) (nótese que el ángulo $\boldsymbol{\theta}_{\hat{b}b}$ tiene el mismo sentido positivo de rotación que $\boldsymbol{\omega}_{ab}(t)$). Las Ecs. diferenciales (3.86) describen la evolución temporal del cuaternión $\mathbf{q}_b^a$ función de la rotación "acumulada" $\boldsymbol{\theta}_{ba}$ desde la terna $\{\mathbf{a}\}$ hacia la terna $\{\mathbf{b}\}$ en el instante t. La función forzante es la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{ab}(t)$ de la terna $\{\mathbf{b}\}$ respecto de $\{\mathbf{a}\}$.

Usando la propiedad del conjugado de una composición de cuaterniones, de la Ec. (3.86) se obtiene la ecuación diferencial para $\mathbf{q}_a^b = \mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}_{ab})$.

$$(\dot{\mathbf{q}}_b^a)^* = \dot{\mathbf{q}}_a^b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ab}^b \\ 0 \end{bmatrix}^* \mathbf{q}_a^b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ba}^b \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_a^b \tag{3.87}$$

Notar que la inversión del signo de la velocidad angular es consistente con el cambio de sentido de la rotación de $\boldsymbol{\theta}_{ba}$ a $\boldsymbol{\theta}_{ab}$. Intercambiando los índices se obtienen las distintas versiones de las ecuaciones cinemáticas del cuaternión correspondientes a las Ecs. (3.20) para la MCD según sea el sistema de coordenadas al que esté referida la velocidad angular entre las ternas.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_b^a &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ab}^a \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_b^a \Rightarrow \dot{\mathbf{q}}_a^b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ba}^b \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_a^b \\ \dot{\mathbf{q}}_b^a &= \frac{1}{2}\mathbf{q}_b^a \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ab}^b \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{q}}_a^b = \frac{1}{2}\mathbf{q}_a^b \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ba}^a \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.88}$$

3.10 Cinemática del ángulo vectorial de rotación: Ecuación del "coneo"

Como vimos, el ángulo vectorial instantáneo entre dos ternas que giran relativamente queda asociado ya sea a la MCD mediante la Ec. (3.24) o al cuaternión definido por las Ecs. (3.62). Esto ofrece al menos dos vías para formular una ecuación diferencial para $\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)$: a) el desarrollo empleado por Bortz (1971) que consiste en reemplazar la (3.24) en cualquiera de las (3.20), o b) reemplazar la (3.62) en cualquiera de las (3.88) siguiendo a Savage (1997, 3.3.1 parte I). Los pasos algebraicos resultan un poco más sencillos en el segundo caso por lo que elegiremos ese camino para nuestro desarrollo. Tomamos por caso la última de las Ecs. (3.88) rescrita usando la expresión del producto (3.73) según la notación [vector, escalar]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_b^a &= \frac{1}{2}\left[\frac{\boldsymbol{\theta}_{ba}}{\theta_{ba}}\sin\frac{\theta_{ba}}{2}, \cos\frac{\theta_{ba}}{2}\right]\left[\boldsymbol{\omega}_{ab}^b, 0\right] \\ &= \frac{1}{2}[\cos\frac{\theta_{ba}}{2}\boldsymbol{\omega}_{ab}^b + \frac{1}{\theta_{ba}}\sin\frac{\theta_{ba}}{2}\boldsymbol{\theta}_{ba}\times\boldsymbol{\omega}_{ab}^b, -\frac{1}{\theta_{ba}}\sin\frac{\theta_{ba}}{2}\boldsymbol{\theta}_{ba}\bullet\boldsymbol{\omega}_{ab}^b] \end{aligned} \tag{3.89}$$

Para simplificar la notación durante el desarrollo denotamos:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{ab}^b;\ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_{ba};\ \mathbf{q} = \mathbf{q}_b^a;\ \theta = \|\boldsymbol{\theta}\| \tag{3.90}$$

e introducimos las siguientes funciones y sus derivadas:

$$f_1 \triangleq \cos\frac{\theta}{2};\ f_2 \triangleq \frac{1}{\theta}\sin\frac{\theta}{2} \tag{3.91}$$

$$\dot{f}_1 = -\frac{1}{2}\dot{\theta}\sin\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}\theta\dot{\theta}f_2;$$
$$\dot{f}_2 = \frac{1}{2}\frac{\cos\theta/2}{\theta}\dot{\theta} - \frac{\sin\theta/2}{\theta^2}\dot{\theta} = \frac{f_2\dot{\theta}}{\theta}\left(\frac{f_1}{2f_2} - 1\right) \tag{3.92}$$

Substituyendo las Ecs. (3.91) y (3.92) en la Ec. (3.89) se obtiene:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\left[f_2\boldsymbol{\theta}, f_1\right]\left[\boldsymbol{\omega}, 0\right] = \frac{1}{2}\left[f_2\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega} + f_1\boldsymbol{\omega}, -f_2\boldsymbol{\theta}\bullet\boldsymbol{\omega}\right] \tag{3.93}$$

Mientras que por otra parte derivando el cuaternión respecto del tiempo resulta:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt}\left[f_2\boldsymbol{\theta}, f_1\right] = \left[\dot{f}_2\boldsymbol{\theta} + f_2\dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{f}_1\right] \tag{3.94}$$

Igualando las partes escalar y vectorial de las (3.93) y (3.94) surgen las igualdades:

$$\dot{f}_1 = -\frac{1}{2}\theta\dot{\theta}f_2 = -\frac{1}{2}f_2\boldsymbol{\theta}\bullet\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \theta\dot{\theta} = \boldsymbol{\theta}\bullet\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \frac{\dot{\theta}}{\theta} = \frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}\bullet\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \dot{f}_2 = \frac{f_2}{\theta^2}\left(\frac{f_1}{2f_2} - 1\right)\boldsymbol{\theta}\bullet\boldsymbol{\omega} \tag{3.95}$$

$$\dot{f}_2\boldsymbol{\theta} + f_2\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2}\left(f_2\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega} + f_1\boldsymbol{\omega}\right) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2}\frac{f_1}{f_2}\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\theta^2}\left(\frac{f_1}{2f_2} - 1\right)(\boldsymbol{\theta}\bullet\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\theta} \tag{3.96}$$

De la Ec. (3.96) surge la ecuación de estado para el vector $\boldsymbol{\theta}$ después de sustituir las definiciones de f_1 y $\dot{f}_2$. Finalmente, usando las identidades:

$$\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)\vec{u} = \vec{u}\times\left(\vec{u}\times\vec{v}\right) + u^2\vec{v}, \qquad \tan(\theta/2) = \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \tag{3.97}$$

A partir de la (3.96) y retomando la notación original se obtiene la ecuación diferencial nolineal para el ángulo de rotación $\boldsymbol{\theta}_{ba}$ siguiente:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{ba}^b = \boldsymbol{\omega}_{ab}^b + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}_{ba}\times\boldsymbol{\omega}_{ab}^b + \frac{1}{\theta_{ba}^2}\left(1 - \frac{\theta_{ba}\sin\theta_{ba}}{2(1-\cos\theta_{ba})}\right)\boldsymbol{\theta}_{ba}\times\left(\boldsymbol{\theta}_{ba}\times\boldsymbol{\omega}_{ab}^b\right); \quad \boldsymbol{\theta}_{ba}(t_o) = \boldsymbol{\theta}_{ba}^0 \tag{3.98}$$

Cuando se substituye la solución de (3.98) en la Ec. (3.24) y en las Ecs. (3.62) se obtienen, respectivamente, las soluciones para $t \geqslant t_o$ de la ecuación cinemática de la MCD (3.18) y la correspondiente del cuaternión (3.88), de este modo, usando las (3.24) y (3.62) se tiene:

$$\mathbf{C}_b^a(t) = \exp(\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)) = \mathbf{I} + \frac{\operatorname{sen}\theta_{ba}(t)}{\theta_{ba}(t)}\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)) + \frac{(1-\cos\theta_{ba}(t))}{\theta_{ba}(t)^2}\mathbf{S}^2(\boldsymbol{\theta}_{ba}(t))$$

$$\mathbf{q}_b^a(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)}{\theta_{ba}(t)}\sin\dfrac{\theta_{ba}(t)}{2} \\ \hline \cos\dfrac{\theta_{ba}(t)}{2} \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

De (3.98) se observa que sólo si $\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)$ se mantiene paralela a $\boldsymbol{\omega}_{ab}^b(t)$ resulta ser $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{ba} = \boldsymbol{\omega}_{ab}^b$. En este caso las rotaciones (alrededor de un eje invariante) son conmutativas, es decir no dependen del orden en que son ejecutadas. La composición no conmutativa de dos ángulos de rotación no paralelos, ej.: $\boldsymbol{\theta}_1$ seguido de $\boldsymbol{\theta}_2$, puede obtenerse mediante el artificio de hacer $\boldsymbol{\theta}(t_0) = \boldsymbol{\theta}_1$ en la (3.98), expresar a $\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\omega}T$ como una rotación uniforme con velocidad angular constante durante un tiempo T y hallar la solución de la solución de la Ec. diferencial (3.98) en t=T. Geométricamente, la no conmutatividad de las rotaciones es consecuencia de los dos últimos términos de la (3.98):

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}_{ba} \times \boldsymbol{\omega}_{ab}^b + \frac{1}{\theta_{ba}^2}\left(1 - \frac{\theta_{ba}\sin\theta_{ba}}{2(1-\cos\theta_{ba})}\right)\boldsymbol{\theta}_{ba} \times \left(\boldsymbol{\theta}_{ba} \times \boldsymbol{\omega}_{ab}^b\right) \tag{3.100}$$

que resulta de la interacción entre el ángulo de rotación y la velocidad angular. Notar que $\dot{\sigma}$ es ortogonal a $\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)$ por lo cual, cuando $\dot{\sigma} \neq 0$, genera en $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{ba}$ una componente ortogonal a $\boldsymbol{\theta}_{ba}(t)$ que provoca la rotación de éste último vector.

La Ec. (3.98), introducida por Laning en 1949, recibe en la literatura el nombre de ecuación de "*coneo*" motivado por el movimiento de precesión, por ejemplo de un trompo, cuyo eje de rotación parece rotar alrededor de otro eje invariante generalmente vertical del piso. Esta ecuación fue utilizada por primera vez en navegación por Bortz (1971) en un algoritmo de alta velocidad para la integración de la orientación y, como veremos en el Capítulo 7, constituye la base del cálculo de la orientación de los algoritmos *strapdown* modernos.

Capítulo 4
Geometría de la Tierra, Ternas de Referencia y Gravedad

El propósito de un sistema de navegación es proveer en todo instante la posición, velocidad y orientación de un vehículo con referencia a uno o más sistemas de coordenadas de interés para la aplicación específica. En las aplicaciones en un entorno cercano a la Tierra, ésta última es una referencia obligada para los sistemas de navegación. Distinguimos dos tipos de ternas de referencia o *ternas de navegación* vinculadas a nuestro planeta: a) Ternas centrales cuyo origen está en el centro de la Tierra y su orientación es independiente de la posición del vehículo y b) Ternas locales cuya orientación y/u origen dependen de la posición del vehículo. Para referir la posición y orientación del vehículo respecto de la terna de navegación, conviene definir la *terna del cuerpo* con origen a bordo del vehículo asociada a algún punto de interés del mismo, por ejemplo: su centro de gravedad, la unidad de mediciones inerciales (UMI) o algún otro instrumento transportado como, sensores remotos, antena GPS, etc.

Dado que las ecuaciones de la mecánica se enuncian de modo diferente según estén o no referidas a un sistema inercial, resulta necesario, además, distinguir las ternas inerciales de las que no lo son. Las primeras, idealmente "animadas de un movimiento lineal uniforme" o bien "fijas respecto de las estrellas", son aquellas que, al menos desde un punto de vista práctico, verifican las leyes de Newton en su forma más simple. Contrariamente, las ternas no inerciales son solidarias a un objeto en rotación o en movimiento no uniforme (como la Tierra o el mismo vehículo).

En la mayoría de las aplicaciones (excepto en vehículos extraplanetarios) la Tierra es el mayor objeto masivo cercano al vehículo y, por consiguiente, determina la componente más importante del campo gravitacional que lo afecta (en general los efectos de la Luna y del Sol pueden despreciarse en vehículos terrestres o atmosféricos pero no siempre en aplicaciones satelitales). Las fuerzas gravitacionales compuestas con las no gravitacionales, que impulsan o sustentan al vehículo, determinan su aceleración instantánea y, por consiguiente, su trayectoria. Por lo tanto, dado que no es posible medir directamente la aceleración gravitacional a bordo de un vehículo (ver Capítulo 2), los algoritmos de navegación incorporan un modelo matemático de la gravitación que les permite calcular la aceleración instantánea resultante.

Como veremos, la descripción gravitacional de la Tierra está íntimamente relacionada con su forma, la cual, a su vez, resulta crucial tanto para la definición de las ternas de referencia como para la determinación de las transformaciones de coordenadas que las vinculan.

Son objeto de este Capítulo, algunos principios básicos de geodesia y gravitación que atañen a la navegación en la vecindad de la Tierra, así como la descripción de las principales ternas de referencia utilizadas en la práctica.

4.1 Geometría de la Tierra

Siendo el objeto de la Geodesia el estudio de la forma terrestre, esta ciencia ofrece principios y resultados fundamentales para los fines de este Capítulo. Tal vez el primer concepto que es dado introducir para describir la forma terrestre es el de "*superficie equipotencial*", entendiéndose por tal a toda superficie sobre la cual un nivel de burbuja hipotético mantendría su indicación invariante. Las superficies equipotenciales son cerradas sobre sí mismas y encastradas como las capas de una cebolla, cada una conteniendo al centro de masa de la Tierra. Estas superficies pueden estar parcialmente (o aun totalmente) debajo de la superficie terrestre. En el último caso, su geometría quedará determinada tanto por la fuerza gravitacional ejercida por la masa terrestre encerrada por la superficie equipotencial como por la que ejerce la porción de masa terrestre al exterior de la misma. De ser despreciables los efectos atmosféricos (distribución no uniforme de la presión atmosférica, presión del viento sobre su superficie, etc.) la superficie de un líquido en reposo sobre la Tierra constituye una porción de superficie equipotencial. Deberá notarse que, aún en ausencia de efectos atmosféricos, la superficie de un líquido en reposo no está determinada solamente por la fuerza gravitacional (principalmente terrestre pero también solar y lunar) sino también por la fuerza centrífuga originada por la rotación terrestre. Lo anterior justifica distinguir entre aceleración gravitacional aparente, que llamaremos *gravedad*, y la aceleración gravitacional a secas, que llamaremos *gravitación*. La primera corresponde al vector gradiente del potencial gravitacional combinado con la centrífuga debida a la rotación terrestre, mientras la segunda es, exclusivamente, el gradiente del potencial gravitacional. Claramente, la gravedad es en todo punto ortogonal a las superficies equipotenciales introducidas más arriba y co-lineal con la línea de la plomada local.

4.1.1 El Geoide y Otras Superficies de Referencia

Se define al Geoide terrestre como: La superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre que mejor aproxima al nivel medio de los océanos en el sentido de los mínimos cuadrados. El Geoide ha sido usado tradicionalmente como referencia global para medir alturas.

Las perturbaciones gravitacionales debidas a la Luna y al Sol producen movimientos periódicos sensibles tanto en la corteza terrestre (mareas sólidas) como en las masas oceánicas a los que se suman los movimientos debidos a fuerzas tectónicas. En consecuencia, tanto la gravedad local como las superficies equipotenciales y la superficie del océano varían con el tiempo, de modo que, en rigor, la definición anterior de Geoide sólo tiene sentido en un instante dado. Lo usual es entonces considerar superficies equipotenciales promediadas en un período de tiempo. En particular el Geoide es una superficie promediada sobre los ciclos de las mareas. Aún así, el Geoide promedio varía con el tiempo en función de cambios lentos en la distribución de masas en la Tierra producidos, entre otras, por fuerzas tectónicas. Hechas estas salvedades, cuando se habla de la forma de la Tierra en realidad se alude a la forma del Geoide, principalmente debido a su casi superposición con la superficie oceánica que cubre gran parte del planeta.

Lo irregular de la forma del Geoide y su compleja descripción matemática dificulta, sin embargo, su uso como superficie de referencia en problemas de navegación. Afortunadamente, el Geoide se asemeja a un elipsoide achatado en los polos con una descripción matemática relativamente sencilla. Esto motivó al Comité de Desarrollo del

World Geodetic System a adoptar en 1984 como superficie de referencia un elipsoide geocéntrico de revolución alrededor del eje de los polos terrestres con su diámetro mayor en el plano ecuatorial y su diámetro menor en el eje de rotación nominal. Sucesivas mejoras a este sistema introducidas más tarde concluyeron finalmente en el actual Elipsoide WGS 84 definido por la *National Imagery and Mapping Agency (NIMA)* que describimos más adelante y llamaremos en lo sucesivo *el elipsoide normal*. La excelente aproximación del Geoide por el elipsoide normal se traduce en diferencias de alturas entre ambos inferiores a los 100m en todo el planeta! Cabe destacar que el sistema WGS84 sirve actualmente como referencia para el sistema GPS y otros sistemas satelitales de navegación global (GNSS: *Global Navigation Satellite System*) a los que nos referiremos en los Capítulos 8 y 9.

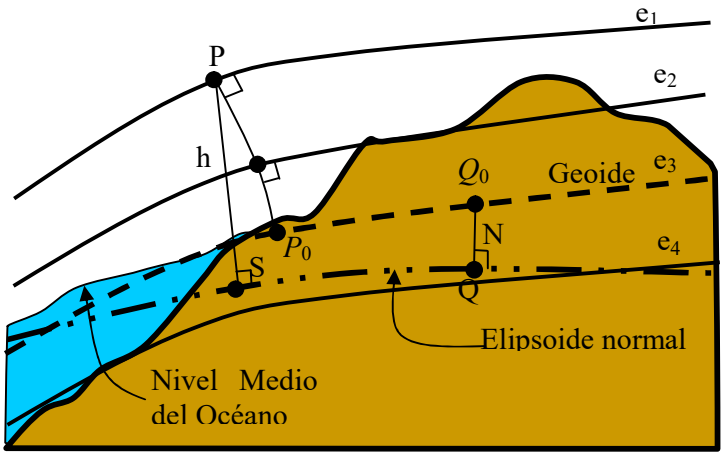


Figura 4.1: Superficies equipotenciales (e_1, e_2, e_3 y e_4) y alturas relativas.

En la Fig. 4.1 se indican: la proyección *S* sobre el elipsoide normal del punto genérico *P* según la vertical geodésica; la *altura geodésica h* de *P* sobre el elipsoide normal; la *ondulación* o altura del Geoide sobre el elipsoide en un punto *Q* y la *altura ortométrica* de *P* sobre el Geoide dada por la longitud de la curva $\widehat{PP_0}$, colineal en todo punto a la dirección de la plomada.

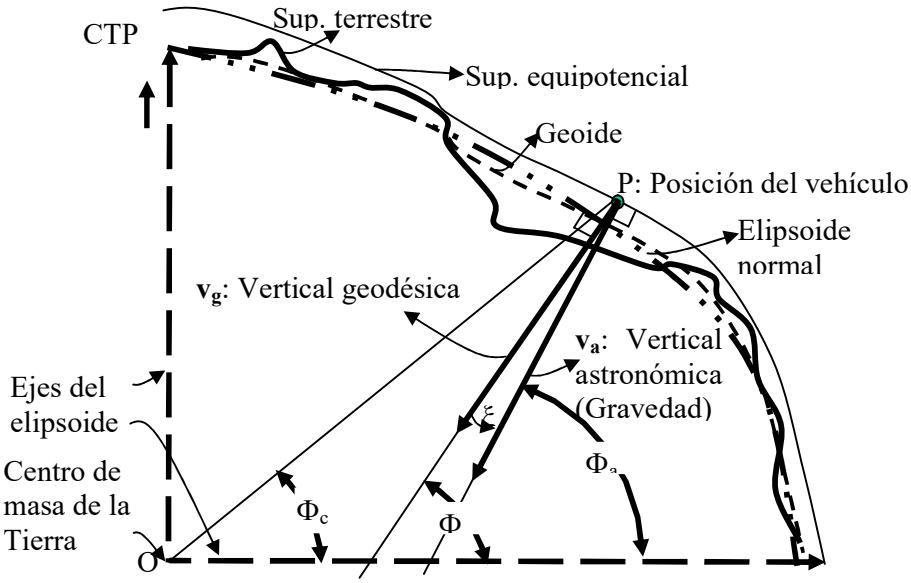


Figura 4.2: Cuadrante de meridiano terrestre y definiciones de latitud.

En el cuadrante de meridiano representado en la Fig. 4.2 se comparan la superficie terrestre (y sub-oceánica) con el *Geoide y el elipsoide normal*. Se indican la superficie equipotencial que pasa por el punto P, la línea normal al elipsoide o vertical geodésica y la dirección del vector gravedad o dirección de la plomada. Los ángulos Φ_a, Φ_c y Φ, indicados en la figura, se denominan, respectivamente, *latitud astronómica, latitud geocéntrica y latitud geodésica*.

4.1.2 Geometría del Elipsoide Normal

Como se mencionó anteriormente, el elipsoide normal es un elipsoide de revolución geocéntrico con radio mayor *a* sobre el plano ecuatorial y radio menor *b* entre el centro de masa de la Tierra *O* y el *Polo Convencional Terrestre* (CTP)*. El vector *O-CTP* fue adoptado por el *Bureau International de l'heure* (BIH) como eje nominal inercial de rotación terrestre fijo en el espacio inercial ("respeto de las estrellas"). El plano meridiano de referencia del Elipsoide es el meridiano cero de la hora terrestre (meridiano BIH 0º) y pasa a unos 100mts al Este del meridiano de Greenwich. El corte del elipsoide según el meridiano BIH 0º corresponde a una elipse como la indicada en la parte inferior de la Fig. 4.3. Las ecuaciones en coordenadas cartesianas del elipsoide y de la elipse para *y*=0 son, respectivamente:

$$\begin{aligned} &\textit{Elipsoide}: \; S_0 \equiv \left\{x, y, z;\, (x^2+y^2)/a^2 + z^2/b^2 = 1\right\} \\ &\textit{Elipse}: \quad E_0 \equiv \left\{(x,y,z) \in S_0\,;\, y=0\right\} \Rightarrow x^2/a^2 + z^2/b^2 = 1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ambos objetos geométricos son usualmente caracterizados mediante los valores de *a* y del *achatamiento*: $f \triangleq (a-b)/a$. En ocasiones convendrá utilizar en lugar de *f* la *excentricidad:* $\varepsilon \triangleq \sqrt{(a^2-b^2)}/a$ (ó $\varepsilon^2 = f(2-f)$). La Tabla 4.1 del Párrafo 4.4.1 consigna los valores normales para el elipsoide terrestre.

El punto P de la Fig. 4.3 representa la posición de un vehículo hipotético y el punto S su proyección normal sobre el elipsoide. De la expresión de la tangente a la elipse (4.1) en el punto S y de la definición de la latitud geodésica Φ surge la siguiente relación entre esta última y las coordenadas de S:

$$\begin{aligned} &\Phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow -\frac{dx}{dz} = \frac{z_S a^2}{x_S b^2} = \tan\Phi \\ &\Phi = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_S = 0,\; z_S = \pm b \end{aligned} \tag{4.2}$$

Combinando la anterior con la ecuación (4.1) se obtiene la ecuación de la elipse parametrizada por Φ:

* Dirección astronómica media del polo terrestre entre 1900-1905, fija inercialmente.

$$\left.\begin{aligned} x_S &= \frac{a\cos\Phi}{(1-\varepsilon^2\mathrm{sen}^2\Phi)^{1/2}} \\ z_S &= \frac{b(1-\varepsilon^2)^{1/2}\mathrm{sen}\Phi}{(1-\varepsilon^2\mathrm{sen}^2\Phi)^{1/2}} \end{aligned}\right\};\ \Phi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \tag{4.3}$$

Las ecuaciones paramétricas (4.3) permiten, a su vez, relacionar las latitudes Φ y Φ_c sobre el elipsoide (ver Fig. 4.3) mediante la ecuación (notar el rol de la excentricidad ε):

$$\begin{aligned} &\Phi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\Rightarrow \tan(\Phi_c(S))=\frac{z_s}{x_s}=(1-\varepsilon^2)\tan(\Phi(S)) \\ &\Phi_c=\Phi=\pm\frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

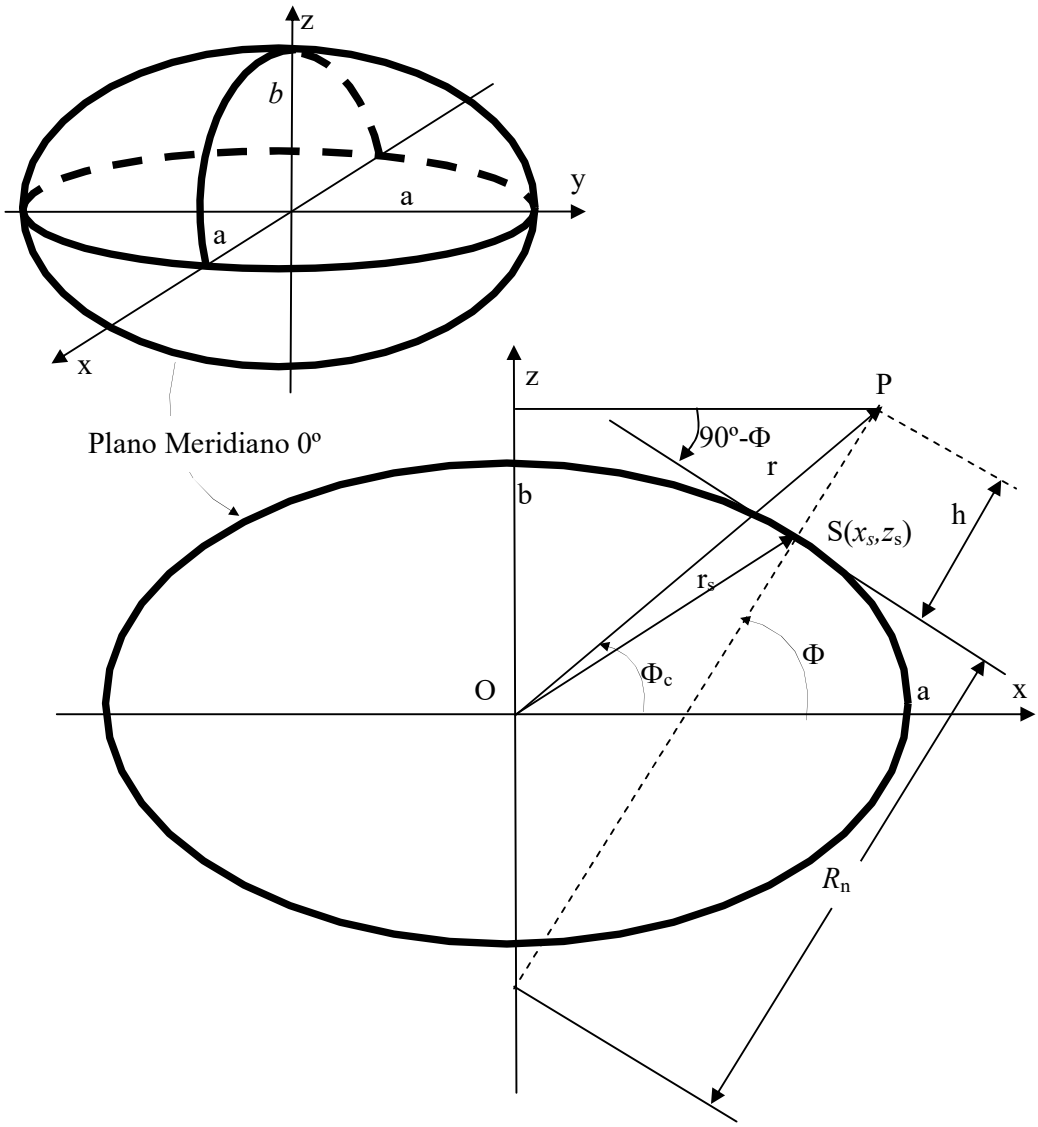


Figura 4.3: Geometría del elipsoide normal.

En los Capítulos siguientes necesitaremos conocer los radios de curvatura según las direcciones del paralelo y del meridiano locales en función de la latitud Φ de cada punto del elipsoide de referencia. Introducimos primeramente el *Radio normal* R_n (ver Fig. 4.3):

$$R_n(\Phi) \triangleq \frac{x_s}{\cos(\Phi)} = \frac{a}{(1-\varepsilon^2 \sin^2(\Phi))^{1/2}} \tag{4.5}$$

El *Radio de curvatura paralelo*, $R_p(\Phi,h)$, corresponde a la distancia del punto P al eje z y se determina en función de la altura geodésica h y la latitud Φ usando la definición (4.5) y la primera de las Ecs. (4.3), según:

$$R_p(\Phi,h) = x_s(\Phi) + h\cos(\Phi) = (R_n(\Phi)+h)\cos(\Phi) \tag{4.6}$$

Del mismo modo, la coordenada z_s del punto S se calcula a partir de la (4.3) y la definición de R_n:

$$z_S(\Phi) = R_n(\Phi)\frac{b}{a}(1-\varepsilon^2)^{1/2}\mathrm{sen}(\Phi) = R_n(\Phi)(1-\varepsilon^2)\mathrm{sen}(\Phi) \tag{4.7}$$

Además, como surge de la Fig. 4.3, la coordenada z_p del punto P resulta:

$$z_p(\Phi,h) = z_s(\Phi) + h\mathrm{sen}(\Phi) = ((1-\varepsilon^2)R_n + h)\mathrm{sen}(\Phi) \tag{4.8}$$

El *Radio de curvatura meridiano* en un punto S sobre la elipse, surge de evaluar la conocida fórmula del radio de curvatura de una curva plana definida paramétricamente según las Ecs. (4.3):

$$R_m(\Phi) = \frac{(1+(\frac{dz}{dx})^2)^{3/2}}{\frac{d^2z}{dx^2}} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin^2(\Phi))^{3/2}} \tag{4.9}$$

De las Ecs. (4.5) y (4.9) surge la siguiente relación entre los radios R_n y R_m sobre la elipse normal:

$$R_n(\Phi) = R_m(\Phi)\frac{(1-\varepsilon^2\sin^2(\Phi))}{(1-\varepsilon^2)} \approx R_m(\Phi)(1+O(\varepsilon^2)) \geq R_m(\Phi) \tag{4.10}$$

Para alturas moderadas el radio de curvatura meridiano en un punto P a una altura geodésica h sobre el elipsoide normal se aproxima muy bien mediante la expresión:

$$R_m(\Phi,h) = R_m(\Phi) + h \tag{4.11}$$

4.2 Ternas de referencia

A continuación describimos los sistemas de coordenadas de referencia más usados en navegación y las transformaciones de coordenadas que los vinculan.

4.2.1 Ternas Centrada Terrestre (ECEF) e Inercial Centrada Terrestre (ECI)

Ambas ternas tienen su origen en el centro de masa nominal de la Tierra, su eje "z" es paralelo al eje nominal terrestre y sus ejes "x" e "y" están contenidos en el plano (ecuatorial) ortogonal a "z" (ver Fig. 4.4). La terna centrada terrestre $\{e\}$ (ECEF: *Earth Centered-Earth Fixed*) es solidaria a la Tierra, su eje "x" pasa por el meridiano 0º BHI y su eje "y" completa la terna ortonormal positiva. La terna inercial centrada terrestre $\{i\}$ (ECI: *Earth Centered Inertial*) conserva su orientación invariante en el espacio inercial. Se tendrá en cuenta que esta terna no se mueve a una velocidad uniforme en el espacio por lo que en rigor sólo podrá ser considerada inercial en la medida que sean despreciables los efectos de su movimiento de rotación alrededor del Sol. Sus ejes "x" e "y" están contenidos en el plano ecuatorial terrestre. Para vehículos extraplanetarios, el eje "x" suele ser elegido en la dirección del punto *vernal* correspondiente a la dirección casi invariante (inercialmente) de la posición del Sol en el instante del equinoccio de la primavera boreal. De otro modo, es usual elegir sus ejes "x" e "y" coincidentes con los de la terna ECEF en el instante inicial de la navegación. Por definición, la terna ECEF rota (junto con la Tierra) a la velocidad angular terrestre $\mathbf{\Omega}_e$ respecto de la ECI alrededor del eje "**z**" común a ambas ternas (eje invariante de la rotación).

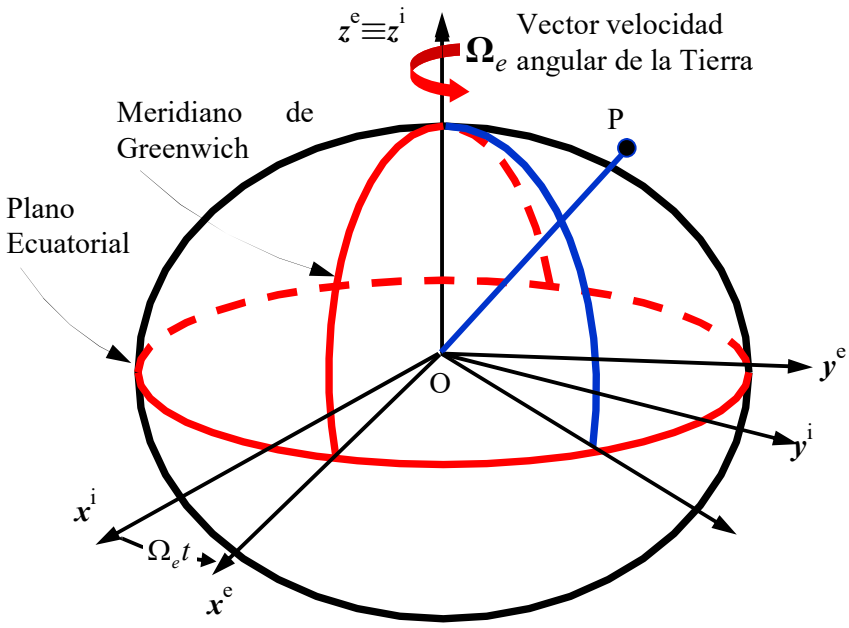


Figura 4.4: Representación de las ternas ECEF y ECI.

De acuerdo con las definiciones anteriores, lo visto en el Capítulo precedente y denotando $\|\mathbf{\Omega}_e\| = \Omega_e$, es fácil comprobar, usando los resultados del Párrafo 3.8 del Capítulo 3, que la MCD correspondiente al cambio de coordenadas entre ambas ternas en un instante dado t desde el inicio de la navegación es:

$$\mathbf{C}_i^e = \mathbf{C}(\Omega_e t \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} \cos(\Omega_e t) & \sin(\Omega_e t) & 0 \\ -\sin(\Omega_e t) & \cos(\Omega_e t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Las coordenadas cartesianas de un punto genérico P según las ternas ECEF y ECI se denotan respectivamente:

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} x^e & y^e & z^e \end{bmatrix}^T ; \ \mathbf{P}^i = \begin{bmatrix} x^i & y^i & z^i \end{bmatrix}^T \tag{4.13}$$

4.2.2 Terna Vertical Geocéntrica Local (LGCV)

La terna LGCV (*Local Geocentric Vertical*), también llamada *geocéntrica* y que denotaremos con el superíndice "*c*", está centrada en el centro de gravedad de la Tierra, su eje z^c es colineal a la vertical geocéntrica local que contiene al radio vector $\overrightarrow{OP}$ entre el origen *O* y el punto P representativo del vehículo, usualmente el centro de masa de la unidad de medidas inerciales (ver Fig. 4.5).

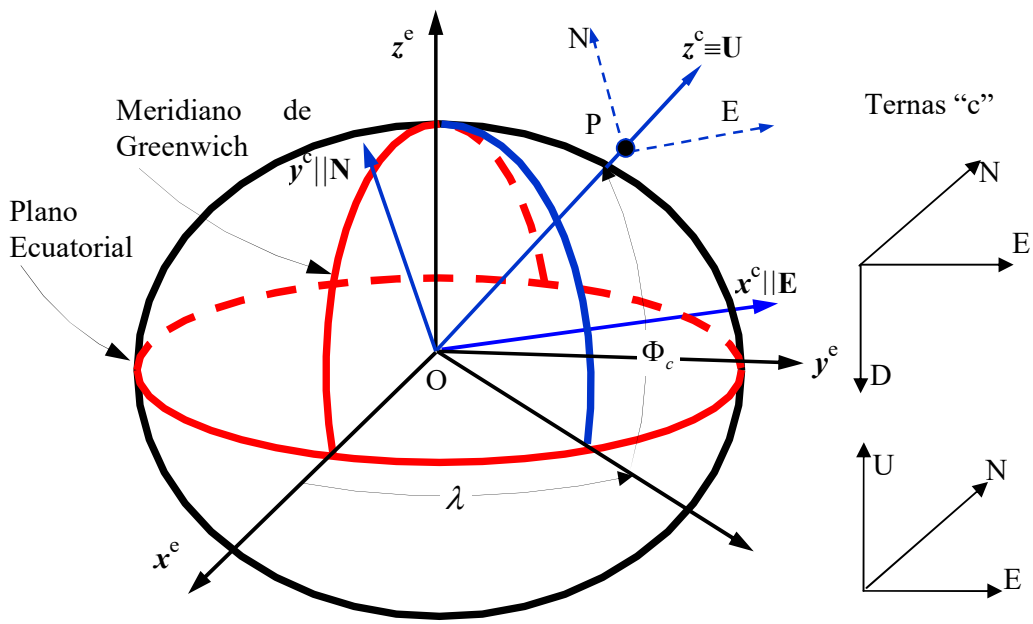


Figura 4.5: Representación de las ternas ECEF y LGCV-ENU.

Sus ejes $\boldsymbol{x}^c$ e $\boldsymbol{y}^c$ yacen sobre el plano ortogonal a $\overrightarrow{OP}$. Cuando el eje z^c tiene el sentido $\overrightarrow{OP}$ es denotado **U** (up) y **D** (down) cuando tiene el sentido contrario. Los ejes $\boldsymbol{x}^c$ e $\boldsymbol{y}^c$ suelen estar orientados según las direcciones cardinales geocéntricas: **N/S**, intersección del plano meridano local con el plano tangente geocéntrico o **E/O**, dirección simultáneamente ortogonal a las direcciones **N/S y U/D**. Las ternas geocéntricas más utilizadas son las LGCV-ENU y LGCV-NED, respectivamente, con los ejes ($\boldsymbol{x}^c \equiv$**E**, $\boldsymbol{y}^c \equiv$**N**, $z^c \equiv$**U**) y ($\boldsymbol{x}^c \equiv$**N**, $\boldsymbol{y}^c \equiv$**E**, $z^c \equiv$**D**). En la Fig. 4.5 se ejemplifica una terna LGCV-ENU en el punto P de latitud geocéntrica Φ_c y longitud λ. Como es fácil comprobar, la terna LGCV-ENU se obtiene a partir de la terna ECEF mediante la secuencia de rotaciones elementales de Euler: $(\pi/2+\lambda)@z^e$ (que ubica al eje $\boldsymbol{x}^e$ en la dirección **E**) seguida de $(\pi/2-\Phi_c)@\boldsymbol{x}^c$ (que coloca al eje z^e en la dirección del eje **U**). En consecuencia, y de acuerdo con lo visto en Párrafo 3.8.1 del Capítulo 3, la matriz de cambio de base que vincula la LGCV-ENU con la ECEF se determina según:

$$\mathbf{C}_e^{c(ENU)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}\Phi_c & \cos\Phi_c \\ 0 & -\cos\Phi_c & \text{sen}\Phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\text{sen}\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\cos\lambda & -\text{sen}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -\text{sen}\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\text{sen}\Phi_c\cos\lambda & -\text{sen}\Phi_c\text{sen}\lambda & \cos\Phi_c \\ \cos\Phi_c\cos\lambda & \cos\Phi_c\text{sen}\lambda & \text{sen}\Phi_c \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Las siguientes ecuaciones permiten relacionar las coordenadas ECEF con las coordenadas curvilíneas polares (λ,Φ_c, r) del punto P:

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\Phi_c\cos\lambda \\ r\cos\Phi_c\text{sen}\lambda \\ r\,\text{sen}\Phi_c \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

$$r = |\mathbf{P}^e| = \sqrt{x^{e2} + y^{e2} + z^{e2}};\ \ \text{sen}(\Phi_c) = z^e / r;\ \ \tan(\lambda) = (x^e / y^e) \tag{4.16}$$

Aplicando la transformación de coordenadas (4.14) a la expresión (4.15) se obtienen las coordenadas LGCV del punto P:

$$\mathbf{P}^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

4.2.3 Terna Vertical Geodésica Local (LGV)

Las ternas LGV (*Local Geodetic Vertical*), que llamaremos *geodésicas,* están centradas en el centro de gravedad de la Tierra, su eje ***z*** es paralelo a la vertical geodésica local (con sentido **U** ó **D**) y sus ejes horizontales, ***x*** e ***y***, son paralelos al plano tangente al elipsoide WGS84 en la proyección sobre éste del punto P (S en la Fig. 4.6). Cuando los ejes ***x*** e ***y*** son paralelos a las direcciones cardinales (**E/O** ó **N/S**) la salida del sistema de navegación queda automáticamente referida a estos ejes lo que resulta muy conveniente en muchas aplicaciones (p.e.: el rumbo de un vehículo o la orientación de un objeto a bordo del mismo).

La denominación de la terna depende de la orientación elegida para sus ejes horizontales. Entre las ternas "cardinales" distinguimos la terna *geográfica* {***g***}: ($\boldsymbol{x}^g$,$\boldsymbol{y}^g$, $\boldsymbol{z}^g$) ≡ (**E, N, U**) y la terna de *nivel* {***l***}*:* ($\boldsymbol{x}^l$,$\boldsymbol{y}^l$, $\boldsymbol{z}^l$) ≡ (**N, E, D**) esta última, usada principalmente en aeronavegación, se obtiene de la primera invirtiendo el sentido del eje ***z*** e intervirtiendo sus ejes ***x*** e ***y***. En la Fig. 4.6 se ejemplifica la terna geográfica (LGV-ENU) para un punto P caracterizado por su *latitud geodésica* Φ, su *longitud* λ y su *altura geodésica h*, llamadas *coordenadas curvilíneas geodésicas.*

Para mantener en todo momento su orientación cardinal se requiere rotar la terna geodésica en función del desplazamiento en longitud (**E-O)** del vehículo. Este procedimiento es particularmente crítico en las vecindades de los polos donde pequeños

desplazamientos en la dirección **E-O** inducen grandes cambios en la dirección **N-S.** Esto se traduce, como veremos en el próximo capítulo, en dificultades numéricas importantes en los algoritmos de navegación inercial. Lo anterior motiva el uso de ternas geodésicas "no-cardinales" obtenidas a partir de las cardinales mediante la rotación de un ángulo positivo α alrededor de su eje z, llamado *ángulo de deriva* (*"wander angle"* en inglés). Por abuso de lenguaje, estas ternas son comúnmente llamadas ternas *de navegación* y denotadas con "*n*". Existen diversas estrategias para definir la rotación α(t)@z y algunas de ellas serán descritas en el Capítulo 5.

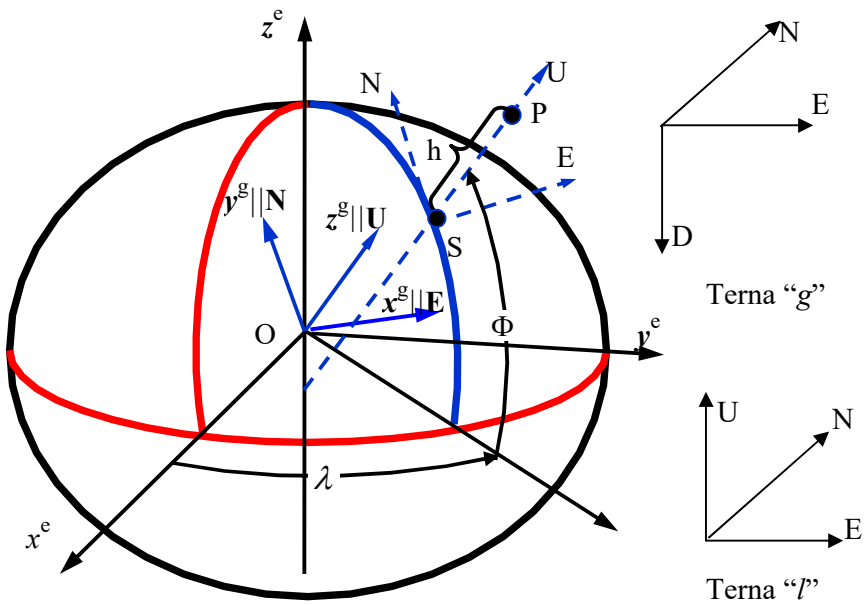


Figura 4.6: Representación de las ternas ECEF y LGV-ENU.

Las siguientes MCD corresponden a las transformaciones de coordenadas entre las ternas {***n***}, {***l***} y {***g***}:

$$\mathbf{C}^{n}_{g(ENU)} = \mathbf{C}(\alpha\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}^{l(NED)}_{g(ENU)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Tal como la terna geocéntrica, la terna geodésica rota respecto de la terna ECEF a medida que el vehículo se desplaza respecto de la Tierra. La MCD del cambio de coordenadas entre la terna geográfica y la ECEF se obtiene en función de Φ y λ de modo similar a la Ec. (4.14):

$$\mathbf{C}^{g}_{e} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\operatorname{sen}\Phi\cos\lambda & -\operatorname{sen}\Phi\operatorname{sen}\lambda & \cos\Phi \\ \cos\Phi\cos\lambda & \cos\Phi\operatorname{sen}\lambda & \operatorname{sen}\Phi \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

En virtud de la definición (4.5) y las Ecs. (4.6) y (4.8), las coordenadas cartesianas en terna {***e***} del punto P se expresan en función de sus *coordenadas geodésicas* (λ,Φ,*h*) según:

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_n(\Phi)+h)\cos(\lambda)\cos(\Phi) \\ (R_n(\Phi)+h)\sin(\lambda)\cos(\Phi) \\ ((1-\varepsilon^2)R_n(\Phi)+h)\sin(\Phi) \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Inversamente, a partir de las coordenadas cartesianas de P^e y usando las (4.5), (4.6) y (4.8) se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} &\tan(\lambda) = (y^e / x^e) \Rightarrow \lambda \\ &\left.\begin{aligned} r_{xy}^e &= R_p(\Phi,h) = (R_n(\Phi)+h)\cos(\Phi) \\ z^e &= ((1-\varepsilon^2)R_n(\Phi)+h)\mathrm{sen}(\Phi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Phi, h \end{aligned} \tag{4.21}$$

Donde se usó la definición $r_{xy}^e \triangleq \sqrt{x^{e2}+y^{e2}}$. Con la primera ecuación se determina la longitud λ mientras que el último par de ecuaciones no lineales permite calcular la latitud Φ y la altura h sobre el elipsoide normal. Normalmente se recurre a un algoritmo iterativo para resolver este último par de ecuaciones implícitas (véase también el procedimiento expuesto en Chatfield, (1997), Cap. 8.I)

Aplicando la transformación de coordenadas (4.19) a la (4.20) se obtienen las coordenadas geográficas del punto P en coordenadas geográficas:

$$\mathbf{P}^g = \begin{bmatrix} x^g \\ y^g \\ z^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\varepsilon^2 R_n \sin(\Phi)\cos(\Phi) \\ (R_n+h)-\varepsilon^2 R_n \sin^2(\Phi) \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Comparando la anterior con la Ec. (4.17), se advierte la componente en $\boldsymbol{y}_g$ inducida por ε. Por otra parte, junto con la (4.5) se observa que: $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{P}^g = \mathbf{P}^c$.

Ternas {*n*} y rumbos geográfico y de navegación

En el diagrama de la Fig. 4.7 se representan los ejes horizontales $\boldsymbol{x}^n$ e $\boldsymbol{y}^n$ de la terna $\{\boldsymbol{n}\}$ definida a partir de una terna geográfica (ENU) y el eje x^b del vehículo proyectado sobre el plano tangente local. Se indican además el *rumbo geográfico* ψ^g y el *rumbo de navegación* $\psi \equiv \psi^g + \alpha$ del vehículo.

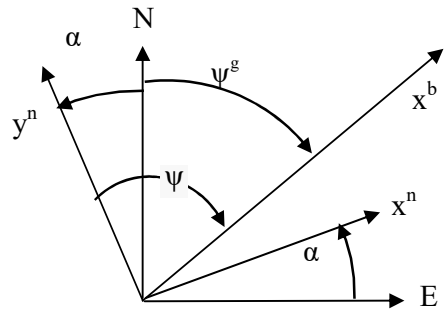


Figura 4.7: Rumbos geográficos y de navegación.

Las coordenadas en terna $\{\boldsymbol{n}\}$ de un punto P se determinan a partir de la (4.22) y la primera de la (4.18), o bien, a partir de la (4.20) y usando además la (4.19) como:

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{C}_g^n \mathbf{P}^g = \mathbf{C}_g^n \mathbf{C}_e^g \mathbf{P}^e = \mathbf{C}_e^n \mathbf{P}^e \tag{4.23}$$

De las Ecs. (4.19) y (4.18) resulta la MCD $\mathbf{C}_e^n$ en función de Φ, λ y α:

$$\mathbf{C}_e^n = \mathbf{C}_g^n \mathbf{C}_e^g = \begin{bmatrix} -C\alpha S\lambda - S\alpha S\Phi C\lambda & C\alpha C\lambda - S\alpha S\Phi S\lambda & S\alpha C\Phi \\ S\alpha S\lambda - C\alpha S\Phi C\lambda & -S\alpha C\lambda - C\alpha S\Phi S\lambda & C\alpha C\Phi \\ C\Phi C\lambda & C\Phi S\lambda & S\Phi \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

4.2.4 Terna Vertical Astronómica Local (LAV)

La dirección vertical de la terna LAV es paralela a la vertical astronómica (dirección de la plomada local). En la Fig. 4.8 a) se indican para el punto P las direcciones: vertical astronómica ($\mathbf{v_a}$), vertical geodésica ($\mathbf{v_g}$), **N** y **O** geodésicos locales y el módulo δ_v de la rotación vectorial $\boldsymbol{\delta}_v$ que vincula $\mathbf{v_a}$ con $\mathbf{v_g}$. El vector *deflexión vertical* $\boldsymbol{\delta}_v$ tiene por componentes según los eje $\boldsymbol{x}^g$ (**E**) y $\boldsymbol{y}^g$ (**N**), respectivamente, -ξ y η indicados también en la Fig. 4.8 a) (el primero es negativo en la dirección **E** y el segundo positivo según el eje **N**). Consistente con esta convención, de las Figs. 4.2 y 4.8, llamando, respectivamente, Φ_a y λ_a a la latitud y longitud astronómicas* del punto P y usando: $\Delta\lambda = \lambda_a - \lambda$ y $\Delta\Phi = \Phi_a - \Phi$, se tienen las siguientes relaciones entre las coordenadas angulares geodésicas y astronómicas:

$$\xi = \Delta\Phi; \quad \eta = \Delta\lambda \cos\Phi \tag{4.25}$$

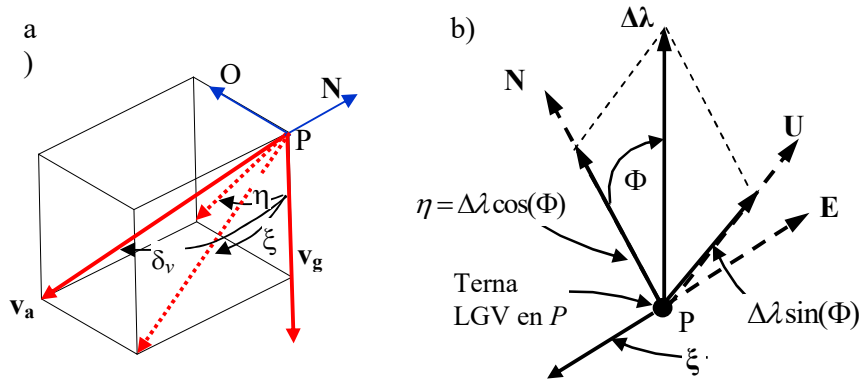


Figura 4.8: Componentes de la deflexión vertical.

Así mismo, se advertirá de la Fig. 4.8 b) que la componente de $\boldsymbol{\delta}_v$ en la dirección **U** ($\mathbf{z}^g$) resulta ser $\Delta\lambda \sin\Phi = \eta \tan\Phi$. Combinando los resultados anteriores el ángulo vectorial $\boldsymbol{\delta}_v^g$ se escribe:

* Observadas respecto del vector gravedad local.

$$\boldsymbol{\delta}_v = -\xi\mathbf{E} + \eta\mathbf{N} + \eta\tan\Phi\mathbf{U} \Rightarrow \boldsymbol{\delta}_v^g = \begin{bmatrix} -\xi \\ \eta \\ \eta\tan\Phi \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Dado que $\left|\boldsymbol{\delta}_v^g\right| < 50arcseg$, la MCD que expresa el cambio de coordenadas de la terna LGV {***g***} a la LAV {***a***} puede obtenerse como la composición de pequeñas rotaciones de Euler alrededor de los ejes de la terna {***g***} (ver Párrafo 3.8.1 del Capítulo 3) de donde resulta:

$$\mathbf{C}_g^a \sim \begin{bmatrix} 1 & \eta\tan(\Phi) & -\eta \\ -\eta\tan(\Phi) & 1 & -\xi \\ \eta & \xi & 1 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

Por otra parte, la MCD correspondiente al cambio de coordenadas entre la terna {***e***} y la terna {***a***} resulta de un modo análogo a la (4.19):

$$C_e^a = \begin{bmatrix} -\mathrm{sen}\lambda_a & \cos\lambda_a & 0 \\ -\mathrm{sen}\Phi_a\cos\lambda_a & -\mathrm{sen}\Phi_a\mathrm{sen}\lambda_a & \cos\Phi_a \\ \cos\Phi_a\cos\lambda_a & \cos\Phi_a\mathrm{sen}\lambda_a & \mathrm{sen}\Phi_a \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

4.2.5 Ternas del cuerpo y de los instrumentos

La terna, que denotamos con el superíndice "*b*" (*body*), asociada al cuerpo del vehículopermite describir la orientación de éste respecto de la terna de navegación. El origen de la terna del cuerpo (P en las Figs. 4.1 a 4.6) es un punto característico del vehículo, usualmente su centro de masa, cuya posición y velocidad respecto de la terna de navegación de referencia interesa conocer en todo instante. Si bien los ejes de la terna del cuerpo pueden ser arbitrarios, estos suelen ser elegidos conforme a los planos de simetría del vehículo y/o a sus condiciones de desplazamiento nominal.

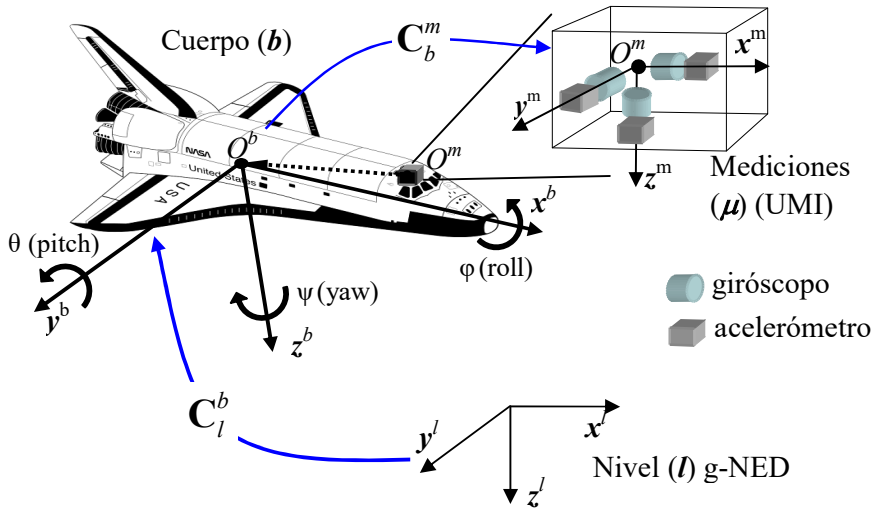


Figura 4.9: Ternas del Cuerpo (*b*), de mediciones (m) y de "nivel" ($l \equiv$ g-NED).

Muy frecuentemente (y regularmente en aeronavegación), el eje $\boldsymbol{x}^b$ (de guiñada o *roll)* apunta en la dirección de avance del vehículo (o su "nariz"), el eje $\boldsymbol{y}^b$ (de cabeceo o *pitch*) apunta en la dirección del ala derecha y el eje $\boldsymbol{z}^b$ (de rumbo o *yaw*) completa la terna positiva (ver Fig. 4.9).

Con la definición anterior de los ejes, la orientación del vehículo respecto de la terna geodésica $\{\boldsymbol{l}\}$ queda determinada por los 3 ángulos de Euler: ψ^g (yaw o rumbo geográfico según la Fig. 4.7), θ(pitch) y φ(roll) (ver Fig. 4.9) aplicados en la secuencia 3-2-1. La MCD del cambio de coordenadas correspondiente a la composición de rotaciones: $(\varphi @ \boldsymbol{x}^b)(\theta @ \boldsymbol{y}^{b'})(\psi^g @ \boldsymbol{z}^l)$ resulta, de acuerdo con la Ec. (3.53) del Capítulo 3 y usando la notación empleada en la Fig. 3.9 *:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_l^b &= \mathbf{C}(-\varphi\mathbf{e}_1)\mathbf{C}(-\theta\mathbf{e}_2)\mathbf{C}(-\psi^g\mathbf{e}_3)\\ &= \begin{bmatrix} C\theta C\psi^g & C\theta S\psi^g & -S\theta \\ -C\varphi S\psi^g + S\varphi S\theta C\psi^g & C\varphi C\psi^g + S\varphi S\theta S\psi^g & S\varphi C\theta \\ S\varphi S\psi^g + C\varphi S\theta C\psi^g & -S\varphi C\psi^g + C\varphi S\theta S\psi^g & C\varphi C\theta \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.29}$$

En función de los mismos ángulos pero respecto de la terna geodésica $\{\boldsymbol{g}\}$ la orientación del vehículo queda definida por la secuencia de rotaciones:

$$((\varphi+\pi)@\mathbf{x}^b)(-\theta@\mathbf{y}^{b'})((\pi/2-\psi^g)@\mathbf{z}^g)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_g^b &= \mathbf{C}(-(\varphi+\pi)\mathbf{e}_1)\mathbf{C}(\theta\mathbf{e}_2)\mathbf{C}((-\pi/2+\psi^g)\mathbf{e}_3)\\ &= \begin{bmatrix} C\theta S\psi^g & C\theta C\psi^g & S\theta \\ C\varphi C\psi^g + S\varphi S\theta S\psi^g & -C\varphi S\psi^g + S\varphi S\theta C\psi^g & -S\varphi C\theta \\ -S\varphi C\psi^g + C\varphi S\theta S\psi^g & S\varphi S\psi^g + C\varphi S\theta C\psi^g & -C\varphi C\theta \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.30}$$

Por último, la MCD que vincula la terna del cuerpo $\{\boldsymbol{b}\}$ con la terna $\{\boldsymbol{n}\}$ se obtiene desarrollando la anterior después de sustituir ψ^g por $\psi = \psi^g + \alpha$ y resulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_n^b &= ((\varphi+\pi)@\boldsymbol{x}^b)(-\theta@\boldsymbol{y}^{b'})((\pi/2-\psi)@\boldsymbol{z}^n) =\\ &= \begin{bmatrix} C\theta S\psi & C\theta C\psi & S\theta \\ C\varphi C\psi + S\varphi S\theta S\psi & -C\varphi S\psi + S\varphi S\theta C\psi & -S\varphi C\theta \\ -S\varphi C\psi + C\varphi S\theta S\psi & S\varphi S\psi + C\varphi S\theta C\psi & -C\varphi C\theta \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.31}$$

En los sistemas de navegación *strapdown* la unidad de mediciones inerciales (UMI) está fijada a la estructura del vehículo en una posición y orientación no necesariamente coincidentes con la terna de éste (esta libertad para posicionar la UMI es una de las mayores ventajas de la tecnología *strapdown* respecto de la navegación con plataforma inercial). En consecuencia, para referir los datos inerciales provistos por la UMI en la terna $\{\boldsymbol{m}\}$ a la terna del cuerpo $\{\boldsymbol{b}\}$ se requerirá conocer el vector desplazamiento O^mO^b ("brazo de palanca") entre los centros de coordenadas de ambas ternas y la matriz de

* Cuando convenga por razones de espacio se utilizará la notación: sen(α)=Sα, cos(α)=Cα

transformación de coordenadas $\mathbf{C}_b^m$ (ver Fig. 4.9). Ambas magnitudes están determinadas por la implementación física del sistema de navegación a bordo.

4.3 Modelos Globales de Gravitación y Gravedad

El *potencial gravitacional* $V(P)$, resultado de la atracción de las masas terrestres sobre un cuerpo en un punto P exterior al volumen terrestre, puede expresarse mediante un desarrollo en serie de funciones armónicas esféricas de las coordenadas esféricas (λ, Φ_c, r) del punto P con $r = \|OP\| \geq a$ (ver apéndice A):

$$V(r,\Phi_c,\lambda) = \frac{GM_T}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \left\{C_{n,0}\overline{P}_{n,0}(\mathrm{sen}(\Phi_c)) + \sum_{m=2}^{n}\overline{P}_{n,m}(\mathrm{sen}\Phi_c)\left[C_{n,m}\cos(m\lambda) + S_{n,m}\mathrm{sen}(m\lambda)\right]\right\}\right\} \tag{4.32}$$

Donde a es el radio de una esfera que contiene al volumen terrestre* y GM_T es la constante gravitacional terrestre (producto de la constante de gravitación universal G y la masa terrestre M_T). Definimos el término armónico esférico genérico del desarrollo anterior como:

$$H_{n,m}(\lambda,\Phi_c) \triangleq \overline{P}_{n,m}(\mathrm{sen}\Phi_c)\left(C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\mathrm{sen}m\lambda\right) \tag{4.33}$$

Los *coeficientes armónicos esféricos normalizados* (S*pherical Harmonic Coefficients* (SHC)) o *coeficientes gravitacionales*, $C_{n,m}$, $S_{n,m}$ (n=2,…; m= 2,…n) condensan toda la información física del modelo. Las variaciones angulares (en latitud y longitud) están expresadas por las funciones generalizadas normalizadas de Legendre $\overline{P}_{n,m}$ de grado n y orden m con argumento sen(Φ_c) y por cos($m\lambda$) y sen($m\lambda$) (para m=0, $\overline{P}_{n,0} = \overline{P}_n$ coincide con el polinomio de Legendre de orden n, ver Apéndice A). Destacamos que la serie no incluye términos de grado n=1 ni de orden m=1 por lo que a grandes distancias predomina el término esférico del desarrollo: GM_T/r.

En la práctica, los modelos globales del potencial gravitacional terrestre son descritos por truncamientos de la serie (4.32). Los mejores modelos disponibles actualmente son: el GRIM 5 (colaboración entre: el *Geodetic Research Institute* de Munich y el *Groupe de Recherches de Geodesie Spatiale,* Francia) y el EGM2008 (colaboración entre: *NASA-GSFC*, *National Imaging and Mapping Agency* (NIMA) y *Ohio State Univ*. orden y grado: 2159) y utilizan un orden máximo mayor o igual a n=360. Los coeficientes gravitacionales son determinados combinando modelos analíticos de las perturbaciones (mareas, presión atmosférica y otros) y observaciones que incluyen gravimetría superficial y satelital†, monitoreo de órbitas satelitales, altimetría satelital por laser y radar, redes geodésicas GPS, etc.

---

*En la practica, el semieje mayor del elipsoide normal cumple esta condición con un alto grado de aproximación.

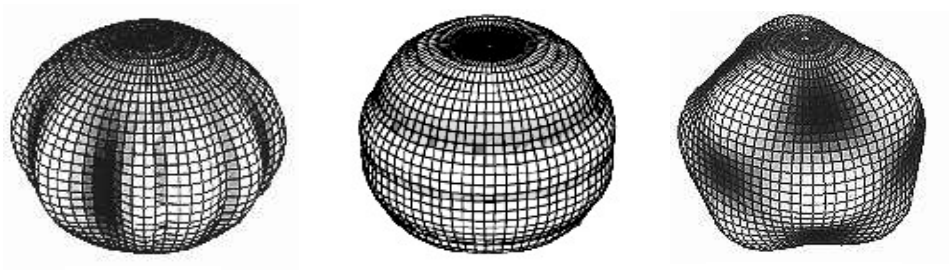
†Los datos aportados por la misión satelital "Gravity Recovery and Climate Experinent (GRACE)" desde 2002 combinados con otras fuentes permitirán mejorar la estimación de los coeficientes gravitacionales y seguir su evolución.

A continuación enunciamos algunas propiedades de los términos $H_{n,m}$ que permiten visualizar sus características geométricas:

- Cada término se anula en 2*m* longitudes (planos meridianos).
- Cuando *m*=0, los $H_{n,0}$ son independientes de la longitud. Sus coeficientes asociados $C_{n,0}$, $n = 2,...$ son los dominantes de cada grupo *n*.
- Cuando *m*=0, las $\overline{P}_{n,0}(\text{sen}(\Phi_c))$ alcanzan su valor máximo (+1) o mínimo (-1) en los polos.
- Las funciones $\overline{P}_{n,m}(\text{sen}(\Phi_c))$ son simétricas respecto del Ecuador cuando *n*+*m* es par y antisimétricas cuando *n*+*m* es impar.
- Cuando *m*≠0 las funciones $\overline{P}_{n,m}(\text{sen}(\Phi_c))$ se anulan en los polos y en *n*-*m* latitudes. Cuando *n*=*m,* sólo se anulan en los polos.

De las propiedades anteriores surge la siguiente clasificación de los términos armónicos H_{nm} del potencial gravitacional:

Armónicos zonales: {*m*=0}, son superficies de revolución alrededor del eje z, se anulan en *n* latitudes pero no en los polos.
Armónicos sectoriales {*m*=*n*}, se cancelan en 2*n* meridianos correspondientes a los ceros de $C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\text{sen}m\lambda$.
Armónicos "teserales"*: {*m*≠0}∩{*m*≠*n*}, dividen la esfera en forma de "mosaico" con protuberancias y depresiones alternadas tanto en latitud como en longitud.



Zonal H_5 Sectorial $H_{5,5}$ Teseral $H_{5,3}$

Figura 4.10: Términos armónicos esféricos.

El *potencial gravitatorio U*(*P*) terrestre resulta de la superposición del potencial gravitacional *V*(*P*) y del "*potencial centrífugo*" *W(P)* provocado por la fuerza centrífuga debida a la velocidad angular terrestre Ω:

$$\begin{aligned} W(P) &\triangleq \frac{1}{2}\|\Omega \times P\|^2 = \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \cos^2 \Phi_c \\ U(P) &= V(P) + W(P) \end{aligned} \tag{4.34}$$

* De *tessera,* en latín, mosaico.

Las superficies equipotenciales mencionadas en el Párrafo 4.1.1, perpendiculares a la línea de la plomada local, corresponden a valores constantes del potencial gravitatorio *U*.

4.3.1 Aceleraciones Gravitacional y Gravitatoria

A partir del potencial gravitacional expresado en armónicos esféricos (4.32) es posible obtener el vector gravitación expresado en la Terna Vertical Geocéntrica Local (LGCV) (**E-N-U**) mediante las relaciones:

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}_g^c(\lambda,\Phi_c,r) = \nabla_c V = \begin{bmatrix} g_{gE}^c & g_{gN}^c & g_{gU}^c \end{bmatrix}^T \\ &g_{gE}^c = \frac{1}{r\cos\Phi_c}\frac{\partial V}{\partial \lambda}; \qquad g_{gN}^c = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \Phi_c}; \qquad g_{gU}^c = \frac{\partial V}{\partial r} \quad , \end{aligned} \tag{4.35}$$

de las cuales surgen:

$$\begin{aligned} g_{gE}^c &= -\frac{GM}{r^2}\frac{1}{\cos\Phi_c}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^n m(C_{n,m}\sin m\lambda - S_{n,m}\cos m\lambda)P_{n,m}(\sin\Phi_c)\right] \\ g_{gN}^c &= \frac{GM}{r^2}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^n (C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda).(P_{n,m+1}(\sin\Phi_c) - m\tan\Phi_c P_{n,m}(\sin\Phi_c)\right] \\ g_{gU}^c &= -\frac{GM}{r^2}\left[1+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(n+1)\left(\frac{a}{r}\right)^n\left[(C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda)P_{n,m}(\sin\Phi_c)\right]\right] \end{aligned} \tag{4.36}$$

Aplicando las mismas expresiones (4.35) al potencial *W(P),* dado por la primera de las (4.34), se obtiene la expresión para la gravedad centrifuga: $\mathbf{g}_w \triangleq \nabla W$ en terna (LGCV) (**E-N-U**), de donde, junto con la 2ª de las (4.34), resulta la gravedad actuando sobre una masa solidaria a la Tierra:

$$\mathbf{g}^c(\lambda,\Phi_c,r) = \nabla U^c = \mathbf{g}_g^c + \mathbf{g}_w^c = \mathbf{g}_g^c + \Omega^2 r\cos\Phi_c\begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}\Phi_c \\ -\cos\Phi_c \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

Notar que $\mathbf{g}_w^c$ no tiene componente **E (**normal al meridiano). Tanto la gravedad como la gravitación terrestres pueden expresarse en otros sistemas de coordenadas usando las transformaciones introducidas previamente en este Capítulo.

4.4 Aproximaciones del Potencial Gravitacional Terrestre

Dado que $\overline{P}_{n,m}$ se anula en *n-m* latitudes mientras que cos($m\lambda$) y sen($m\lambda$) lo hacen en a lo sumo 2*n* longitudes, el índice *n* define la resolución angular del armónico sobre la esfera (longitud de onda espacial) es decir, la escala de la información que contiene. Por otra parte, la simetría casi esférica de la Tierra hace que con alturas crecientes el factor $(a/r)^n$ suavice rápidamente las altas frecuencias espaciales presentes en los

armónicos superiores. Esto adquiere particular relevancia en ciertas aplicaciones satelitales. Así, sobre órbitas de alturas bajas (*Low Earth Orbits* $\leqslant$1000 Km de altura) y medias (*Middle Earth Orbits* a $\leqslant$20.000 Km) resoluciones, respectivamente, de 10º (n=36) y de 30º (n= 12) se traducen en aproximaciones de una muy aceptable precisión. Más aún, para estas órbitas, la fuerte simetría axial y el efecto de promediado del campo gravitatorio debido a la Tierra girando debajo de la órbita, permiten descartar los términos no zonales del desarrollo (4.32) lo cual conduce a la siguiente aproximación en términos puramente zonales (Wertz-1978):

$$V(\lambda,\Phi_c,r) \approx \frac{GM_T}{r}\left[1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n C_{n,0}\overline{P}_{n,0}(\mathrm{sen}\Phi_c)\right] = \frac{GM_T}{r}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(\mathrm{sen}\Phi_c)\right] \tag{4.38}$$

En la expresión anterior se usó la convención habitual consistente en definir los coeficientes armónicos zonales según: $J_n P_n(\mathrm{sen}\Phi_c) = -C_{n,0}\overline{P}_{n,0}(\mathrm{sen}\Phi_c)$ donde $P_n(\cdot)$ es el polinomio de Legendre no normalizado (ver normalizaciones en el Apéndice A). En satélites geoestacionarios, a pesar de que el diámetro orbital es considerablemente mayor que en los casos mencionados, la aproximación (4.38) no es aplicable debido a que, en este caso, por tratarse de una posición fija respecto de la superficie terrestre, los armónicos no zonales no resultan promediados a lo largo de la órbita induciéndose así efectos longitudinales sensibles.

4.4.1 Gravedad Normal

Los modelos globales basados en el desarrollo (4.32) resultan inadecuados para la navegación a alturas medias o bajas. En efecto, aún un desarrollo de alta complejidad con $n_{\max}$=360 (que requiere usar 130.000 armónicos!) tiene una resolución de 1º, que cerca de la superficie terrestre equivale a unos 110Km. Esto puede resultar insuficiente para captar los componentes de alta frecuencia espacial del campo gravitacional debidos a la distribución irregular de masas sub-superficiales o a la proximidad de cadenas de montañas.

La complejidad del campo gravitatorio y la dificultad para describirlo a bajas alturas condujo a descomponer los campos gravitacionales y gravitatorios según 2 componentes: a) una componente principal, llamada *gravedad normal*, descrita, como veremos, por una expresión analítica cerrada (sin desarrollos en serie mediante) que reproduce en forma global las bajas frecuencias del campo gravitatorio y b) una componente residual de alta frecuencia espacial, llamada *perturbación de la gravedad* de un orden de magnitud sensiblemente menor a la primera que representa los apartamientos locales respecto del campo normal.

La excelente aproximación geométrica del Geoide por el elipsoide normal motiva el uso de este último también como referencia gravitatoria. Así, por definición, el elipsoide normal posee una masa igual a la masa terrestre total, rota a la velocidad angular terrestre nominal Ω_e y genera un hipotético *potencial gravitatorio normal* $U_n(P)$del cual su propia superficie S_o es equipotencial. $U_n(P)$ es la superposición del *potencial gravitacional normal* $V_n(P)$ y el potencial centrífugo definido mediante la (4.34). De acuerdo con el Teorema de *Stokes-Poincaré* (Torge 2001) $U_n(P)$ queda unívocamente

definido sobre y al exterior de S_o, por la solución del siguiente problema laplaciano con condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} &P \text{ exterior a } S_0 \Rightarrow \nabla^2 V_n(P) = 0; \\ &P \in S_0 \qquad\qquad \Rightarrow V_n(P) = U_0 - W(P); \\ &r = \|P\| \to \infty \quad \Rightarrow V_n(P) \to GM_T / r \end{aligned} \tag{4.39}$$

Donde, la segunda de las (4.39) es la condición para que S_0 sea una superficie de potencial constante igual a U_0 y la tercera, la condición para que, a grandes distancias, el potencial gravitacional normal resulte indistinguible del potencial gravitacional terrestre lejano.

CONSTANTE	**VALOR**
a: Radio ecuatorial	6.378.137.0 m
GM_T: Constante gravitacional	$3{,}986004418 \times 10^{14} m^3 s^{-2}$
Ω: Velocidad angular	$7{,}292115 \times 10^{-5}$ rad/seg.
f: Achatamiento	$298{,}257223563^{-1}$
ε: Excentricidad	0,08181919084
γ_0: Gravedad normal ecuatorial	9.7803253359 m/s^2
γ_p: Gravedad normal polar	9.8321849378 m/s^2

Tabla 4.1: Constantes del sistema WGS 84.

Hofmann/Moritz-2006 demuestran que el potencial con simetría axial solución de las (4.39) es tal que: a) la solución $V_n(\Phi, h)$ es una fórmula exacta cerrada función de las coordenadas geodésicas Φ, h del punto P en $\{\Phi \in [0, 2\pi]\} \cap \{h \geq 0\}$ independientemente de la longitud λ; b) que el potencial gravitatorio sobre S_o adopta el valor:

$$U_o = \frac{GM_T}{E} \arctan(E/b) + \frac{\Omega^2 a^2}{3} \tag{4.40}$$

Donde $E \triangleq \sqrt{a^2 - b^2}$ es la excentricidad lineal. La expresión general del potencial gravitatorio normal en puntos no interiores al elipsoide de referencia se obtiene reemplazando en las Ecs. (4.34) el potencial gravitacional normal $V_n(\Phi, h)$ obtenido mediante la (4.39):

$$U_n(\Phi, h) = V_n(\Phi, h) + W(\Phi, h) \tag{4.41}$$

La gravedad y la gravitación normales, $\boldsymbol{\gamma}(P)$ y $\boldsymbol{\gamma}_g(P)$, se calculan a partir de los respectivos potenciales, mediante:

$$\boldsymbol{\gamma}(P) = \nabla U_n(P); \qquad \boldsymbol{\gamma}_g(P) = \nabla V_n(P) \tag{4.42}$$

Destacamos que tanto el elipsoide como el potencial y la gravedad normales quedan definidos por los 4 parámetros independientes: *a, f,* GM_T y Ω cuyos valores, provistos por NIMA (ver: WGS84 NIMA-Technical Report TR8350-2), son consignados en la Tabla 4.1.

Vista la simetría axial del potencial normal y la condición de que el elipsoide normal es una superficie equipotencial, la gravedad normal $\boldsymbol{\gamma}(P)$ expresada en coordenadas geodésicas (LGV-ENU) sobre y fuera del elipsoide normal adopta la forma:

$$h \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\gamma}^g(\Phi, h) = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_N(\Phi, h) & -\gamma_U(\Phi, h) \end{bmatrix}^T \tag{4.43}$$

Donde $\gamma_N(\Phi,h)$ y $\gamma_U(\Phi, h)$ son funciones cerradas (exactas) de sus argumentos cuyas expresiones pueden consultarse en NIMA-TR8350-2, 2004 o en Hofmann/Moritz, 2006. Cuando el punto $P(\lambda, \Phi, h)$ no pertenece al interior de S_0, por definición, $\boldsymbol{\gamma}(P)$ es ortogonal al elipsoide geocéntrico equipotencial con-focal con S_0 de potencial igual a $U_n(P)$ (Hofmann/Moritz, 2006), pero no necesariamente es ortogonal a S_0, salvo, claro está, si h=0. Esto, junto con la simetría axial del potencial normal explica la ausencia de la componente ***E*** de $\boldsymbol{\gamma}^g(\Phi, h)$ y la existencia de la componente residual ***N-S*** en la Ec. (4.43) para h>0. Cuando h=0 resulta la *Fórmula de Somigliana* (Hofmann/Moritz, 2006):

$$\begin{aligned} & h = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\gamma}^g(\Phi, h) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\gamma_U(\Phi, 0) \end{bmatrix}^T \\ & \gamma_U(\Phi, 0) \triangleq \gamma(\Phi) = \gamma_o \frac{1 + k \sin^2 \Phi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \Phi}} \; ; \\ & k = \frac{(1-f)\gamma_p}{\gamma_o} - 1 = 0{,}001931852 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Donde: γ_o=9.7803253359 m/s^2 es la *gravedad normal ecuatorial* y γ_p=9.8321849378 m/s^2 es la *gravedad normal polar*. Para alturas geodésicas h$\leqslant$20Km resulta arctan($|\gamma_N(\Phi,h)|/|\gamma_U(\Phi,h)|$) < 4arcseg, lo que equivale a $|\gamma_N(\Phi,h)|$<2 μg. Esto determina la cota de error de la aproximación usual para alturas atmosféricas: $\gamma_N \approx 0$ y $\gamma_U(\Phi, h)$ calculado mediante la siguiente expansión de Taylor de 2º orden en h:

$$\begin{aligned} & \gamma_U(\Phi, h) \cong \hat{\gamma}_U(\Phi, h) \triangleq \gamma(\Phi)\left(1 - 2\left(1 + f + m - 2f\sin^2(\Phi)\right)\frac{h}{a} + 3\left(\frac{h}{a}\right)^2\right) \\ & m = \frac{\Omega^2 a^2 b}{GM_T} \end{aligned} \tag{4.45}$$

El error de la aproximación (4.45) es inferior a 0.15μg para $h \leqslant 20$Km (Hofmann/Moritz 2006). Los mismos autores proponen la siguiente aproximación de la componente Norte ($\hat{\gamma}_N$) con un error inferior a 0.1μg para $h \leqslant 20$Km:

$$\gamma_N(\Phi, h) \approx \hat{\gamma}_N(\Phi, h) \triangleq 8.08 \times 10^{-6} h[Km]\text{sen}(2\Phi) \;\; m/seg^2 \tag{4.46}$$

Hsu (1998) propone una aproximación polinomial global aun más precisa con errores <0.01μg para h⩽30Km para $\gamma_U(\Phi, h)$.

4.4.2 Gravedad normal en coordenadas terrestres (ECEF)

A diferencia de su expresión en coordenadas geodésicas (geográficas), la solución del problema (4.39) no tiene una expresión compacta exacta en coordenadas geocéntricas o cartesianas terrestres ECEF del punto P. Al respecto, Hofmann/Moritz, 2006 (pp 75 y 76) demuestran que el potencial gravitacional normal queda expresado por la siguiente expansión en términos armónicos en función de las coordenadas cartesianas de $\mathbf{P}^e = [x^e \quad y^e \quad z^e]^T$:

$$V_n(\mathbf{P}^e) = \frac{GM_T}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} J_{2n} P_{2n}\left(\frac{z^e}{r}\right)\right] \tag{4.47}$$

Donde, J_{2n} son los coeficientes pares de la expansión (4.38), $\text{sen}\Phi_c = z^e / r$ y $r = \sqrt{x^{e2} + y^{e2} + z^{e2}}$. Usando la expresión anterior junto con la segunda de las Ecs. (4.34) la gravedad normal en coordenadas cartesianas terrestres se obtiene diferenciando la serie infinita (4.47) y el potencial centrífugo respecto de las componentes x^e, y^e, z^e. Wei y Schwarz, (1990) demuestran que el resultado es una serie que aproxima la gravedad normal con un grado arbitrario de precisión con la forma general:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}^e(\mathbf{P}^e) &= \nabla_e U_n(\mathbf{P}^e) = \boldsymbol{\gamma}_g^e(\mathbf{P}^e) + \boldsymbol{\gamma}_c^e(\mathbf{P}^e) \\ &= -\frac{GM_T}{r^3}\begin{pmatrix}\left(c_0 + c_1 s^2 + c_2 s^4 + c_3 s^6 .. + c_k s^{2k} ..\right) x^e \\ \left(c_0 + c_1 s^2 + c_2 s^4 + c_3 s^6 .. + c_k s^{2k} ..\right) y^e \\ \left(d_0 + d_1 s^2 + d_2 s^4 + d_3 s^6 .. + d_k s^{2k} ..\right) z^e\end{pmatrix} + \Omega^2 \begin{pmatrix} x^e \\ y^e \\ 0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.48}$$

Con:

$$\boldsymbol{\gamma}_g^e(\mathbf{P}^e) = \nabla_e V_n(\mathbf{P}^e); \;\; \boldsymbol{\gamma}_c^e(\mathbf{P}^e) = \nabla_e W(\mathbf{P}^e) \tag{4.49}$$

Donde el operador ∇_e denota el operador gradiente según las coordenadas ECEF, $s = z^e / r$ los coeficientes c_i y d_i son funciones de los primeros coeficientes J_2, J_4, J_6… y de las primeras potencias pares de (a/r). Los mismos autores verifican numéricamente que truncando las series en (4.48) en k=3 los errores respecto del valor exacto de $\boldsymbol{\gamma}^e$ son inferiores a 0,05μg.

4.4.3 Aproximación J_2

Dado que los coeficientes gravitacionales decrecen rápidamente con el índice n el término dominante de la serie (4.47) (también de las (4.32) y (4.38)) corresponde al coeficiente zonal J_2 ($\cong$1.082x10^{-03}). En efecto, J_2 supera casi en 3 órdenes de magnitud a cualquier otro coeficiente gravitacional y refleja el abultamiento ecuatorial y consiguiente achatamiento en los polos del Geoide. Para ciertas aplicaciones, esto justifica truncar la serie (4.47) en el primer término lo que conduce a la siguiente aproximación del potencial gravitacional normal.

$$\begin{aligned} V_n(\mathbf{P}^e) \approx V_{J_2}(\mathbf{P}^e) &= \frac{GM_T}{r}\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 P_{20}(z^e/r)\right] \\ &= \frac{GM_T}{r}\left[1+\frac{J_2 a^2}{2r^2}\left(1\text{-}3(z^e/r)^2\right)\right] \end{aligned} \tag{4.50}$$

La aproximación de la gravedad normal que surge de la Ec. (4.50) equivale a truncar la (4.48) en el termino k=1. El resultado es la aproximación denominada "J_2" de la gravedad normal en coordenadas ECEF (ver también Hsu, 1998):

$$\gamma^e_{J_2} = \boldsymbol{\gamma}^e_{gJ_2}(\mathbf{P}^e) + \boldsymbol{\gamma}^e_c(\mathbf{P}^e) = -\frac{GM_T}{r^3}\begin{bmatrix} (1+\frac{3J_2a^2}{2r^2}-\frac{15J_2a^2}{2r^2}s^2)x^e \\ (1+\frac{3J_2a^2}{2r^2}-\frac{15J_2a^2}{2r^2}s^2)y^e \\ (1+\frac{9J_2a^2}{2r^2}-\frac{15J_2a^2}{2r^2}s^2)z^e \end{bmatrix} + \Omega^2\begin{bmatrix} x^e \\ y^e \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

Con:

$$\boldsymbol{\gamma}^e_{gJ_2}(\mathbf{P}^e) = \nabla_e V_{J_2}(\mathbf{P}^e); \tag{4.52}$$

Hsu (1998) compara $\boldsymbol{\gamma}^e_{J_2}$ con el valor exacto de la gravedad normal y demuestra numéricamente que, hasta los 700Km de altura, las diferencias en la componente según la vertical geodésica es inferior a 12μg mientras que la diferencia en la dirección N-S se mantiene inferior a 6,3μg.

4.4.2 Perturbaciones de la Gravedad

El modelo normal aproxima globalmente la gravedad terrestre con errores promedio de 40 a 50 μg llegando a unos 100μg cerca o sobre las grandes cadenas de montañas (Jekeli 1997). Un tal modelo implementado en un sistema integrado INS/GPS de alta calidad permite obtener precisiones de actitud del orden de los 30 arc-seg. (Schwarz/Wei, 1995) y 10 a 20 cm. en posición en 3D (Hutton et al, 1997). Esta aproximación ha resultado históricamente suficiente en muchas aplicaciones de interés. Sin embargo, la mejora en la tecnología de los instrumentos inerciales ha motivado una demanda creciente de precisión de la navegación para la cual la limitante principal resulta ser cada vez más el modelo matemático de la gravedad (Jekeli et al 2007). Entre las aplicaciones que requieren y requerirán cada vez más precisión citamos: el relevamiento geofísico aéreo, la georreferenciación automática de imágenes ópticas o de radar y los vuelos prolongados en navegación inercial libre. Como se demuestra en

Jekeli, (1997) la fuente más significativa de error del modelo de gravedad corresponde a la estimación de la componente horizontal no tenida en cuenta por el modelo normal, de allí la importancia del modelado de la deflexión vertical introducida en el Párrafo 4.3.4.

Con referencia a las expresiones (4.41) y (4.42) se definen la *perturbación del potencial gravitatorio* (escalar) $T(P)$ y la *perturbación de la gravedad* (vector) $\boldsymbol{\delta}\mathbf{g}(P)$ en un punto cualquiera P como:

$$\begin{aligned} T(P) &\triangleq U(P) - U_n(P) \\ \boldsymbol{\delta}\mathbf{g}(P) &\triangleq \mathbf{g}(P) - \boldsymbol{\gamma}(P) = \nabla T(P) \end{aligned} \tag{4.53}$$

Teniendo en cuenta la transformación (4.27), es usual aproximar $\boldsymbol{\delta}\mathbf{g}^g$ como:

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{g}^g = \mathbf{C}_a^g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} - \boldsymbol{\gamma}^g \cong \begin{bmatrix} -g\eta \\ -g\xi \\ -\delta g \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

Donde: $g = |\mathbf{g}|$, $\gamma = |\boldsymbol{\gamma}| \cong \gamma_U$ y $\delta g \triangleq g - \gamma$ es la *perturbación escalar de la gravedad*. Se advierte de la anterior, que las componentes ξ y η de la deflexión vertical determinan la componente horizontal de la perturbación $\boldsymbol{\delta}\mathbf{g}^g$. A partir de las Ecs. (4.43) y (4.54) se obtiene la siguiente expresión de la gravedad normal corregida:

$$\mathbf{g}^g \cong \boldsymbol{\gamma}_{corr}^g(\lambda, \Phi, h; \xi, \eta) = -\begin{bmatrix} (\gamma + \delta g)\eta \\ (\gamma + \delta g)\xi + \gamma_N \\ \delta g + \gamma_U \end{bmatrix} \tag{4.55}$$

Asociadas con las definiciones anteriores, en Geodesia se definen las *anomalías vectorial y escalar de gravedad* sobre un punto P_G sobre el Geoide como (Hofmann/Moritz 2006):

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{g}(P_G) &\triangleq \mathbf{g}(P_G) - \boldsymbol{\gamma}(Q_E) \\ \Delta g(P_G) &\triangleq g(P_G) - \gamma(Q_E) \end{aligned} \tag{4.56}$$

Donde Q_E es un punto sobre el elipsoide normal en la vertical geodésica de P_G, $g(P_G) = |\mathbf{g}(P_G)|$ y $\gamma(Q_E) = |\boldsymbol{\gamma}(Q_E)|$. Dado que $\mathbf{g}(P_G)$ es raramente accesible directamente a la medida, su valor se obtiene a partir de datos gravimétricos superficiales que luego son reducidos al geoide suprimiendo los efectos de la altura y de la topografía locales mediante un procedimiento llamado "*de continuación hacia abajo*" (*downward continuation*, Hofmann/Moritz, 2006)) en el que intervienen modelos de la densidad y de la topografía locales. El interés de reducir $\mathbf{g}(P)$ al geoide es que esta superficie es mucho más suave que la superficie terrestre y por lo tanto más tratable matemáticamente. Los mapas digitales de las anomalías de gravedad (ya sea puntuales o promediadas sobre áreas) constituyen el formato usual en que es provista la información de la gravedad local por parte de las instituciones nacionales o regionales encargadas de gestionar los datos geofísicos y geodésicos. Por lo tanto estos mapas

suelen ser la única información de base con que se cuenta para la determinación de las perturbaciones de gravedad ya sea en altura o sobre la superficie terrestre.

Casi todos los métodos, para obtener las perturbaciones de la gravedad **δg** fuera del Geoide a partir de las anomalías de gravedad se basan en la solución del problema de valores en la frontera de un potencial newtoniano (problema de Dirichlet). La mayoría de ellos usan al Geoide como superficie equipotencial teórica de frontera y se inspiran en el hecho de que U y U_n tienen la misma componente centrífuga (comparar (4.34) con (4.41)) por lo que T(P) en (4.53) es puramente "gravitacional" y por lo tanto armónico ($\nabla^2 T = 0$) por encima de la topografía terrestre. El resultado surge de una aproximación de la solución de $\nabla^2 T = 0$ con valores de T estimados sobre el Geoide en base a datos digitalizados de las anomalías de gravedad. Un interesante estudio sobre estos métodos, denominados de "continuación hacia arriba" (*upward continuation* Hofmann/Moritz, 2006) publicado recientemente por Jekeli et al. (2007), concluye que la principal fuente de error es la discretización espacial de los datos de anomalía y el truncamiento de la integral de Stokes que resuelve el problema armónico. Grejner-Brzezinska/Wang, (1998) reportan el diseño de un sistema de navegación integrado INS/GPS de alta precisión (con errores <5 cm. en posición y <10 arc-seg. en orientación), como componente de un sistema de mapeo mediante georreferenciación automática de imágenes aéreas. El modelo de gravedad del sistema de navegación incorpora una grilla de valores de la deflexión de la vertical en altura obtenida mediante un método de alta fidelidad de la continuación hacia arriba de la anomalía de gravedad como los descritos por Jekeli et al. (2007).

Capítulo 5
Ecuaciones Cinemáticas y de Navegación

Las ecuaciones cinemáticas son las ecuaciones diferenciales que describen los movimientos traslacional y rotacional de un móvil respecto de un dado sistema de coordenadas de referencia. Si $\mathbf{P}^{\nu}$ es la posición de un vehículo en una dada terna de referencia o de navegación $\{\boldsymbol{\nu}\}$ y la orientación (posición angular) de la terna del cuerpo del vehículo $\{\mathbf{b}\}$ respecto de $\{\boldsymbol{\nu}\}$ está caracterizada, por ejemplo, por la MCD $\mathbf{C}_b^{\nu}$, las ecuaciones cinemáticas determinan la evolución temporal de $\mathbf{P}^{\nu}$ y $\mathbf{C}_b^{\nu}$. Las funciones forzantes de las ecuaciones cinemáticas son: el vector de la aceleración lineal y el vector de la velocidad angular del móvil, ambos relativos al sistema de referencia elegido. En presencia de un campo gravitacional como el terrestre la aceleración lineal es la composición de la aceleración gravitacional y la aceleración inercial o *fuerza específica* provocada por fuerzas inerciales tales como la propulsión, la resistencia aerodinámica o la sustentación.

En un sistema de navegación inercial, la distinción entre fuerza específica y aceleración gravitacional es fundamental. En efecto, el principio de relatividad nos advierte que sin mediciones relativas a algún objeto externo, es imposible determinar el estado de movimiento de un vehículo moviéndose libremente en un campo gravitacional. Más específicamente, en este caso, un acelerómetro a bordo del vehículo que mida desplazamientos relativos de una masa de prueba respecto de su carcasa solidaria al móvil, indicará aceleración nula dado que, tanto la masa de pruebas como la carcasa están sometidas al mismo campo gravitacional. Así, sólo cuando exista aceleración inercial un acelerómetro vectorial a bordo registrará su propia aceleración trasmitida a través de la estructura mecánica del vehículo respecto de un sistema inercial. Del mismo modo, los giróscopos a bordo del vehículo medirán su propia velocidad angular también referida a un sistema inercial.

Los sistemas de navegación inercial son por definición aquellos que utilizan exclusivamente acelerómetros y giróscopos como instrumentos de medida. Por lo expuesto, dado que la aceleración gravitacional no puede ser medida por instrumentos inerciales un sistema de navegación inercial requiere necesariamente de un modelo matemático de la gravitación en función de las coordenadas del vehículo.

Cuando la terna de referencia es inercial, el modelo gravitacional y los instrumentos inerciales proveen toda la información requerida para integrar las ecuaciones cinemáticas. Sin embargo, para cualquier otra terna de referencia será necesario transformar las mediciones inerciales (y la gravitación) según la formulación elegida. Llamaremos *ecuaciones de navegación* a las ecuaciones cinemáticas transformadas de modo tal que sus funciones de entrada sean las magnitudes efectivamente medidas por los instrumentos inerciales.

Entre las primeras decisiones a tomar en el diseño de un sistema de navegación están la terna de referencia y el modelo de la gravedad (ver Capítulo 4). Ambas quedan

fuertemente condicionadas por el tipo de vehículo considerado. En general, se podrá decir que la terna ECI no es adecuada para vehículos sub-atmosféricos por tratarse mayormente de aplicaciones que requieren ser referidas a la superficie terrestre. En vehículos espaciales la decisión entre ECEF y ECI está muy condicionada a la misión y es por tanto menos tajante. En efecto, las misiones de observación terrestre y aún de comunicaciones podrán tener requerimientos de provisión de datos referidos a ECEF. Esta condición puede verse reforzada por el hecho de que una terna fija a la Tierra se adapta mejor a un modelo de gravedad por expansión trunca en armónicos esféricos.

La terna LGV es tradicionalmente empleada en aeronáutica, navegación marina, terrestre y subacuática. El motivo es doble, por un lado es la mejor adaptada al modelo de la gravedad normal que es la aproximación más sencilla de usar, por otro, responde a una demanda usual en este tipo de aplicaciones cual es el de expresar la velocidad de desplazamiento en coordenadas cardinales (ENU).

Sin embargo, como se verá en el Capítulo 7, esta opción conduce a algoritmos *strap-down* mucho más complejos que los referidos a una terna ECEF y menos precisos en altas velocidades. La referencia a una terna ECEF facilita además la fusión de datos GNSS (Capítulo 8) normalmente referidos a dicha terna y de uso tan generalizado en todo sistema de navegación. Para vehículos con desplazamientos limitados a pocas decenas de Km. con posibilidad de despreciar la curvatura terrestre, es usual una terna LGV (posiblemente GEO) fija a algún punto a la Tierra a lo que podrá agregarse la hipótesis de gravedad constante, posiblemente con un sesgo que estimaría el propio sistema de navegación integrada.

En los primeros 3 párrafos de este capítulo se deducen las ecuaciones de navegación para los tres sistemas de referencia mas utilizados, a saber: ECI, ECEF y LGV. El lector podrá extender el procedimiento expuesto a otros sistemas de referencia que puedan ser de su interés. En el Párrafo 5.4 se analizan aspectos dinámicos de las ecuaciones de navegación. En particular se describen dinámicas inestables inherentes a estas ecuaciones y un método clásico usado en aeronavegación para paliar estos efectos.

5.1 Ecuaciones de Navegación en Coordenadas ECI.

En este caso el sistema de referencia es inercial y las ecuaciones de Newton proveen directamente las ecuaciones cinemáticas que determinan la evolución de las coordenadas $\mathbf{P}^i$ de la posición de un móvil:

$$m\ddot{\mathbf{P}}^i = m\mathbf{g}_g^i + \mathbf{F}^i \tag{5.1}$$

Siendo m la masa del móvil, $m\mathbf{g}_g^i$ la fuerza gravitacional en coordenadas inerciales y $\mathbf{F}^i$ la fuerza no gravitacional o inercial resultante actuando sobre el vehículo. Introduciendo en (5.1) la definición de la *fuerza específica:* $\mathbf{f}^i \triangleq \mathbf{F}^i/m$, resulta la *ecuación fundamental de la navegación inercial* en coordenadas inerciales:

$$\ddot{\mathbf{P}}^i = \mathbf{g}_g^i + \mathbf{C}_b^i \mathbf{f}^b \tag{5.2}$$

Puesto que la fuerza específica efectivamente medida por los acelerómetros a bordo del vehículo es $\mathbf{f}^b$ y no $\mathbf{f}^i$, es necesario conocer en todo momento la MCD* $\mathbf{C}_b^i$ que transforma las coordenadas referidas a la terna de la unidad de mediciones inerciales (UMI)† a las coordenadas en la terna inercial. Agrupando la ecuación cinemática (5.2), la Ec. **(3.20)** adaptada a la evolución de C_b^i y la ecuación de la velocidad: $\mathbf{V}^i = \dot{\mathbf{P}}^i$, se obtienen las ecuaciones de navegación o del estado cinemático del móvil en coordenadas inerciales:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}^i &= \mathbf{V}^i; & \mathbf{P}^i(0) &= \mathbf{P}_0^i \\ \dot{\mathbf{V}}^i &= \mathbf{g}_g^i(\mathbf{P}^i) + \mathbf{C}_b^i \mathbf{f}^b; & \mathbf{V}^i(0) &= \mathbf{V}_0^i \\ \dot{\mathbf{C}}_b^i &= \mathbf{C}_b^i \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b); & \mathbf{C}_b^i(0) &= \mathbf{C}_{b,0}^i \end{aligned} \tag{5.3}$$

Donde los vectores velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ y fuerza específica $\mathbf{f}^b$ respecto del sistema inercial medidos por la UMI resultan las funciones forzantes de las ecuaciones de navegación con $\mathbf{P}_0^i$, $\mathbf{V}_0^i$ y $\mathbf{C}_{b,0}^i$ la posición, la velocidad y la orientación iniciales.

Cuando, como es usual en la práctica, la terna ECI se hace coincidir con la ECEF en el instante inicial $\mathbf{P}^i(0) = \mathbf{P}^e(0)$. En caso de que la posición inicial del móvil esté expresada en coordenadas curvilíneas geodésicas (λ, Φ, h), de acuerdo con la **(4.20)** se usará:

$$\mathbf{P}^i(0) = \mathbf{P}^e(0) = \begin{bmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_n + h)\cos(\lambda)\cos(\Phi) \\ (R_n + h)\sin(\lambda)\cos(\Phi) \\ (R_n(1-\varepsilon^2) + h)\sin(\Phi) \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Aunque la terna ECI es más frecuentemente utilizada en vehículos espaciales, cuando el punto de partida de la navegación está sobre la superficie terrestre o referido a un punto sobre ésta, la orientación inicial se calcula mediante la composición $\mathbf{C}_b^i(0) = \mathbf{C}_e^i(0)\mathbf{C}_g^e(0)\mathbf{C}_b^g(0)$ con $\mathbf{C}_e^i(0) = I$, donde: $\mathbf{C}_b^g(0) = \mathbf{C}_l^g \mathbf{C}_b^l(0)$ resulta de componer la 2ª de las Ecs. **(4.18)** con la transpuesta de la **(4.29)** y se expresa en función de los ángulos de Euler: ψ (yaw) (azimut geográfico medido desde el Norte al Este), θ (pitch o elevación) y φ (rolido), según:

$$\mathbf{C}_b^g = \begin{bmatrix} C\theta S\psi & S\theta S\varphi S\psi + C\varphi C\psi & C\varphi S\theta S\psi - S\varphi C\psi \\ C\theta C\psi & S\theta S\varphi C\psi - C\varphi S\psi & C\varphi S\theta C\psi + S\varphi S\psi \\ S\theta & -S\varphi C\theta & -C\varphi C\theta \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

$\mathbf{C}_g^e(0)$ se obtiene a partir de la latitud y la longitud geodésicas locales Φ, λ (ver Ec. **(4.19)**):

---

* Usamos la MCD con fines ilustrativos pero es válida cualquier otra representación de la orientación vista en el Capítulo 3.

† Salvo indicación expresa, consideramos la UMI alineada con la terna del vehículo (**b**) o en su defecto conocida la MCD que relaciona a ambas.

$$\mathbf{C}_g^e = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\lambda) & -\text{sen}(\Phi)\cos(\lambda) & \cos(\Phi)\cos(\lambda) \\ \cos(\lambda) & -\text{sen}(\Phi)\text{sen}(\lambda) & \cos(\Phi)\text{sen}(\lambda) \\ 0 & \cos(\Phi) & \text{sen}(\Phi) \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

Por otra parte, si la velocidad inicial está expresada en coordenadas geográficas, entonces:

$$\mathbf{V}^i(0) = \mathbf{V}^e(0) = \mathbf{C}_g^e \mathbf{V}^g(0) \tag{5.7}$$

Dependiendo de las aplicaciones (ver discusión al respecto en el Capítulo 4), el modelo de gravitación, requerido en las Ecs. (5.3), podrá basarse en: a) la expansión en armónicos esféricos **(4.36)** para $\mathbf{g}_g^c(\lambda, \Phi_c, r)$ calculada en función de las coordenadas esféricas del vehículo o b) en la gravitación normal expresada en función de las coordenadas cartesianas terrestres del vehículo. En ambos casos, los desarrollos son truncados a un orden $n=n_{max}$ compatible con la precisión requerida. En el primer caso, se usará la siguiente secuencia de transformaciones para obtener las coordenadas esféricas del punto *P*:

1) $$r = |\mathbf{P}^i|; \;\; \mathbf{P}^e = \mathbf{C}_i^e \mathbf{P}^i \tag{5.8}$$

2) $$\Phi_c = \text{arcsen}(z^e / r); \;\; \lambda = \arctan(x^e / y^e) \tag{5.9}$$

Con $\mathbf{C}_i^e$ calculada mediante la **(4.12)**. Para calcular luego $\mathbf{g}_g^i = \mathbf{C}_c^i \mathbf{g}_g^c(\lambda, \Phi_c, r)$ se deberá actualizar $\mathbf{C}_c^i = \mathbf{C}_e^i \mathbf{C}_c^e$ mediante las Ec. **(4.12)** y **(4.14)**.

En el segundo caso, se podrá usar la siguiente expresión de la gravitación normal expresada en coordenadas terrestres {**e**} y en función también de las coordenadas terrestres del punto *P* (ver Ec. **(4.48)**):

$$\boldsymbol{\gamma}_g^e(\mathbf{P}^e) = -\frac{GM_T}{r^3} \begin{pmatrix} \left(c_0 + c_1 s^2 + c_2 s^4 + c_3 s^6 .. + c_k s^{2k} ..\right) x^e \\ \left(c_0 + c_1 s^2 + c_2 s^4 + c_3 s^6 .. + c_k s^{2k} ..\right) y^e \\ \left(d_0 + d_1 s^2 + d_2 s^4 + d_3 s^6 .. + d_k s^{2k} ..\right) z^e \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

En caso de requerirse las coordenadas curvilíneas geodésicas de la posición del vehículo se usarán las relaciones **(4.21)** para la transformación $\mathbf{P}^e \rightarrow (\lambda, \Phi, h)$.

En la Fig. 5.1 se resume la mecanización de las ecuaciones de navegación en coordenadas ECI (Ecs. (5.3)) ejemplificadas para el modelo de gravitación normal en coordenadas terrestres.

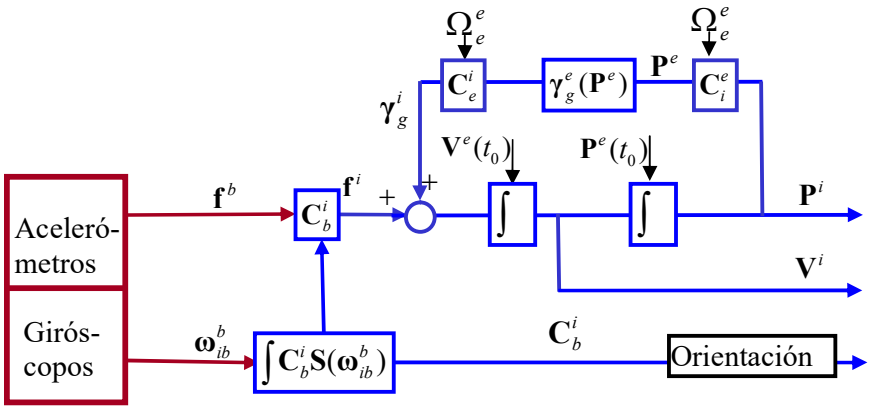


Figura 5.1: Mecanización de las ecuaciones de navegación en coordenadas ECI.

La orientación del vehículo respecto de la terna de navegación queda determinada por $\mathbf{C}_b^i$. En la práctica, en lugar de integrar la ecuación diferencial matricial no lineal (5.3) que requeriría actualizar 9 parámetros redundantes (ver Capítulo 3), como se verá en el Capítulo 7, se procede a integrar numéricamente la ecuación del coneo **(3.98)** de dimensión 3 que da el ángulo vectorial de rotación instantáneo entre ambas ternas. Con base en este ángulo, la MCD y el cuaternión correspondientes pueden luego ser calculados, respectivamente, mediante las **(3.24)** y **(3.62)**.

5.2 Ecuaciones de Navegación en Coordenadas ECEF.

Derivando dos veces respecto del tiempo la relación: $\mathbf{P}^i = \mathbf{C}_e^i \mathbf{P}^e$ y recordando que $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \triangleq \boldsymbol{\Omega}_e^e =$ *constante,* se obtienen sucesivamente:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}^i &= \dot{\mathbf{C}}_e^i \mathbf{P}^e + \mathbf{C}_e^i \dot{\mathbf{P}}^e = \mathbf{C}_e^i \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e)\mathbf{P}^e + \mathbf{C}_e^i \dot{\mathbf{P}}^e \\ \ddot{\mathbf{P}}^i &= \mathbf{C}_e^i \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_e^e)\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_e^e)\mathbf{P}^e + \mathbf{C}_e^i \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_e^e)\dot{\mathbf{P}}^e + \mathbf{C}_e^i \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_e^e)\dot{\mathbf{P}}^e + \mathbf{C}_e^i \ddot{\mathbf{P}}^e \end{aligned} \tag{5.11}$$

Usando la notación producto vectorial y después de reordenar términos, se obtiene el vector aceleración inercial en coordenadas terrestres:

$$[\ddot{\mathbf{P}}^i]^e = \mathbf{C}_i^e \ddot{\mathbf{P}}^i = \boldsymbol{\Omega}_e^e \times (\boldsymbol{\Omega}_e^e \times \mathbf{P}^e) + 2(\boldsymbol{\Omega}_e^e \times \dot{\mathbf{P}}^e) + \ddot{\mathbf{P}}^e \tag{5.12}$$

Substituyendo en la ecuación de Newton (5.2) re-expresada en coordenadas terrestres, se obtiene:

$$[\ddot{\mathbf{P}}^i]^e = \boldsymbol{\Omega}_e^e \times (\boldsymbol{\Omega}_e^e \times \mathbf{P}^e) + 2(\boldsymbol{\Omega}_e^e \times \dot{\mathbf{P}}^e) + \ddot{\mathbf{P}}^e = \mathbf{g}_g^e + \mathbf{f}^e \tag{5.13}$$

De la cual, después de introducir la velocidad del vehículo relativa a la Tierra definida como: $\mathbf{V}^e \triangleq \dot{\mathbf{P}}^e$ y la expresión de la gravedad en coordenadas terrestres:

$$\mathbf{g}^e(\boldsymbol{\Omega}^e, \mathbf{P}^e) = \mathbf{g}_g^e(\mathbf{P}^e) - \boldsymbol{\Omega}_e^e \times (\boldsymbol{\Omega}_e^e \times \mathbf{P}^e) \tag{5.14}$$

se obtiene la correspondiente ecuación fundamental de la navegación en coordenadas ECEF:

$$\ddot{\mathbf{P}}^e = \dot{\mathbf{V}}^e = \mathbf{C}_b^e \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^e(\mathbf{\Omega}^e, \mathbf{P}^e) - 2(\mathbf{\Omega}_e^e \times \mathbf{V}^e) \tag{5.15}$$

El último término de la (5.15) se denomina *aceleración de Coriolis* en honor a su descubridor. Una vez más es necesario completar la Ec. (5.15) con la cinemática de la orientación:

$$\dot{\mathbf{C}}_b^e = \mathbf{C}_b^e \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{eb}^b) = \mathbf{C}_b^e \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{\Omega}_e^b) = \mathbf{C}_b^e \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - S(\mathbf{\Omega}_e^e)\mathbf{C}_b^e \tag{5.16}$$

En la anterior se usó: $\boldsymbol{\omega}_{eb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{\Omega}_e^b$, la linealidad del operador S(·) y las relaciones **(3.20)**. Resumimos las anteriores en las siguientes ecuaciones del estado cinemático o de navegación en coordenadas ECEF representadas en el diagrama de la Fig. 5.2.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}^e &= \mathbf{V}^e & ; \quad & \mathbf{P}^e(0) = \mathbf{P}_0^e \\ \dot{\mathbf{V}}^e &= \mathbf{C}_b^e \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^e(\mathbf{\Omega}_e^e, \mathbf{P}^e) - 2(\mathbf{\Omega}_e^e \times \mathbf{V}^e) & ; \quad & \mathbf{V}^e(0) = \mathbf{V}_0^e \\ \dot{\mathbf{C}}_b^e &= \mathbf{C}_b^e \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - S(\mathbf{\Omega}_e^e)\mathbf{C}_b^e & ; \quad & \mathbf{C}_b^e(0) = \mathbf{C}_{b,0}^e \end{aligned} \tag{5.17}$$

Las condiciones iniciales de posición y velocidad son similares a las determinadas para la terna ECI (ver Ecs. (5.4) y (5.7)), mientras que para el cálculo de la orientación inicial son útiles las ecuaciones (5.5) y (5.6). Respecto del cálculo de la orientación, es válido nuevamente el comentario al final del Párrafo 5.1.

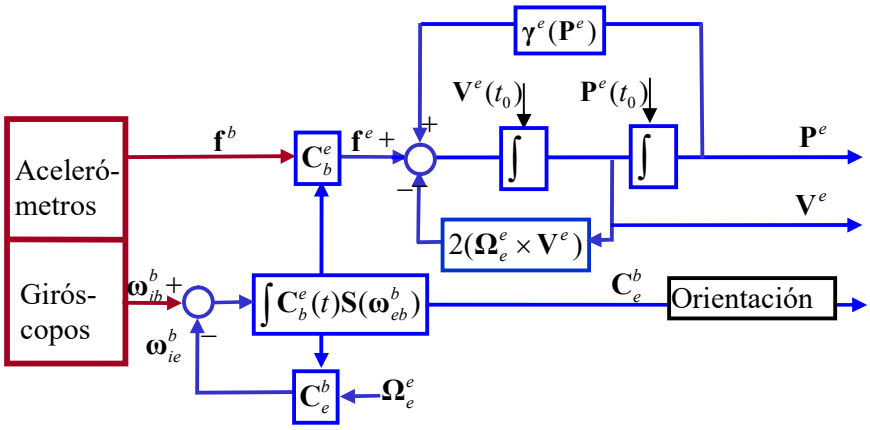


Figura 5.2: Mecanización de las ecuaciones de navegación en coordenadas ECEF.

Como fuera señalado en el Capítulo 4, en la mayoría de las aplicaciones atmosféricas y suborbitales, la gravedad normal γ es una aproximación suficientemente precisa de la gravedad. Vista la formulación cartesiana terrestre de la (5.15) resulta muy conveniente en este caso el uso de alguna de las aproximaciones de $\gamma^e(\mathbf{P}^e)$ estudiadas en el Capítulo anterior representadas por las Ecs. **(4.48)** ó **(4.51)**. En efecto, estas expresiones permiten calcular directamente la gravedad en función de las coordenadas del vehículo según la terna de navegación elegida

Para alturas orbitales, podrá usarse la expansión de la gravitación en armónicos esféricos expresada en coordenadas geocéntricas mediante las Ecs. **(4.36)** y **(4.37)** o bien la obtenida a partir de la aproximación del potencial gravitatorio con simetría axial **(4.38)** hasta un orden máximo $n=n_{max}$. En este caso se deberá actualizar la MCD $\mathbf{C}_c^e(\Phi_c,\lambda)$ mediante las Ec. **(4.12)** y **(4.14)** previa conversión de coordenadas mediante las (5.8) y (5.9).

En coordenadas LGV, el uso de la gravedad normal tiene el interés de que ésta pude calcularse en forma cerrada en función de las coordenadas de la posición. En la práctica se utilizan las siguientes aproximaciones de $\boldsymbol{\gamma}$ con grado decreciente de exactitud y expresadas en función de las coordenadas geodésicas del punto *P*:

$$h \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\gamma}^g(\Phi,h) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma_N(\Phi,h) \\ -\gamma_U(\Phi,h) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{\gamma}_N(\Phi,h) \\ -\hat{\gamma}_U(\Phi,h) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{\gamma}_U(\Phi,h) \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

Donde $\gamma_N(\Phi,h), \gamma_U(\Phi,h)$ son expresiones exactas publicadas en el informe NIMA-TR8350-2 (2004) mientras que $\hat{\gamma}_N(\Phi,h), \hat{\gamma}_U(\Phi,h)$ son las aproximaciones dadas por las Ecs. **(4.44)**, **(4.45)** y **(4.46)**. La formulación (5.18) tiene particular interés para la navegación de precisión en alturas atmosféricas ya que permite ser corregida usando la Ec. **(4.55)** que reproducimos a continuación:

$$\boldsymbol{\gamma}_{corr}^g(\lambda,\Phi,h;\xi,\eta) = -\begin{bmatrix} (\gamma+\delta g)\eta \\ (\gamma+\delta g)\xi+\gamma_N \\ \delta g+\gamma_U \end{bmatrix} \cong -(\gamma+\delta g)\begin{bmatrix} \eta \\ \xi+\dfrac{\gamma_N}{\gamma} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

en función de la perturbación de la gravedad y de la deflexión vertical locales expresadas en coordenadas geográficas, tal como se discutió al final del Capítulo 4. El uso del modelo (5.19) de la gravedad normal requiere, por una parte, implementar la transformación $\mathbf{P}^e \rightarrow (\lambda,\Phi,h)$ mediante las relaciones **(4.21)** y por otra actualizar la MCD $\mathbf{C}_g^e$ usando la expresión (5.6) para obtener:

$$\mathbf{g}^e(\lambda,\Phi,h) = \mathbf{C}_g^e\mathbf{g}^g(\lambda,\Phi,h) \cong \mathbf{C}_g^e\boldsymbol{\gamma}^g(\lambda,\Phi,h) \tag{5.20}$$

El diagrama de la la Fig. 5.2 resume la mecanización de las ecuaciones de navegación en coordenadas ECEF (Ecs.(5.17)) ejemplificada para el modelo de gravedad normal dado por las Ecs. **(4.48)** ó **(4.51)**.

5.3 Ecuaciones de Navegación en Coordenadas LGV.

La mayoría de las aplicaciones aeroespaciales o terrestres y aún ciertas satelitales, utilizan necesariamente como referencia de posición alguna terna fija a la Tierra, en particular la terna ECEF. Las ecuaciones de navegación en coordenadas LGV describen la orientación del vehículo respecto de esta última terna, en tanto que, como veremos su velocidad y posición referidas a la terna ECEF aunque expresadas en coordenadas LGV.

Partiendo de la relación entre las coordenadas terrestres y las coordenadas geodésicas de un punto *P* para $\alpha \neq 0$ en **(4.23)** y de la velocidad terrestre $\mathbf{V}^e \triangleq \dot{\mathbf{P}}^e$ y definimos:

$$\mathbf{V}^n \triangleq \mathbf{C}_e^n \mathbf{V}^e = \mathbf{C}_e^n \dot{\mathbf{P}}^e \quad \text{("Ground Speed")} \tag{5.21}$$

Notar que $\mathbf{V}^n$ es la velocidad del vehículo respecto de la Tierra expresada en coordenadas "*n*". Por definición la velocidad del vehículo respecto de la terna LGV es nula. Derivando ahora $\mathbf{V}^n$ respecto del tiempo se tiene:

$$\dot{\mathbf{V}}^n = \mathbf{C}_e^n \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ne}^e)\dot{\mathbf{P}}^e + \mathbf{C}_e^n \ddot{\mathbf{P}}^e \;\rightarrow\; \ddot{\mathbf{P}}^e = \mathbf{C}_n^e \dot{\mathbf{V}}^n - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ne}^e)\,\dot{\mathbf{P}}^e = \mathbf{C}_n^e \dot{\mathbf{V}}^n + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{en}^e)\,\dot{\mathbf{P}}^e \tag{5.22}$$

Sustituyendo en la (5.12) después de usar la relación: $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{en}^e) = \mathbf{C}_n^e \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{en}^n)\mathbf{C}_e^n$ y de pre-multiplicar por $\mathbf{C}_e^n$, se obtiene el vector aceleración inercial en coordenadas LGV:

$$[\ddot{\mathbf{P}}^i]^n = \dot{\mathbf{V}}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \mathbf{V}^n + \boldsymbol{\Omega}_e^n \times (\boldsymbol{\Omega}_e^n \times \mathbf{P}^n) + 2(\boldsymbol{\Omega}_e^n \times \mathbf{V}^n) \tag{5.23}$$

Comparando con la (5.12), nótese el término suplementario $\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \mathbf{V}^n$ de tipo Coriolis provocado por la traslación del vehículo "arrastrando" consigo la terna de referencia. Como se verá en el párrafo siguiente la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$, denominada *rotación por transporte* (*craft rate* en inglés) y denotada de ahora en más ρ^n, cumple un rol crucial en la mecanización de las ecuaciones de navegación en coordenadas LGV.

A partir de la ecuación de Newton (5.2) rescrita en coordenadas geodésicas $\{\mathbf{n}\}$ como:

$$[\ddot{\mathbf{P}}^i]^n = \mathbf{g}_g^n + \mathbf{f}^n \tag{5.24}$$

y usando la (5.23) despejamos $\dot{\mathbf{V}}^n$ para obtener la ecuación de traslación en coordenadas $\{\mathbf{n}\}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}^n &= -(2\boldsymbol{\Omega}_e^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{V}^n - \boldsymbol{\Omega}_e^n \times (\boldsymbol{\Omega}_e^n \times \mathbf{P}^n) + \mathbf{g}_g^n + \mathbf{f}^n \\ &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^n - (2\mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\Omega}_e^e + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{V}^n \end{aligned} \tag{5.25}$$

La actualización de la MCD $\mathbf{C}_e^n$, requerida en la Ec. (5.25), se obtiene mediante la ecuación de la cinemática de orientación:

$$\dot{\mathbf{C}}_e^n = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{en}^n)\mathbf{C}_e^n \tag{5.26}$$

A partir de $\mathbf{C}_e^n$, de acuerdo con la Ec. **(4.24)**, es posible calcular la longitud, la latitud y el ángulo α, del vehículo mediante:

$$\begin{aligned} \Phi &= \text{arcsen}(\mathbf{C}_e^n(3,3)); \\ \lambda &= \arctan(\mathbf{C}_e^n(3,2)/\mathbf{C}_e^n(3,1)); \\ \alpha &= \arctan(\mathbf{C}_e^n(1,3)/\mathbf{C}_e^n(2,3)) \end{aligned} \tag{5.27}$$

Las dos primeras de las Ecs. (5.27), junto con la altura geodésica *h,* calculada mediante:

$$\dot{h} = V_z^n \quad ; h(t_0) = h_0 \,, \tag{5.28}$$

determinan la posición del vehículo en coordenadas geodésicas.

La proyección instantánea de la fuerza específica medida por los acelerómetros según la terna $\{\mathbf{n}\}$ requiere actualizar la MCD $\mathbf{C}_b^n$ mediante su correspondiente ecuación cinemática:

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b) = \mathbf{C}_b^n \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{in}^n)\mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\rho^n + \boldsymbol{\Omega}_e^n)\mathbf{C}_b^n \tag{5.29}$$

Donde, en la última igualdad se usó la relación:

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \boldsymbol{\rho}^n + \mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\Omega}_e^e = \boldsymbol{\rho}^n + \boldsymbol{\Omega}_e^n \tag{5.30}$$

Como se mencionó en los párrafos anteriores, la integración de $\mathbf{C}_b^n$ y $\mathbf{C}_e^n$ es sustituida en la práctica por la integración de las ecuaciones de coneo asociadas a los respectivos ángulos vectoriales de rotación. Esto resulta en una importante reducción de la dimensionalidad del problema a la vez que evita se asegura verificar automáticamente las condiciones de ortonormalidad de las MCD.

A partir de $\mathbf{C}_b^n$ y, de acuerdo con la Ec. **(4.31)**, pueden calcularse los ángulos de Euler de la orientación del vehículo mediante (ver Fig. 5.3):

$$\begin{aligned} \psi^g &= \arctan(\mathbf{C}_n^b(1,1)/\mathbf{C}_n^b(1,2)) - \alpha; \\ \theta &= \text{arcsen}(\mathbf{C}_n^b(1,3)); \\ \varphi &= \arctan(\mathbf{C}_n^b(2,3)/\mathbf{C}_n^b(3,3)) \end{aligned} \tag{5.31}$$

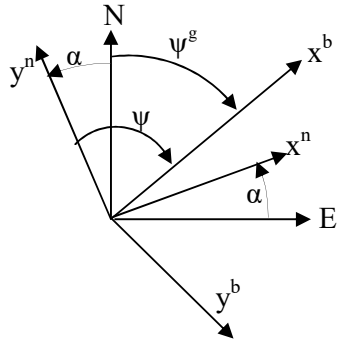


Figura 5.3: Relación entre las ternas del cuerpo, de navegación y geográfica en el plano horizontal.

Dado que las coordenadas LGV son predominantemente utilizadas en alturas atmosféricas, la gravedad $\mathbf{g}^n$ es usualmente aproximada por la gravedad normal $\boldsymbol{\gamma}^n$ en este caso (ver discusión relativa en el Capítulo 4). Más aún, en la mayoría de las aplicaciones es suficiente la última de las aproximaciones (5.18) lo que resulta particularmente adaptado a esta representación:

$$\mathbf{g}^n = \boldsymbol{\gamma}^g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{\gamma}_U(\Phi, h) \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

En caso de que la aproximación resultare insuficiente podrá usarse alguna versión mas precisa de las (5.18) o recurrir a las correcciones (5.19).

Las ecuaciones de navegación en coordenadas LGV se resumen en el siguiente sistema no lineal en forma de ecuaciones de estado con $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ y $\mathbf{f}^b$ como funciones forzantes de entrada:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{V}}^n &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^n(\mathbf{P}^e) - (2\boldsymbol{\Omega}_e^n + \boldsymbol{\rho}^n) \times \mathbf{V}^n && ; \mathbf{V}^n(0) = \mathbf{V}_0^n \\
\dot{h} &= V_z^n && ; h(t_0) = h_0 \\
\dot{\mathbf{C}}_b^n &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}^n + \boldsymbol{\Omega}_e^n)\mathbf{C}_b^n && ; \mathbf{C}_b^n(0) = \mathbf{C}_{b,0}^n \\
\dot{\mathbf{C}}_e^n &= -\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}^n)\mathbf{C}_e^n && ; \mathbf{C}_e^n(0) = \mathbf{C}_{e,0}^n
\end{aligned} \tag{5.33}$$

5.3.1 Rotación por transporte

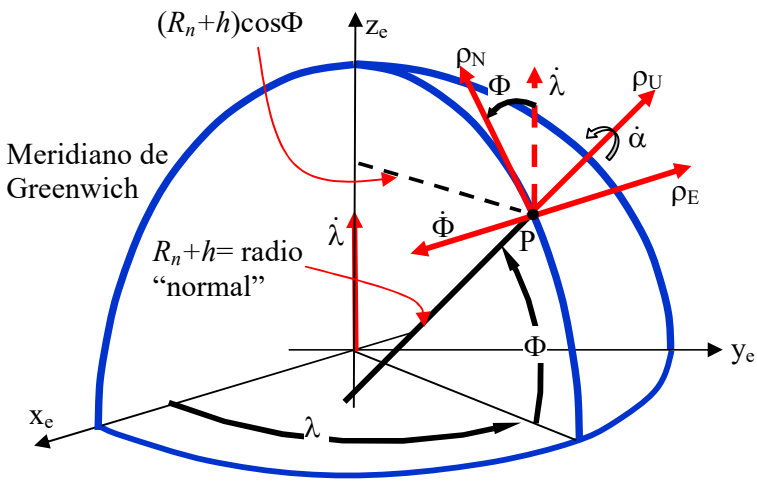


Figura 5.4: Definición de la rotación por transporte.

Como ya se indicó, el vehículo "arrastra" consigo la terna LGV pudiendo alterar en el camino su orientación respecto de la terna terrestre ECEF. Sólo los desplazamientos verticales (en dirección **U-D)** mantienen invariante la orientación de la terna LGV relativa a la ECEF. En cambio, los desplazamientos contenidos en el plano cardinal local (**N-S, E-O)** varían la orientación relativa entre ambas ternas a la velocidad angular

$\boldsymbol{\rho}$ (*rotación por transporte*) proporcional a la proyección de la velocidad del vehículo sobre dicho plano. En efecto, los cambios en latitud $\dot{\Phi}$, longitud $\dot{\lambda}$ y en el ángulo de deriva $\dot{\alpha}$ producen una rotación por transporte que expresada en la terna geográfica $\{\boldsymbol{g}\}$ resulta (ver Fig. 5.4):

$$\boldsymbol{\rho}^g = \rho_E \mathbf{x}_g + \rho_N \boldsymbol{y}_g + \rho_U \mathbf{z}_g = -\dot{\Phi}\mathbf{x}_g + \dot{\lambda}\cos(\Phi)\boldsymbol{y}_g + (\dot{\lambda}\mathrm{sen}(\Phi) + \dot{\alpha})\mathbf{z}_g \tag{5.34}$$

El signo opuesto entre $\dot{\Phi}$ y ρ_E es consistente con las definiciones de ambas magnitudes.

Para un punto genérico expresado en coordenadas curvilíneas geodésicas según $P\equiv(\Phi,\lambda,h)$ y usando los radios de curvatura paralelo **(4.6)** y meridiano **(4.11)**, del elipsoide normal definidos en el Capítulo 4, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\rho_E &= -\dot{\Phi} = -\frac{V_N}{R_m(\Phi)+h} \\
\rho_N &= \dot{\lambda}\cos(\Phi) = \frac{V_E}{R_n(\Phi)+h} \\
\rho_U &= \dot{\lambda}\mathrm{sen}(\Phi) + \dot{\alpha} = \frac{V_E}{R_n(\Phi)+h}\tan(\Phi) + \dot{\alpha}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Rescrita matricialmente, la Ec. (5.35) adquiere la forma:

$$\boldsymbol{\rho}^g = \mathcal{K}^g \mathbf{V}^g + \mathbf{z}_g \rho_U;\ \mathcal{K}^g \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{R_m(\Phi)+h} & 0 \\ \dfrac{1}{R_n(\Phi)+h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

Donde $\mathcal{K}^{\mathbf{g}}$ es el tensor de curvatura local del elipsoide expresado en coordenadas geográficas. Re-expresando la anterior en coordenadas (no cardinales) $\{\boldsymbol{n}\}$ se tiene:

$$\boldsymbol{\rho}^n = \mathbf{C}_g^n \mathcal{K}^g \mathbf{C}_n^g \mathbf{C}_g^n \mathbf{V}^g + \mathbf{z}_n \rho_z^n = \mathcal{K}^n \mathbf{V}^n + \mathbf{z}_n \rho_z^n;\quad \rho_U = \rho_z^n = \dot{\lambda}\mathrm{sen}(\Phi) + \dot{\alpha} \tag{5.37}$$

Notar que, bajo el cambio de coordenadas $\mathbf{C}_g^n$, $\mathcal{K}$ se transforma como un tensor, e.d: $\mathcal{K}^n = \mathbf{C}_g^n \mathcal{K}^g \mathbf{C}_n^g$ y además que, dado que la transformación $\mathbf{C}_g^n$ (Ec. **(4.18)**) deja invariante al eje **z,** se conserva la componente "**U**" o "**z**" del vector **ρ.**

Como es fácil mostrar mediante las definiciones:

$$\frac{1}{\mathrm{R}_x} \triangleq \left(\frac{S^2\alpha}{R_m+h} + \frac{C^2\alpha}{R_n+h}\right);\ \frac{1}{\mathrm{R}_y} \triangleq \left(\frac{C^2\alpha}{R_m+h} + \frac{S^2\alpha}{R_n+h}\right);\ \frac{1}{\mathrm{T}} \triangleq \left(\frac{C\alpha S\alpha}{R_n+h} - \frac{C\alpha S\alpha}{R_m+h}\right) \tag{5.38}$$

resulta:

$$\mathcal{K}^n = \begin{bmatrix} 1/\mathrm{T} & -1/\mathrm{R}_y & 0 \\ 1/\mathrm{R}_x & -1/\mathrm{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\rho}^n = \begin{bmatrix} V_x/\mathrm{T} - V_y/\mathrm{R}_y \\ V_x/\mathrm{R}_x - V_y/\mathrm{T} \\ \dot{\lambda}\mathrm{sen}(\Phi) + \dot{\alpha} \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

De la última de las Ecs. (5.35), cuando $\dot{\alpha} = 0$ la componente E de la velocidad induce una componente vertical ρ_U cuya magnitud crece sin límites en altas latitudes ($\Phi \rightarrow \pm\pi/2$). Con el fin de asegurar la integrabilidad de la Ec. (5.26) cerca de los polos, es necesario, entonces, introducir una derivada temporal $\dot{\alpha} \neq 0$ del ángulo de deriva, lo que se traduce en cambios en azimut respecto del Norte geográfico de la terna geodésica no-cardinal $\{\boldsymbol{n}\}$ (ver inciso 4.3.3 del Capítulo anterior).

Las mecanizaciones que usan $\dot{\alpha} \neq 0$ son denominadas "*de deriva de azimut*" (*wander azimuth* en inglés). Para la selección $\dot{\alpha} = -\dot{\lambda}\mathrm{sen}(\Phi)$ resulta $\rho_z^n = 0$ y la mecanización recibe el nombre de *azimut libre* aludiendo al hecho de que el sistema equivalente de navegación con plataforma no es actualizado en azimut con los desplazamientos en longitud. Notar que en este caso $\dot{\alpha} = 0$ en vehículos estacionarios o moviéndose sobre un meridiano. Es fácil imaginar diversos caminos cerrados sobre la superficie terrestre que produzcan distintos incrementos de α al final del circuito por lo que en general α no dependerá de la posición sino del camino recorrido desde el inicio de la navegación. Si, en cambio, se elije $\dot{\alpha} = -(\Omega_e + \dot{\lambda})\sin\Phi$, lo que equivale a $\rho_z^n = -\Omega_z^n$, la componente vertical local de la velocidad angular de la terna de navegación respecto de la terna inercial es tal que $\omega_{in,z}^n = \rho_z^n + \Omega_z^n = 0$. A esta mecanización se la denomina *de Foucault* ya que reproduce el comportamiento de una terna sobre el conocido péndulo que lleva su nombre. También en este caso ρ_z^n es finita en latitudes polares: $\rho_z^n(\Phi = \pm\pi/2) = \mp\Omega_e$.

Mecanización	ρ_z^n	$\dot{\alpha}$	Rot. inercial vertical $\omega_{in,z}^n$	Rot. inercial vertical en los polos
Apuntamiento al Norte	$\dot{\lambda}\sin\Phi$	$\dot{\alpha} = \alpha = 0$	$(\Omega_e + \dot{\lambda})\sin\Phi$	$\Omega_e + \dot{\lambda} \rightarrow \infty$ $V_E \neq 0$
Azimut Libre	=0	$\dot{\alpha} = -\dot{\lambda}\sin\Phi$	$\Omega_e \sin\Phi$	Ω_e
Foucault	$-\Omega_e \sin\Phi$	$\dot{\alpha} = -(\Omega_e + \dot{\lambda})\sin\Phi$	$= 0$	$= 0$
Unipolar Hemisf. Norte	$\dot{\lambda}(\mathrm{sen}\Phi - 1)$	$\dot{\alpha} = -\dot{\lambda}$	$\dot{\lambda}(\sin\Phi - 1) + \Omega_e \sin\Phi$	$\Omega_e \quad (\Phi = +\pi/2)$
Unipolar Hemisf. Sur	$\dot{\lambda}(\sin\Phi + 1)$	$\dot{\alpha} = \dot{\lambda}$	$\dot{\lambda}(\sin\Phi + 1) + \Omega_e \sin\Phi$	$\Omega_e \quad (\Phi = -\pi/2)$

Tabla: 5.1: Selecciones usuales de ρ_z^n.

La tabla 5.1 resume las características de las selecciones de ρ_z^n más utilizadas en la práctica, mientras que la Fig. 5.5 muestra esquemáticamente la mecanización de las ecuaciones de navegación en coordenadas LGV. El recuadro indicado en la figura como *plataforma analítica* concentra el cálculo de la transformación de coordenadas entre la terna del cuerpo y la terna $\{\boldsymbol{n}\}$. Su nombre ese motivado por los sistemas clásicos de navegación que utilizan como referencia una plataforma estabilizada respecto de esta última terna.

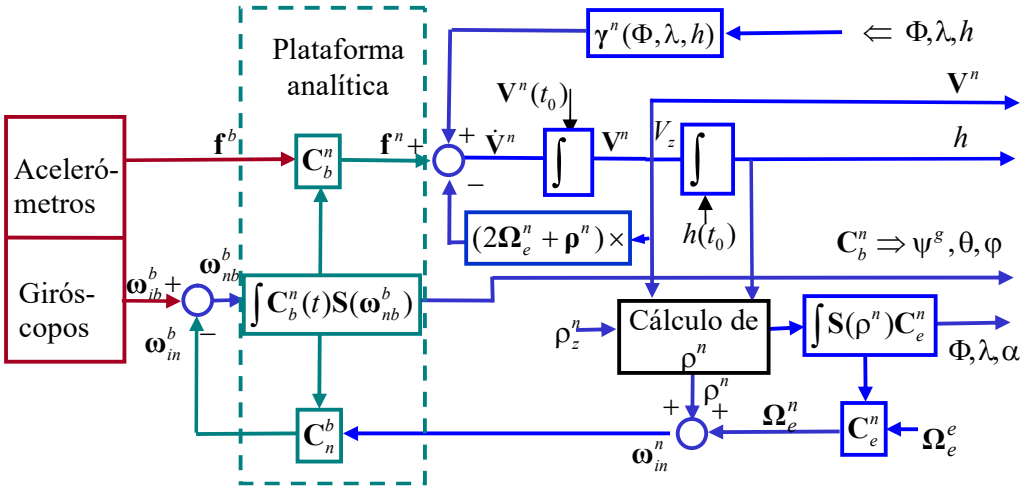


Figura 5.5: Mecanización de las ecuaciones de navegación en coordenadas LGV.

5.4 Dinámica Inestable de las Ecuaciones de Navegación

Las ecuaciones de navegación poseen, como veremos, dinámicas inestables que si no son debidamente tenidas en cuentas se traducen en divergencias numéricas en los sistemas de navegación "strap-down". El sistema de coordenadas más apto para estudiar esta dinámica es el LGV por lo que en lo que sigue adoptamos esta terna de referencia para describirlas. Consideremos la componente z (vertical geodésica local) de la ecuación diferencial (5.25), llamada del "*canal vertical*", con condiciones iniciales respecto del elipsoide normal: $h(t_0)$ y $\dot{h}(t_0) = V_z(t_0)$.

$$\begin{aligned} \dot{V}_z^n &= \ddot{h} = c_z^n(V_x,V_y) + \gamma_z^n(\Phi,h) + f_z^n \\ c_z^n(V_x,V_y) &\triangleq \left[-(\boldsymbol{\rho}^n + 2\boldsymbol{\Omega}_e^n)\times \mathbf{V}^n\right]_z = V_x(\rho_y + 2\Omega_y^n) - V_y(\rho_x + 2\Omega_x^n) \end{aligned} \tag{5.40}$$

junto con la aproximación lineal de la gravedad normal (ver Ec. **(4.45)**):

$$\begin{aligned} \gamma_z^n(\Phi,h) &\cong \gamma(\Phi)\left(1 - 2\left(1 + f + m - 2f\sin^2(\Phi)\right)\frac{h}{a} + 3\left(\frac{h}{a}\right)^2\right) \\ &\cong -\gamma(\Phi)\left[1 - 2A(\Phi)\frac{h}{a}\right] + O(h)^2 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Denotando con ^ los valores correspondientes a las estimaciones de las magnitudes reales, estudiamos ahora los efectos sobre la solución de las (5.40) y (5.41) de un error en las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \delta h^0 &= \delta h(t_0) \triangleq h(t_0) - \hat{h}(t_0) \\ \delta V_z^0 &= \delta \dot{h}(t_0) \triangleq V_z(t_0) - \hat{V}_z(t_0) \end{aligned} \tag{5.42}$$

Como es fácil advertir, la componente c_z^n del término aditivo de Coriolis es independiente de h y V_z. Esto permite, en primera aproximación, aislar la dinámica del canal vertical de la del *canal horizontal* (componentes sobre el plano horizontal local). Suponiendo conocida la componente de la fuerza específica f_z^n, la parte lineal de la propagación en el tiempo de los errores iniciales (5.42) queda descrita por la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$\delta \ddot{h}(t) \triangleq \ddot{h}(t) - \hat{\ddot{h}}(t) = \gamma_z^n(\Phi, h) - \gamma_z^n(\Phi, \hat{h}) \approx 2\omega_s^2 \delta h(t) \tag{5.43}$$

Donde $\omega_s(\Phi) \triangleq \sqrt{\gamma(\Phi) A(\Phi) a^{-1}}$ es la llamada "*frecuencia de Schuller*". La ecuación característica: $\lambda^2 - 2\omega_s^2 = 0$ tiene como raíces en latitudes medias:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}\omega_s(\Phi) \approx \pm 0.0012\sqrt{2}\,\mathrm{sec}^{-1} \tag{5.44}$$

La raíz positiva origina una dinámica inestable resultando en un crecimiento exponencial de $\delta h(t)$ y $\delta V_z(t)$ para cualquier error inicial distinto de cero. A modo de ejemplo, un error inicial: $\delta h(t_0) = 0;\ \delta V_z(t_0) = 1m/s$ producirá al cabo de 15min un error en la posición vertical de 1300m! Este mecanismo es consecuencia de la doble integración realimentada con el modelo de la gravedad (ver las Figs. 5.1, 5.2 y 5.5) y, por tanto, resulta inherente a las ecuaciones de navegación. Claramente, las consecuencias negativas de la inestabilidad vertical serán más acentuadas mientras más prolongada sea la navegación. Para evitar sus efectos se requiere poder actualizar periódicamente el estado de la navegación utilizando alguna medición independiente de las medidas inerciales. La introducción de filtros de fusión de datos que da lugar a la **técnica de navegación integrada** desarrollada en el Capítulo 10 es la manera natural de subsanar este problema. A continuación presentamos una solución *ad hoc* comúnmente utilizada en la aeronavegación.

5.4.1 Filtro Estabilizador del Canal Vertical

En aeronavegación es común usar la medición independiente de la altura provista por un baro-altímetro. Esta medición se caracteriza por ser estable en periodos prolongados aunque adolece de ruido de medida y retardos propios de los fenómenos aerodinámicos involucrados. El filtro estabilizador del canal vertical combina la medición del baro-altímetro con las de la unidad inercial y permite medir en forma estable tanto la altura como la velocidad vertical sin alterar mayormente el ancho de banda de la medición inercial. El resultado es también conocido en la literatura como altímetro "baro-inercial" (Kayton/ Fried, 1997).

Supondremos la medición del baro-altímetro $\widehat{h}$ afectada por un error lo que conduce al modelo:

$$\widehat{h} = h + \varepsilon_h \tag{5.45}$$

Reescribimos la Ec. (5.40) en forma de ecuación de estado:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= V_z & ;\ h(t_0) &= h_0 \\ \dot{V}_z &= c_z^n(V_x, V_y) + \gamma_z^n(\Phi, h) + f_z^n & ;\ V_z(t_0) &= V_z^o \end{aligned} \tag{5.46}$$

Si bien las causas de las divergencias del modelo (5.46) respecto de la realidad pueden ser muy variadas, para demostrar los efectos del filtro estabilizador sobre la inestabilidad del canal vertical bastará suponer solamente desconocimiento en la posición y la velocidad iniciales y un error de medición en la fuerza específica. Para ilustrar el concepto se supondrá además que el canal horizontal provee sin errores los valores de V_x y V_y. Denotando con ζ_1 y ζ_2, respectivamente, a la altura y la velocidad vertical provista por la mecanización numérica del modelo (5.46) perturbado por los errores de medida y afectado por señales de compensación u_1 y u_2, dicha mecanización es describe mediante:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 + u_1 & ;\ \zeta_1(t_0) &= \hat{h}(t_0) \\ \dot{\zeta}_2 &= c_z^n(V_x, V_y) + \gamma_z^n(\Phi, \zeta_1) + \widehat{f}_z^n + u_2 & ;\ \zeta_2(t_0) &= \hat{V}_z(t_0) \end{aligned} \tag{5.47}$$

Donde $\widehat{f}_z^n \triangleq f_z^n + b_z^n$ es la medida acelerométrica de la fuerza específica afectada por un sesgo desconocido b_z^n posiblemente "lentamente" variable. Definimos además: $\zeta_3 \triangleq \hat{b}_z^n$ a la estimación disponible de b_z^n y agregamos a las Ecs. (5.47) la ecuación:

$$\dot{\zeta}_3 = u_3 \tag{5.48}$$

A continuación imponemos la ley que genera las señales de compensación con k_1, k_2 y k_3 a determinar:

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_1(\zeta_1 - \widehat{h}) \\ u_2 &= -k_2(\zeta_1 - \widehat{h}) - \zeta_3 \\ u_3 &= -k_3(\zeta_1 - \widehat{h}) \end{aligned} \tag{5.49}$$

Las (5.47) realimentadas con las (5.48)/(5.49) conforman el *filtro de estabilización del canal vertical* representado en el diagrama de la Fig. 5.6. Para analizar su comportamiento definimos el vector error de estimación:

$$\mathbf{e} \triangleq \begin{bmatrix} \zeta_1 - h \\ \zeta_2 - V_z \\ \zeta_3 - b_z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta h \\ \delta V_z \\ \delta b_z^n \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

Restando las (5.47) de la (5.46) luego de introducir la ley de realimentación (5.48)-(5.49) y teniendo en cuenta la (5.45), se obtienen las ecuaciones de estado que satisfacen las componentes del error definido en la (5.50):

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 - k_1(\zeta_1 - \hat{h}) = e_2 - k_1(e_1 - \varepsilon_h) \\
\dot{e}_2 &= \gamma_z^n(\Phi,\zeta_1) - \gamma_z^n(\Phi,h) - k_2(\zeta_1 - \hat{h}) - e_3 \cong 2\omega_s^2 e_1 - k_2(e_1 - \varepsilon_h) - e_3 \\
\dot{e}_3 &= \dot{\zeta}_3 = -k_3(\zeta_1 - \hat{h}) = -k_3(e_1 - \varepsilon_h)
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Las cuales son rescritas matricialmente como

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 + 2\omega_s^2 & 0 & -1 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \varepsilon_h; \quad \mathbf{e}(t_0) = \begin{bmatrix} \delta h(t_0) \\ \delta V_z(t_0) \\ \delta b_z^n \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

con condiciones iniciales $\mathbf{e}(t_0)$ desconocidas. Como es sabido (véase por ejemplo Kuo, 1995), el sistema (5.52) es exponencialmente estable para valores k_1, k_2, k_3 tales que las raíces del polinomio característico de la matriz de la dinámica tienen parte real negativa

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 k_1 + \lambda(k_2 - 2\omega_s{}^2) - k_3 = 0 \tag{5.53}$$

Esta condición asegura que $\dot{\mathbf{e}}(t)$ tiende exponencialmente a cero, con lo cual, en estado estacionario, ($\dot{\mathbf{e}}(t) = 0$ en (5.52)) si $\varepsilon_h < \infty \Rightarrow \|\mathbf{e}(t)\| < \infty, \forall t \geq t_0$ lo que garantiza errores acotados en altura para cualquier error inicial aun con sesgos acelerométricos. En particular, si $\varepsilon_h = 0 \Rightarrow \|\mathbf{e}(t)\| \to 0,\ t \to \infty$. Del mismo análisis en estado estacionario se advierte que para ε_h lentamente variable, independientemente del valor desconocido del sesgo b_z^n, resulta $\delta h \to \varepsilon_h$ (el error en altura esta acotado por el error del baroaltímetro) y el error en la velocidad vertical es tal que $e_2 = \delta V_z \to 0$. Más aún, el filtro provee una estimación asintótica del sesgo: $\hat{b}_z^n(\infty)$ con error de estimación independiente de los valores de k_i dado por (ver (5.44)):

$$e_3(\infty) = \delta b_z^n(\infty) = 2\omega_s^2 \varepsilon_h \leq 3x10^{-6} \varepsilon_h \left[\frac{m}{seg^2} \right] \tag{5.54}$$

Debe contrastarse este resultado con los errores linealmente creciente en velocidad y cuadráticamente creciente en altura que producen los sesgos en los acelerómetros al integrar las ecuaciones de navegación.

A continuación ilustramos un diseño posible del filtro estabilizador. Para una dada constante de tiempo $T>0$ elegimos las raíces del polinomio (5.53) tales que

$$\lambda_1 = -1/T,\ \lambda_{2,3} = -1/T \pm j\, 1/T \tag{5.55}$$

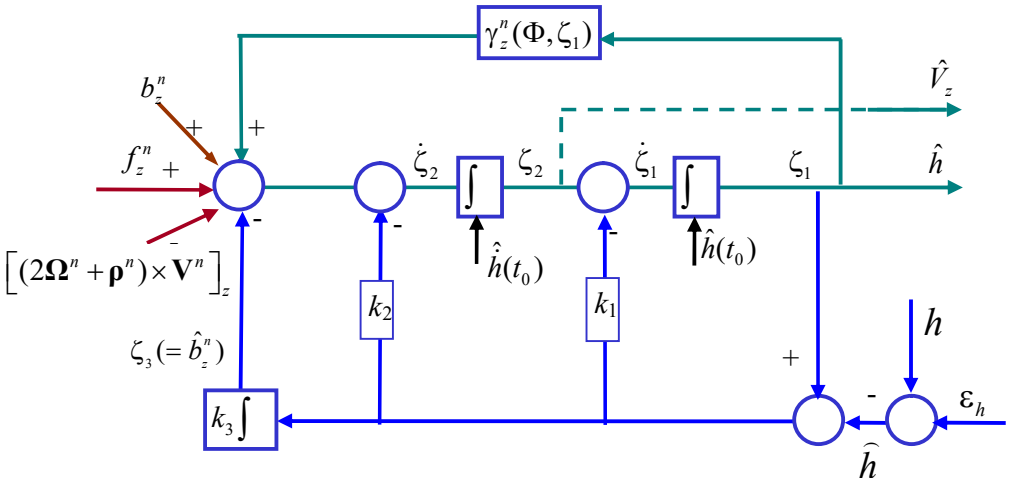


Figura 5.6: Mecanización del filtro estabilizador vertical.

Lo cual corresponde a un coeficiente de amortiguamiento de los polos complejos de $\xi = \cos(45^0) = 0.707$. De las condiciones anteriores y del polinomio (5.53) surgen los siguientes valores de k_i:

$$k_1 = 3/T; \quad k_2 = 4/T^2 + 2\omega_s{}^2; \quad k_3 = 2/T^3 \tag{5.56}$$

Para el diseño debe tenerse en cuenta que si se desea seguir cambios rápidos de altura se deberá aumentar el ancho de banda lo que redundará en un empeoramiento de los efectos del ruido en la medición barométrica. Por otra parte, una dinámica lenta atenuará los efectos del ruido de medida pero acentuará los efectos de los errores de los acelerómetros y de las condiciones iniciales. Cuando las estadísticas del ruido ε_h y del error en los acelerómetros son conocidas es posible estimar óptimamente tanto las variables ζ_1 y ζ_2 cuanto el sesgo acelerométrico ζ_3 y el error del baro-altímetro mediante el Filtro de Kalman. Esto será objeto de Capítulo 10.

Para el diseño determinista las constantes de tiempo usuales van entre 40seg a 400seg. Adoptando un valor de T=100seg, las constantes resultan:

$$k_1 = 3.0x10^{-2}\text{seg}^{-1};\ k_2 = 4.0x10^{-4}\text{seg}^{-2} \quad k_3 = 2.0x10^{-6}\text{seg}^{-3} \tag{5.57}$$

Como se advierte, el filtro goza de múltiples ventajas: a) hereda la estabilidad propia del baró-altímetro, b) tiene una respuesta en frecuencia mucho más alta que éste y definible por diseño, c) permite medir la velocidad vertical y d) goza de cierta insensibilidad en baja frecuencia a los errores acelerométricos y del modelo de gravedad.

Capítulo 6
Modelos y Dinámicas de los Errores de Navegación

Los parámetros de navegación de un vehículo evolucionan según las soluciones de las ecuaciones cinemáticas a partir de las condiciones iniciales reales y en función de las magnitudes, también reales, de la fuerza específica y de la velocidad angular inercial. Aunque pueda decirse que las ecuaciones cinemáticas sean las más exactas que se conocen, el estado real $\mathbf{x}$ y el calculado $\hat{\mathbf{x}}$ difieren por 3 razones:

a) Errores entre las magnitudes inerciales calculadas con el modelo y los valores reales $\boldsymbol{\mu}(t)$ que impulsan al vehículo debido al ruido y a errores paramétricos.
b) Diferencias entre la condición inicial real $\mathbf{x}(t_0)$ y su estimación $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$,
c) Errores en el modelo de gravedad.

Como consecuencia de lo anterior, también se apartan de sus valores reales las salidas modeladas que denotamos en general con $\mathbf{y}(t)$. Los aspectos generales del problema pueden describirse mediante el esquema de la Fig. 6.1.

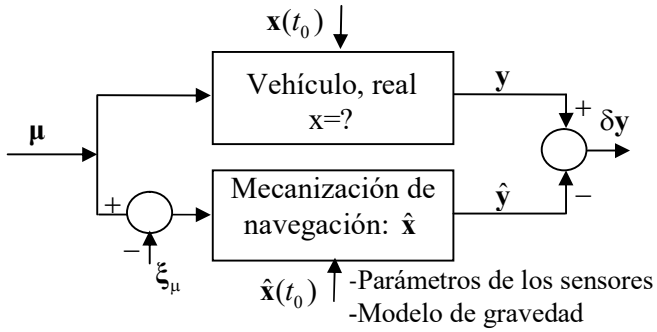


Figura 6.1: Comportamiento diferencial entre el vehículo real y la mecanización de navegación.

En este Capítulo se describe la dinámica de los errores en los parámetros de navegación y en otras variables calculadas por un sistema de navegación inercial de tipo "*strapdown*" para las diferentes mecanizaciones estudiadas en el Capítulo 5. El interés de un tal modelo diferencial es múltiple. Por un lado permite evaluar la sensibilidad del error del estado cinemático respecto de las distintas fuentes de incertidumbre presentes, lo que hace posible determinar, *a priori*, el "presupuesto" de errores del sistema de navegación en función de la calidad de la instrumentación, de la precisión del modelo de gravedad y de la incerteza de las condiciones iniciales. Por otro lado, el modelo de la sensibilidad será usado para propagar la matriz de covariancia del estado cinemático requerido por los algoritmos de navegación integrada basados en el Filtro de Kalman Extendido, objeto del Capítulo 10. Como aplicación práctica de esta herramienta

presentamos en este Capítulo un análisis del comportamiento de la función girocompás de un sistema de navegación usado para alinear un vehículo en reposo.

6.1 Dinámica de las pequeñas perturbaciones

El método que usaremos para describir la dinámica de los errores del algoritmo inercial es el llamado de las *pequeñas perturbaciones.* Para una dada variable $\mathbf{v}$ de valor posiblemente desconocido y dada su estimación $\hat{\mathbf{v}}$, definimos la desviación de la primera respecto de su valor estimado como:

$$\delta\mathbf{v} \triangleq \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \tag{6.1}$$

Consideramos la siguiente ecuación del estado $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ con función forzante $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m$, vector de salidas $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^s$ y condición inicial $\mathbf{x}^0$ en $t=t_o$.:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Denotamos con $\hat{\mathbf{x}}(t)$, $\hat{\mathbf{y}}(t)$; $t \geq t_0$ a la solución del sistema (6.2) cuando las condiciones iniciales y la función forzante se reemplazan por valores estimados o medidos.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{u}}); \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}^0 \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{u}}) \end{aligned} \tag{6.3}$$

En un sistema de navegación inercial, las ecuaciones (6.2) o (6.3) son las ecuaciones cinemáticas. Las soluciones de la primera representan, en teoría, la evolución real del estado cinemático mientras que las de la segunda corresponden a la evolución de la solución calculada en base a valores estimados, ya sea de las magnitudes inerciales o de las condiciones iniciales.

Suponiendo continuidad en la derivada primera de las funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{h}$ respecto de sus argumentos, después de sustraer (6.3) de (6.2) y junto con la definición (6.1) se tiene:

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{u}}); \quad \delta\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 - \hat{\mathbf{x}}^0 \\ &= \mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{u}})\delta\mathbf{x} + \mathbf{f}_u(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{u}})\delta\mathbf{u} + o(\|\delta\mathbf{x}\|,\|\delta\mathbf{u}\|) \\ \delta\mathbf{y} &= \mathbf{h}_x(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{u}})\delta\mathbf{x} + \mathbf{h}_u(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{u}})\delta\mathbf{u} + o(\|\delta\mathbf{x}\|,\|\delta\mathbf{u}\|) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Donde $\mathbf{g}_v$ es la matriz jacobiana de una función vectorial $\mathbf{g}$ respecto de su argumento y $o(\|\delta\mathbf{x}\|,\|\delta\mathbf{u}\|)$ es tal que:

$$\lim_{\substack{\|\delta x\|\to 0 \\ \|\delta u\|\to 0}} \frac{o(\|\delta\mathbf{x}\|,\|\delta\mathbf{u}\|)}{(\|\delta\mathbf{x}\|^2 + \|\delta\mathbf{u}\|^2)^{1/2}} \to 0$$

El método de las pequeñas perturbaciones consiste en despreciar los términos no lineales en la Ec. (6.4) y describir la evolución temporal de las desviaciones mediante las ecuaciones de perturbación lineales:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}}(t),\hat{\mathbf{u}}(t))\delta\mathbf{x} + \mathbf{f}_u(\hat{\mathbf{x}}(t),\hat{\mathbf{u}}(t))\delta\mathbf{u}\ ; \quad \delta\mathbf{x}(t_0) = \delta\mathbf{x}^0 \\ \delta\mathbf{y} &= \mathbf{h}_x(\hat{\mathbf{x}}(t),\hat{\mathbf{u}}(t))\delta\mathbf{x} + \mathbf{h}_u(\hat{\mathbf{x}}(t),\hat{\mathbf{u}}(t))\delta\mathbf{u}\end{aligned} \tag{6.5}$$

Las soluciones de las ecuaciones lineales variantes con el tiempo (6.5), llamadas funciones de sensibilidad en un contexto más general, describen la evolución temporal de la parte lineal del error de la solución de (6.3). Las funciones forzantes de estas ecuaciones son los errores de estimación o de medida de las funciones forzantes reales desconocidas y sus condiciones iniciales el error en la estimación del estado inicial.

Por el principio de superposición (válido para sistemas lineales) es posible calcular, a partir de estas ecuaciones, los efectos individuales de las perturbaciones ya sea, sobre las condiciones iniciales o sobre las funciones forzantes. Esto permite establecer el *presupuesto de errores* que consiste en distribuir el error total según cada una de sus causas. Volvemos ahora a las ecuaciones cinemáticas formuladas en Capítulo 5.

6.2 Dinámica del error en la MCD

Como se mostró en el Capítulo anterior, las ecuaciones de navegación requieren proyectar la fuerza específica, medida en la terna del cuerpo $\{\boldsymbol{b}\}$, sobre la terna de navegación elegida que denotamos genéricamente como $\{\boldsymbol{\nu}\}$. Cuando $\{\boldsymbol{b}\}$ rota respecto de $\{\boldsymbol{\nu}\}$ a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{\nu b}$ (como se muestra en la Fig. 6.2), dicha proyección se calcula mediante la MCD $\mathbf{C}_b^{\nu}$, solución de la ecuación cinemática (ver Párrafo 3.3.2 del Capítulo 3):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{C}}_b^{\nu} &= \mathbf{C}_b^{\nu}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\nu b}^b) = \mathbf{C}_b^{\nu}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{C}_b^{\nu}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i\nu}^b) \\ &= \mathbf{C}_b^{\nu}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i\nu}^{\nu})\mathbf{C}_b^{\nu} \quad ; \mathbf{C}_b^{\nu}(t_0) = \mathbf{C}_{b,0}^{\nu}\end{aligned} \tag{6.6}$$

En la cual se usó la relación: $\boldsymbol{\omega}_{\nu b}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{i\nu}^b$.

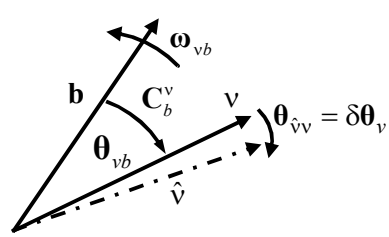


Figura 6.2: Dinámica del error de la MCD.

Si en un dado instante t_0, la terna "de llegada" $\{\nu\}$ de la transformación de coordenadas $\mathbf{C}_b^{\nu}$ difiriese de la terna estimada $\{\hat{\nu}\}$ en un ángulo suficientemente pequeño $\delta\boldsymbol{\theta}_{\nu_0}$ (en el sentido positivo indicado en la figura), a partir de t_0, la derivada temporal de la diferencial de la MCD $\delta\mathbf{C}_b^{\nu} \approx \mathbf{C}_b^{\nu} - \mathbf{C}_b^{\hat{\nu}}$, para $|\delta\boldsymbol{\theta}_{\nu}| \ll 1$, definida al final del párrafo 3.6, resulta de perturbar diferencialmente la Ec. (6.6):

$$\delta\dot{\mathbf{C}}_b^{\mathrm{v}} = \delta\mathbf{C}_b^{\mathrm{v}}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) + \mathbf{C}_b^{\mathrm{v}}\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i\mathrm{v}}^{\mathrm{v}})\delta\mathbf{C}_b^{\mathrm{v}} - \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{i\mathrm{v}}^{\mathrm{v}})\mathbf{C}_b^{\mathrm{v}}; \quad \delta\mathbf{C}_b^{\mathrm{v}}(t_0) = \delta\mathbf{C}_{b,0}^{\mathrm{v}} \tag{6.7}$$

De acuerdo con la Ec. **(3.47)** del Capítulo 3, la diferencial $\delta\boldsymbol{\theta}_{vb}$ (que para simplificar denotamos $\delta\boldsymbol{\theta}_v$) del ángulo $\boldsymbol{\theta}_{vb}$ entre las ternas $\{b\}$ y $\{\mathrm{v}\}$ se corresponde con la diferencial de la MCD: $\delta\mathbf{C}_b^v = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_v^v)\mathbf{C}_b^v$. Sustituyendo en la anterior:

$$\delta\dot{\mathbf{C}}_b^{\mathrm{v}} = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_v^v)\mathbf{C}_b^{\mathrm{v}}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i\mathrm{v}}^{\mathrm{v}})\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_v^v)\mathbf{C}_b^{\mathrm{v}} + \mathbf{C}_b^{\mathrm{v}}\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{i\mathrm{v}}^{\mathrm{v}})\mathbf{C}_b^{\mathrm{v}} \tag{6.8}$$

con condición inicial: $\delta\mathbf{C}_{b,0}^v = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_{v_0}^v)\mathbf{C}_{b,0}^v$. Por su parte, derivando $\delta\mathbf{C}_b^v = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_v^v)\mathbf{C}_b^v$ respecto del tiempo resulta:

$$\delta\dot{\mathbf{C}}_b^v = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_v^v)\dot{\mathbf{C}}_b^v + \mathbf{S}(\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_v^v)\mathbf{C}_b^v = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_v^v)\mathbf{C}_b^{\mathrm{v}}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_v^v)\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i\mathrm{v}}^{\mathrm{v}})\mathbf{C}_b^{\mathrm{v}} + \mathbf{S}(\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_v^v)\mathbf{C}_b^v \tag{6.9}$$

Igualando ambas expresiones y luego de pre-multiplicar por $\mathbf{C}_v^b$ se obtiene:

$$\mathbf{S}(\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{v}}^v) = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{v}}^v)\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i\mathrm{v}}^{\mathrm{v}})\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{v}}^v) + \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{\mathrm{v}}) - \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{i\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}) \tag{6.10}$$

Luego de usar la identidad (3.5) del Capítulo 3, despejamos $\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{v}}^v$ para obtener la ecuación para la diferencial angular

$$\Rightarrow \delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{v}}^v = \delta\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{v}}^v \times \boldsymbol{\omega}_{i\mathrm{v}}^{\mathrm{v}} + \mathbf{C}_b^v\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \delta\boldsymbol{\omega}_{i\mathrm{v}}^{\mathrm{v}} \tag{6.11}$$

Un procedimiento similar, pero partiendo de la diferencial $\delta\mathbf{C}_b^v = \mathbf{C}_b^v\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{v}}^b)$, correspondiente a la primera de las Ecs. **(3.47)**, conduce a la ecuación alternativa de la anterior:

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{v}}^b = \delta\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{v}}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_{\mathrm{v}}^b\delta\boldsymbol{\omega}_{iv}^v \tag{6.12}$$

que, como el lector podrá verificar, pudo obtenerse directamente transformado la Ec. (6.11) mediante el cambio de coordenadas: $\mathbf{C}_{\mathrm{v}}^b\delta\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{v}}^v = \delta\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{v}}^b$ (Ec.**(3.44)**).

Notar que se supuso al error angular concentrado en la terna de llegada. Esta convención, que se adopta en lo que sigue mientras no se advierta lo contrario, es justificada por el hecho de que, como se vio al final del Párrafo 3.6 del Capítulo 3, es imposible distinguir la contribución al error angular total de las desviaciones angulares en las ternas de partida o de llegada.

Los casos más usuales de propagación del error angular considerados a continuación resultan casos particulares de las Ecs. (6.11) y (6.12).

6.3 Dinámica del error de navegación en coordenadas ECI

Aplicando el método de las pequeñas perturbaciones a la Ec. **(5.3)** se obtienen las ecuaciones del error de traslación:

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{P}}^i &= \delta\mathbf{V}^i & ;\ \ \delta\mathbf{P}^i(0) &= \delta\mathbf{P}_0^i \\ \delta\dot{\mathbf{V}}^i &= \delta\mathbf{g}_g^i(\mathbf{P}^i) + \delta\mathbf{C}_b^i\mathbf{f}^b + \mathbf{C}_b^i\delta\mathbf{f}^b & ;\ \ \delta\mathbf{V}^i(0) &= \delta\mathbf{V}_0^i \end{aligned} \tag{6.13}$$

Para este caso $\{\boldsymbol{\nu}\}\equiv\{\boldsymbol{\iota}\}$, por lo que $\boldsymbol{\omega}_{i\nu}^{\nu} = \delta\boldsymbol{\omega}_{i\nu}^{\nu} = 0$. Denotando la diferencial $\delta\boldsymbol{\theta}_{ib} = \boldsymbol{\psi}$, de las (6.11) y (6.12) se obtienen las expresiones alternativas para la ecuación de propagación del error angular inercial:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{C}_b^i &= \mathbf{C}_b^i\mathbf{S}(\boldsymbol{\psi}^b) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\psi}}^b = \boldsymbol{\psi}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b & ;\ \ \boldsymbol{\psi}^b(t_0) &= \boldsymbol{\psi}_0^b \\ \delta\mathbf{C}_b^i &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\psi}^i)\mathbf{C}_b^i \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\psi}}^i = \mathbf{C}_b^i\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b & ;\ \ \boldsymbol{\psi}^i(t_0) &= \boldsymbol{\psi}_0^i \end{aligned} \tag{6.14}$$

Las funciones forzantes de las ecuaciones dinámicas del error ((6.13) y (6.14)) son los errores en las mediciones inerciales: $\delta\mathbf{f}^b, \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ agrupados en el vector $\delta\boldsymbol{\mu}$ y cuya expresión en función de los errores paramétricos $\delta\mathbf{p}_i = \left[\delta\boldsymbol{\sigma}^T \ \ \delta\mathbf{b}^T\right]^T$ y del ruido $\boldsymbol{\xi}_\mu = \left[\boldsymbol{\xi}_\omega^T, \boldsymbol{\xi}_f^T\right]^T$ se obtiene perturbando la Ec. **(2.13)**:

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\mu} &\triangleq \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\ \delta\mathbf{f}^b \end{bmatrix} = \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\mu}})\delta\boldsymbol{\sigma} + \delta\mathbf{b} + \boldsymbol{\xi}_\mu = \mathbf{B}_{p_i}(\hat{\boldsymbol{\mu}})\delta\mathbf{p}_i + \boldsymbol{\xi}_\mu \\ \mathbf{B}_{p_i}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} L(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) & 0 & I & 0 \\ \hline 0 & L(\hat{\mathbf{f}}^b) & 0 & I \end{array}\right] \end{aligned} \tag{6.15}$$

Definimos las dos formas alternativas de los errores de navegación en $\mathbb{R}^9$:

$$\delta\mathbf{x}_b^i \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^b \\ \hline \delta\mathbf{V}^i \\ \hline \delta\mathbf{P}^i \end{bmatrix};\ \delta\mathbf{x}_i^i \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^i \\ \hline \delta\mathbf{V}^i \\ \hline \delta\mathbf{P}^i \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

Combinando las expresiones (6.13) y (6.14), las ecuaciones de estado lineal variante en el tiempo que modelan la propagación de las dos versiones del error de navegación (6.16) resultan:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}_b^i = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) & 0 & 0 \\ -\hat{\mathbf{C}}_b^i\mathbf{S}(\mathbf{f}^b) & 0 & \partial\mathbf{g}_g^i / \partial\mathbf{P}^i\big|_{\mathbf{P}^i} \\ 0 & \mathbf{I}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^b \\ \hline \delta\mathbf{V}^i \\ \hline \delta\mathbf{P}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\delta\boldsymbol{\mu} = \mathbf{F}_b^i\delta\mathbf{x}_b^i + \mathbf{B}_b^i\delta\boldsymbol{\mu} \tag{6.17}$$

$$\delta\dot{\mathbf{x}}_i^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{S}(\hat{\mathbf{C}}_b^i\mathbf{f}^b) & 0 & \partial\mathbf{g}_g^i / \partial\mathbf{P}^i\big|_{\mathbf{P}^i} \\ 0 & \mathbf{I}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^i \\ \hline \delta\mathbf{V}^i \\ \hline \delta\mathbf{P}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{b}}^i\delta\boldsymbol{\mu} = \mathbf{F}_i^i\delta\mathbf{x}_i^i + \mathbf{B}_i^i\delta\boldsymbol{\mu} \tag{6.18}$$

Donde, $\partial \mathbf{g}_g^i / \partial \mathbf{P}^i \big|_{\mathbf{P}^i}$ es el jacobiano de la gravitación en coordenadas inerciales evaluado en $\hat{\mathbf{P}}^i$ cuya expresión depende del modelo de gravedad utilizado. Para una discusión sobre opciones y expresiones de la gravedad se remite al lector al Párrafo 5.1 del Capítulo anterior, Ecs.**(5.8)** a **(5.10)**.

6.4 Dinámica del error de navegación en coordenadas ECEF

En este caso $\{\boldsymbol{v}\} \equiv \{\boldsymbol{e}\}$ y $\boldsymbol{\omega}_{iv}^v = \boldsymbol{\Omega}_e^e$. Aplicando pequeñas perturbaciones a las ecuaciones de navegación **(5.17)**, suponiendo $\boldsymbol{\Omega}_e^e$ conocida (e.d.: $\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^e = 0$) y el modelo de gravedad normal, las ecuaciones del error de traslación resultan:

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{P}}^e &= \delta\mathbf{V}^e & ;\delta\mathbf{P}^e(0) &= \delta\mathbf{P}_0^e \\ \delta\dot{\mathbf{V}}^e &= \delta\mathbf{C}_b^e\mathbf{f}^b + \mathbf{C}_b^e\delta\mathbf{f}^b - 2(\boldsymbol{\Omega}_e^e \times \delta\mathbf{V}^e) + \delta\boldsymbol{\gamma}^e(\mathbf{P}^e) & ;\delta\mathbf{V}^e(0) &= \delta\mathbf{V}_0^e \end{aligned} \tag{6.19}$$

De las Ecs. (6.11) y (6.12) surgen las dos expresiones alternativas para las ecuaciones de propagación del error angular que denotamos $\delta\boldsymbol{\theta}_{eb} = \boldsymbol{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{C}_b^e &= \mathbf{C}_b^e\mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^b) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varphi}}^b = \boldsymbol{\varphi}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b & ;\ \boldsymbol{\varphi}^b(t_0) &= \boldsymbol{\varphi}_0^b \\ \delta\mathbf{C}_b^e &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e)\mathbf{C}_b^e \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varphi}}^e = \boldsymbol{\varphi}^e \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^e + \mathbf{C}_b^e\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b & ;\ \boldsymbol{\varphi}^i(t_0) &= \boldsymbol{\varphi}_0^i \end{aligned} \tag{6.20}$$

Adviértase la coincidencia de la ecuaciones dinámicas de $\boldsymbol{\varphi}^b$ y $\boldsymbol{\psi}^b$. En este caso, las dos versiones alternativas de los errores de navegación en $\mathbb{R}^9$ son:

$$\delta\mathbf{x}_b^e \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^b \\ \hline \delta\mathbf{V}^e \\ \hline \delta\mathbf{P}^e \end{bmatrix};\ \delta\mathbf{x}_e^e \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^e \\ \hline \delta\mathbf{V}^e \\ \hline \delta\mathbf{P}^e \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

Combinando las ecuaciones (6.19) y (6.20) se obtienen las siguientes ecuaciones de propagación de los errores de navegación en coordenadas ECEF:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}_b^e = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) & 0 & 0 \\ -\hat{\mathbf{C}}_b^e\mathbf{S}(\mathbf{f}^b) & -2S(\boldsymbol{\Omega}_e^e) & \boldsymbol{\gamma}_P^e\big|_{P^e} \\ 0 & \mathbf{I}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^b \\ \hline \delta\mathbf{V}^e \\ \hline \delta\mathbf{P}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{C}}_\mathbf{b}^\mathbf{e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{\mu} = \mathbf{F}_b^e\delta\mathbf{x}_b^e + \mathbf{B}_b^e\delta\boldsymbol{\mu} \tag{6.22}$$

$$\delta\dot{\mathbf{x}}_e^e = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_e^e) & 0 & 0 \\ -\mathbf{S}(\hat{\mathbf{C}}_\mathbf{b}^\mathbf{e}\mathbf{f}^b) & -2\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_e^e) & \boldsymbol{\gamma}_P^e\big|_{P^e} \\ 0 & \mathbf{I}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^e \\ \hline \delta\mathbf{V}^e \\ \hline \delta\mathbf{P}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_\mathbf{b}^\mathbf{e} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{C}}_\mathbf{b}^\mathbf{e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{\mu} = \mathbf{F}_e^e\delta\mathbf{x}_e^e + \mathbf{B}_e^e\delta\boldsymbol{\mu} \tag{6.23}$$

Donde $\boldsymbol{\gamma}_P^e\big|_{P^e}$ es el jacobiano respecto de la posición de la expresión de la gravedad normal en terna $\{\mathbf{e}\}$.

6.5 Dinámica del error de navegación en coordenadas LGV

Siguiendo el procedimiento ilustrado en los casos anteriores, se perturban las ecuaciones de navegación en coordenadas LGV **(5.33)** del Capítulo 5. Teniendo en cuenta que $\mathbf{\Omega}_e^e$ es conocida se usa $\delta\mathbf{\Omega}_e^n = \delta\mathbf{C}_e^n\mathbf{\Omega}_e^e$ para obtener:

$$
\begin{aligned}
&\delta\dot{\mathbf{V}}^n = \delta\mathbf{C}_b^n\mathbf{f}^b + \mathbf{C}_b^n\delta\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{g}^n - (2\delta\mathbf{C}_e^n\mathbf{\Omega}_e^e + \delta\boldsymbol{\rho}^n)\times\ \mathbf{V}^n - (2\mathbf{C}_e^n\mathbf{\Omega}^e + \boldsymbol{\rho}^n)\times\delta\mathbf{V}^n \\
&\delta\dot{h} = \delta V_z^n \\
&\delta\dot{\mathbf{C}}_b^n = \delta\mathbf{C}_b^n\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) + \mathbf{C}_b^n\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{in}^n)\delta\mathbf{C}_b^n - \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n)\mathbf{C}_b^n \\
&\delta\dot{\mathbf{C}}_e^n = -\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\rho}^n)\mathbf{C}_e^n - \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}^n)\delta\mathbf{C}_e^n \\
&\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \boldsymbol{\rho}^n + \mathbf{\Omega}_e^n \Rightarrow \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \delta\boldsymbol{\rho}^n + \delta\mathbf{\Omega}_e^n = \delta\boldsymbol{\rho}^n + \delta\mathbf{C}_e^n\mathbf{\Omega}_e^e
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

Las (6.24) requieren las diferenciales $\delta\mathbf{C}_b^n$ y $\delta\mathbf{C}_e^n$ cada una asociada a un error angular propio aunque para ambas la terna de llegada es $\{\boldsymbol{v}\}\equiv\{\boldsymbol{n}\}$. En el primer caso, el error angular es el *error de orientación* del vehículo respecto de la terna de navegación. En el segundo se trata del error angular de la terna de navegación respecto de la terna terrestre (ECEF) llamado *error angular de posición* dado que, como se vio en el Párrafo 5.3, $\{\boldsymbol{n}\}$ está determinada por la posición del vehículo sobre la Tierra.

6.5.1 Error angular de posición en terna LGV.

La notación usual para el error angular de posición es $\delta\boldsymbol{\theta}\ (=\delta\boldsymbol{\theta}_{ne})$ de donde la diferencial de la MCD resulta: $\delta\mathbf{C}_e^n \triangleq \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n)\mathbf{C}_e^n$. Derivando esta expresión respecto del tiempo se obtiene:

$$\delta\dot{\mathbf{C}}_e^n = \mathbf{S}(\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}^n)\mathbf{C}_e^n + \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n)\dot{\mathbf{C}}_e^n = \mathbf{S}(\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}^n)\mathbf{C}_e^n - \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n)\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}^n)\mathbf{C}_e^n \tag{6.25}$$

Por otro lado, a partir de las Ecs. (6.24), escribimos:

$$\delta\dot{\mathbf{C}}_e^n = -\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\rho}^n)\mathbf{C}_e^n - \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}^n)\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n)\mathbf{C}_e^n \tag{6.26}$$

Igualando las Ecs. (6.25) y (6.26), post-multiplicando por $\mathbf{C}_e^n$ luego de agrupar términos se obtiene:

$$\mathbf{S}(\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}^n) = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n)\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}^n) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}^n)\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n) - \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\rho}^n) \tag{6.27}$$

Usando la identidad (3.5) del Capítulo 3 se obtiene la ecuación de propagación del error angular de posición:

$$\delta\mathbf{C}_e^n = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n)\mathbf{C}_e^n \Rightarrow \delta\dot{\boldsymbol{\theta}}^n = \delta\boldsymbol{\theta}^n\times\boldsymbol{\rho}^n - \delta\boldsymbol{\rho}^n \tag{6.28}$$

El lector podrá verificar que la definición alternativa: $\delta\mathbf{C}_e^n \triangleq \mathbf{C}_e^n\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^e)$ conduce a la ecuación del error angular de posición en terna $\{\mathbf{e}\}$:

$$\delta \mathbf{C}_e^n = \mathbf{C}_e^n \mathbf{S}(\delta \boldsymbol{\theta}^e) \Rightarrow \delta \dot{\boldsymbol{\theta}}^e = -\mathbf{C}_n^e \delta \boldsymbol{\rho}^n \tag{6.29}$$

que puede obtenerse de la (6.27) transformando $\delta \boldsymbol{\theta}^e = \mathbf{C}_n^e \delta \boldsymbol{\theta}^n$.

Geometría del error angular de posición.
Consideraremos, por un momento, las coordenadas curvilíneas de latitud y longitud de la posición del vehículo sin contemplar su altura geodésica *h*. De este modo, será suficiente considerar la proyección de la posición del vehículo sobre el elipsoide normal.

En la Fig. 6.3 se indican: la posición real (desconocida) **P** que ocupa el vehículo en un dado instante, la posición $\hat{\mathbf{P}}$ estimada (calculada) por el sistema de navegación y las ternas de navegación real y calculadas $\{\boldsymbol{n}\}$ y $\{\hat{\boldsymbol{n}}\}$. El error de la posición se expresa mediante los ángulos $\delta\lambda$ y $\delta\Phi$ cuyas representaciones vectoriales, también exhibidos en la figura, apuntan, respectivamente, en la dirección positiva del eje terrestre y en la dirección –E (O) local. La figura muestra también el error en el ángulo de deriva $\delta\alpha$ entre ambas ternas que dependerá de la mecanización elegida (ver Tabla 5.1). Suponemos $\{\boldsymbol{n}\}$ y $\{\hat{\boldsymbol{n}}\}$ distantes de un pequeño ángulo vectorial $\delta \boldsymbol{\theta}^n = \boldsymbol{\theta}_{\hat{n},n}$.

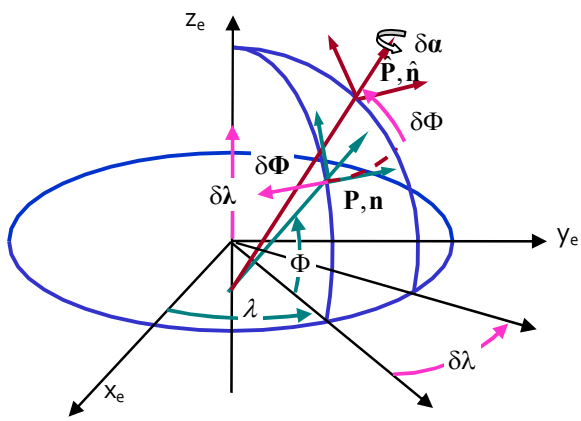


Figura 6.3

De la geometría de la Fig. 6.3 resulta la siguiente relación entre $(\delta\lambda, \delta\Phi, \delta\alpha)$ y las coordenadas {g-ENU} de $\delta \boldsymbol{\theta}^g$:

$$\delta \boldsymbol{\theta}^g = \begin{bmatrix} \delta\theta_E \\ \delta\theta_N \\ \delta\theta_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta\Phi \\ \delta\lambda \cos\Phi \\ \delta\lambda \sin\Phi + \delta\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos\Phi & 0 & 0 \\ \sin\Phi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\lambda \\ \delta\Phi \\ \delta\alpha \end{bmatrix} \tag{6.30}$$

Como las ternas {g-ENU} y $\{\boldsymbol{n}\}$ difieren en el ángulo $\alpha \mathbf{e}_z$, de la anterior resulta:

$$\delta \boldsymbol{\theta}^n = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos\Phi & 0 & 0 \\ \sin\Phi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\lambda \\ \delta\Phi \\ \delta\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Phi \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ \cos\Phi \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \sin\Phi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\lambda \\ \delta\Phi \\ \delta\alpha \end{bmatrix} \tag{6.31}$$

Conocido (o estimado) $\delta\boldsymbol{\theta}^n$ se podrán calcular las correcciones en las coordenadas curvilíneas $\delta\lambda$ y $\delta\Phi$ y en el ángulo de deriva $\delta\alpha$ por simple inversión de la Ec. (6.31).

$$\begin{bmatrix} \delta\lambda \\ \delta\Phi \\ \delta\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\alpha/\cos\Phi & \cos\alpha/\cos\Phi & 0 \\ -\cos\alpha & \mathrm{sen}\alpha & 0 \\ -\mathrm{sen}\alpha\mathrm{tg}\Phi & -\cos\alpha tg\Phi & 1 \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta}^n \tag{6.32}$$

El diagrama de la Fig. 6.4 muestra las 3 ternas en juego del problema: la ECEF $\{\boldsymbol{e}\}$, la LGV $\{\boldsymbol{n}\}$ y la terna de navegación calculada $\{\hat{\boldsymbol{n}}\} \equiv \{\boldsymbol{c}\}$. La MCD (calculada) $\hat{\mathbf{C}}_e^n$ es la estimación de la MCD $\mathbf{C}_e^n$. La primera vincula las ternas $\{\boldsymbol{e}\}$ y $\{\hat{\boldsymbol{n}}\} \equiv \{\boldsymbol{c}\}$ y la segunda $\{\boldsymbol{e}\}$ y $\{\boldsymbol{n}\}$. Los errores $\delta\lambda$, $\delta\Phi$ y $\delta\alpha$ determinan el error angular de posición $\delta\boldsymbol{\theta}^n = \boldsymbol{\theta}_{\hat{n},n}$ que vincula las ternas $\{\boldsymbol{n}\}$ y $\{\hat{\boldsymbol{n}}\} \equiv \{\boldsymbol{c}\}$. En función de $\delta\boldsymbol{\theta}^n$ se obtiene:

$$\tilde{\mathbf{C}}(\delta\boldsymbol{\theta}^n) = \mathbf{C}_e^n \hat{\mathbf{C}}_n^e = \mathbf{C}_{\hat{n}}^n = \mathbf{C}_c^n = \exp(\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n)) \tag{6.33}$$

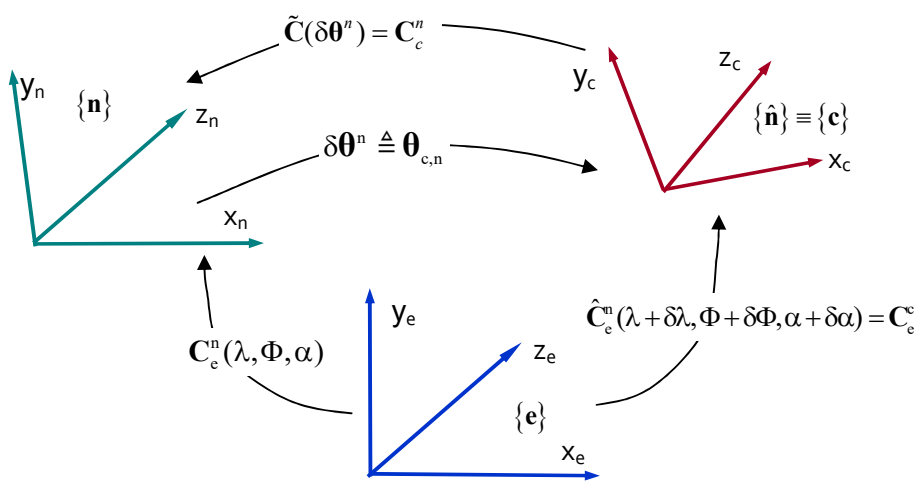


Figura 6.4: Geometría del error de posición angular.

6.5.2 Error de orientación o error angular de plataforma.

En este caso usamos la notación $\delta\boldsymbol{\theta}_{nb} = \boldsymbol{\phi}$. Sustituyendo la diferencial $\delta\mathbf{C}_b^n \triangleq \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^n)\mathbf{C}_b^n$ en la 3ª ecuación de las (6.24) se obtiene:

$$\delta\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^n)\mathbf{C}_b^n\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) + \mathbf{C}_b^n\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n)\mathbf{C}_b^n - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{in}^n)\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^n)\mathbf{C}_b^n \tag{6.34}$$

Por otra parte, de la definición del error de plataforma, surge:

$$\delta\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{S}(\dot{\boldsymbol{\phi}}^n)\mathbf{C}_b^n + \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^n)\dot{\mathbf{C}}_b^n \tag{6.35}$$

Igualando (6.34) y (6.35) luego de agrupar términos pos-multiplicar por $\mathbf{C}_n^b$ e introducir la identidad (3.5) del Capítulo 3, resulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\dot{\boldsymbol{\phi}}^n) &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^n)\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{in}^n) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{in}^n)\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^n) - \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n) + \mathbf{C}_b^n\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)\mathbf{C}_n^b \\ &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^n \times \boldsymbol{\omega}_{in}^n) - \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n) + \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^n)\end{aligned} \tag{6.36}$$

$\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ se obtiene de la última de las (6.24) introduciendo $\delta\mathbf{C}_e^n = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n)\mathbf{C}_e^n$:

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \delta\boldsymbol{\rho}^n + \delta\boldsymbol{\Omega}_e^n = \delta\boldsymbol{\rho}^n + \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n)\mathbf{C}_e^n\boldsymbol{\Omega}_e^e = \delta\boldsymbol{\rho}^n - \boldsymbol{\Omega}_e^n \times \delta\boldsymbol{\theta}^n \tag{6.37}$$

Sustituyendo (6.37) en (6.36) y reagrupando términos, se obtiene la ecuación para el error de plataforma.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\phi}}^n &= \boldsymbol{\phi}^n \times \boldsymbol{\omega}_{in}^n - \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \boldsymbol{\varepsilon}^n = \boldsymbol{\phi}^n \times \boldsymbol{\omega}_{in}^n - \delta\boldsymbol{\rho}^n + \boldsymbol{\Omega}_e^n \times \delta\boldsymbol{\theta}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^n \\ &= \boldsymbol{\phi}^n \times (\boldsymbol{\Omega}_e^n + \boldsymbol{\rho}^n) + \boldsymbol{\Omega}_e^n \times \delta\boldsymbol{\theta}^n - \delta\boldsymbol{\rho}^n + \mathbf{C}_b^n\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\end{aligned} \tag{6.38}$$

El lector podrá verificar que, el uso de la definición alternativa de la diferencial: $\delta\mathbf{C}_b^n \triangleq \mathbf{C}_b^n\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^b)$ conduce a la siguiente expresión equivalente que también puede obtenerse a partir de la (6.38) usando la transformación: $\boldsymbol{\phi}^n = \mathbf{C}_b^n\boldsymbol{\phi}^b$

$$\delta\mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_b^n\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^b) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\phi}}^b = \boldsymbol{\phi}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b(\delta\boldsymbol{\Omega}_e^n + \delta\boldsymbol{\rho}^n) + \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \tag{6.39}$$

Geometría del error angular de plataforma.

Como fuera mencionado en el Capítulo 5, la transformación de coordenadas caracterizada por $\hat{\mathbf{C}}_b^n$ (o $\hat{\mathbf{q}}_b^n$) calculada por el algoritmo de navegación "*strap-down*" refiere la terna del cuerpo a la *plataforma analítica* (ver Fig. 5.5). Los errores de cómputo hacen sin embargo que esta última difiera de la terna de navegación local en coordenadas LGV. Por esta razón distinguimos la terna "de llegada" de la transformación estimada $\hat{\mathbf{C}}_b^n$ de la terna "de llegada" de la transformación $\hat{\mathbf{C}}_e^n$, denotando a la primera terna $\{\boldsymbol{p}\}$.

Dado que es usual en la práctica, que la orientación del vehículo sea caracterizada por los ángulos de Euler: ψ (rumbo), θ (pitch) y φ (roll) (definidos en el Párrafo 4.2.5 del Capítulo 4), interesa relacionar al error de orientación de plataforma $\boldsymbol{\phi}$ con las desviaciones de esos ángulos. Para esto partimos de la transpuesta de la matriz en la Ec. **(4.31)** que reescribimos transponiendo cada uno de sus términos, según:

$$\mathbf{C}_b^n = \overbrace{((-\pi/2+\psi)@\boldsymbol{z}^n)(\theta@\boldsymbol{y}^{b'})}^{\mathbf{C}_{b'}^n}\overbrace{(-(\varphi+\pi)@\boldsymbol{x}^b)}^{\mathbf{C}_b^{b'}} = \mathbf{C}_{b'}^n\mathbf{C}_b^{b'} \tag{6.40}$$

Con:

$$\mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_{b'}^n \mathbf{C}_b^{b'} = \begin{bmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\psi & -\cos\psi & -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi \\ \cos\theta\cos\psi & \operatorname{sen}\psi & -\operatorname{sen}\theta\cos\psi \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} C\theta S\psi & C\varphi C\psi + S\varphi S\theta S\psi & -S\varphi C\psi + C\varphi S\theta S\psi \\ C\theta C\psi & -C\varphi S\psi + S\varphi S\theta C\psi & S\varphi S\psi + C\varphi S\theta C\psi \\ S\theta & -S\varphi C\theta & -C\varphi C\theta \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

Por la propiedad de aditividad de las pequeñas rotaciones, las desviaciones angulares diferenciales $\delta\varphi$, $\delta\theta$ y $\delta\psi$, respectivamente alrededor de los ejes $\boldsymbol{x}^b$, $\boldsymbol{y}^{b'}$, $\boldsymbol{z}^n$, se traducen en un error angular vectorial de plataforma:

$$\boldsymbol{\phi} = -\delta\varphi \boldsymbol{x}^b + \delta\theta \boldsymbol{y}^{b'} + \delta\psi \boldsymbol{z}^n \tag{6.42}$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{C}e_i$ es la i-esima columna de $\mathbf{C}$, rescrita en coordenadas $\{\mathbf{n}\}$, la anterior resulta:

$$\boldsymbol{\phi}^n = -\delta\varphi \mathbf{C}_b^n e_1 + \delta\theta \mathbf{C}_{b'}^n e_2 + \delta\psi \mathbf{I} e_3 = \begin{bmatrix} -\cos\theta\operatorname{sen}\psi & -\cos\psi & 0 \\ -\cos\theta\cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\psi/\cos\theta & -\cos\psi/\cos\theta & 0 \\ -\cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi\tan\theta & -\cos\psi\tan\theta & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^n \tag{6.43}$$

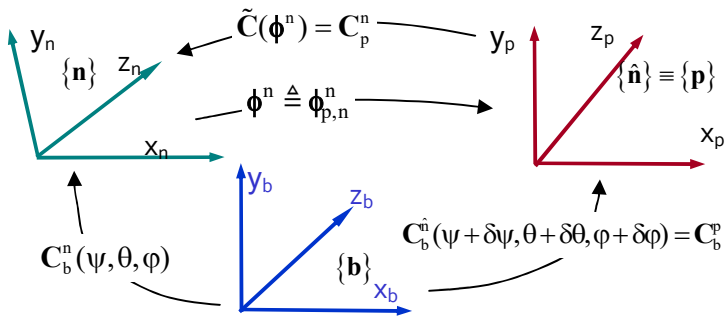


Figura 6.5: Geometría del error de plataforma

En el diagrama de la Fig. 6.5 se representan las ternas $\{\boldsymbol{b}\}$, $\{\boldsymbol{n}\}$ y $\{\boldsymbol{p}\}$ y las MCD que vinculan las coordenadas entre cada una de ellas. El error angular $\boldsymbol{\phi}^n$, correspondiente al desalineamiento ("*tilt*") entre la terna $\{\boldsymbol{n}\}$ y la plataforma analítica $\{\boldsymbol{p}\}$ determina la MCD entre ambas:

$$\tilde{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\phi}^n) = \mathbf{C}_b^n \hat{\mathbf{C}}_n^b = \mathbf{C}_p^n = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^n)) \tag{6.44}$$

Se indica además la MCD estimada (calculada) $\hat{\mathbf{C}}_b^n \equiv \mathbf{C}_b^p$ función de los errores $\delta\varphi, \delta\theta$ y $\delta\psi$ relacionados con $\boldsymbol{\phi}^n$ mediante la Ec. (6.43).

6.5.3 Relación entre los errores de posición y de plataforma

Consideremos la diferencial de la siguiente composición de MCDs:

$$\mathbf{C}_b^i = \mathbf{C}_e^i \mathbf{C}_n^e \mathbf{C}_b^n \Rightarrow \delta\mathbf{C}_b^i = \delta\mathbf{C}_e^i \mathbf{C}_n^e \mathbf{C}_b^n + \mathbf{C}_e^i \delta\mathbf{C}_n^e \mathbf{C}_b^n + \mathbf{C}_e^i \mathbf{C}_n^e \delta\mathbf{C}_b^n \tag{6.45}$$

Suponiendo sin error la MCD $\mathbf{C}_i^e$ y substituyendo las diferenciales $\delta\mathbf{C}_n^e = -\mathbf{C}_n^e \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n)$ y $\delta\mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{b}})$ en la anterior, calculamos:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{C}_b^i &= -\mathbf{C}_e^i \mathbf{C}_n^e \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n)\mathbf{C}_b^n + \mathbf{C}_e^i \mathbf{C}_n^e \mathbf{C}_b^n \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{b}}) \\ &= \mathbf{C}_b^i \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{b}}) - \mathbf{C}_e^i \mathbf{C}_n^e \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n)\mathbf{C}_b^n \\ &= \mathbf{C}_b^i \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{b}} - \delta\boldsymbol{\theta}^b) \triangleq \mathbf{C}_b^i \mathbf{S}(\boldsymbol{\psi}^b) \end{aligned} \tag{6.46}$$

En la última igualdad se introdujo la definición de llamado *error angular inercial* $\boldsymbol{\psi}(=\boldsymbol{\psi}_{ib}) \triangleq \boldsymbol{\phi} - \delta\boldsymbol{\theta}$. Para describir la dinámica de éste último, en primer lugar transformamos la Ec. (6.27) mediante $\delta\boldsymbol{\theta}^b = \mathbf{C}_n^b \delta\boldsymbol{\theta}^n$, usando $\boldsymbol{\omega}_{bn}^n = \rho^n + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n - \boldsymbol{\omega}_{ib}^n$.

$$\begin{aligned} \delta\dot{\boldsymbol{\theta}}^b &= \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{bn}^n)\delta\boldsymbol{\theta}^n + \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} \delta\dot{\boldsymbol{\theta}}^n = -\mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} \delta\boldsymbol{\theta}^n \times \boldsymbol{\omega}_{bn}^n + \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} (\delta\boldsymbol{\theta}^n \times \boldsymbol{\rho}^n - \delta\boldsymbol{\rho}^n) \\ &= -\mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} \delta\boldsymbol{\theta}^n \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n - \boldsymbol{\omega}_{ib}^n) - \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} \delta\boldsymbol{\rho}^n = \delta\boldsymbol{\theta}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \mathbf{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \delta\boldsymbol{\theta}^n - \delta\boldsymbol{\rho}^n) \end{aligned} \tag{6.47}$$

Luego, restando la anterior de la (6.39) reencontramos la ecuación del error angular inercial (6.14):

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}^b = \boldsymbol{\psi}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \tag{6.48}$$

Lo que resulta natural vista la definición dada en (6.46).

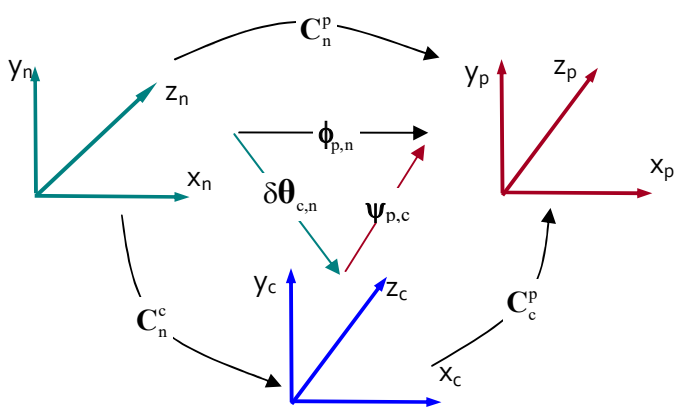


Figura 6.6: Geometría del error angular inercial.

Geometría del error angular inercial

El error angular inercial $\boldsymbol{\psi}^n$ tiene un claro el sentido geométrico que se advierte al calcular la MCD $\mathbf{C}_p^c$ a partir de las definiciones (6.33) y (6.44):

$$\mathbf{C}_p^c = \mathbf{C}_n^c \mathbf{C}_p^n = \exp(\mathbf{S}(-\delta\boldsymbol{\theta}^n))\exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{n}})) \approx \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{n}} - \delta\boldsymbol{\theta}^n)) = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{n}})) \quad (6.49)$$

Donde la aproximación es justificada por la aditividad de los pequeños ángulos de rotación. De la anterior resulta que $\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{n}}$ corresponde al ángulo de desalineamiento relativo ente la plataforma analítica $\{\boldsymbol{p}\}$ y la terna de navegación calculada $\{\boldsymbol{c}\}$. La Fig. 6.6 resume las relaciones geométricas entre las ternas $\{\boldsymbol{p}\}$, $\{\boldsymbol{c}\}$ y $\{\boldsymbol{n}\}$.

6.5.4 Propagación del error de velocidad

Sustituyendo las diferenciales $\delta\mathbf{C}_b^n$ y $\delta\mathbf{C}_e^n$ en la 1ª Ec. (6.24) se obtiene la ecuación de propagación de la perturbación en la velocidad:

$$\delta\dot{\mathbf{V}}^n = -\mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{n}} - (\boldsymbol{\rho}^n + 2\boldsymbol{\Omega}_e^n) \times \delta\mathbf{V}^n - \delta\boldsymbol{\rho}^n \times \mathbf{V}^n - 2(\delta\boldsymbol{\theta}^n \times \boldsymbol{\Omega}_e^n) \times \mathbf{V}^n + \mathbf{C}_b^n \delta\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{g}^n \quad (6.50)$$

Salvo $\delta\mathbf{g}^n$ y $\delta\boldsymbol{\rho}^n$ el resto de los términos ya fueron explicitados con anterioridad.

Diferencial de la rotación por transporte

La diferencial de la rotación por transporte se calcula a partir de la Ec. **(5.39)** que reproducimos por conveniencia:

$$\boldsymbol{\rho}^n = \left(\frac{V_x}{T} - \frac{V_y}{R_y}\right)\mathbf{x}^{\mathbf{n}} + \left(\frac{V_x}{R_x} - \frac{V_y}{T}\right)\mathbf{y}^{\mathbf{n}} + (\dot{\lambda}\sin\Phi + \dot{\alpha})\mathbf{z}^{\mathbf{n}} \quad (6.51)$$

$$\frac{1}{\mathrm{T}} \triangleq \left(\frac{\cos\alpha sen\alpha}{R_n + h} - \frac{\cos\alpha sen\alpha}{R_m + h}\right); \frac{1}{\mathrm{R_y}} \triangleq \left(\frac{\cos^2\alpha}{R_m + h} + \frac{sen^2\alpha}{R_n + h}\right); \frac{1}{\mathrm{R_x}} \triangleq \left(\frac{sen^2\alpha}{R_m + h} + \frac{\cos^2\alpha}{R_n + h}\right) \quad (6.52)$$

La siguiente aproximación se justifica para el uso que se hará de la diferencial $\delta\boldsymbol{\rho}^n$ y para el valor nominal de la excentricidad del elipsoide normal ε.

$$R_n(S) \approx R_m(S)(1 + O(\varepsilon^2)) \rightarrow \frac{1}{R_n + h} \approx \frac{1}{R_m + h}$$

Sustituyendo la anterior en las (6.52) y luego en la (6.51) resultan

$$\frac{1}{\mathrm{T}} \triangleq \left(\frac{\cos\alpha sen\alpha}{R_n + h} - \frac{\cos\alpha sen\alpha}{R_m + h}\right) \approx \frac{O(\varepsilon^2)}{R_m + h} \approx 0$$

$$\frac{1}{\mathrm{R_y}} \triangleq \left(\frac{\cos^2\alpha}{R_m + h} + \frac{sen^2\alpha}{R_n + h}\right) \approx \frac{1}{R_n + h} \approx \left(\frac{sen^2\alpha}{R_m + h} + \frac{\cos^2\alpha}{R_n + h}\right) \triangleq \frac{1}{\mathrm{R_x}}$$

$$\boldsymbol{\rho}^n \approx \underbrace{-\frac{V_y}{R_n + h}}_{\approx\rho_x}\mathbf{x}^{\mathbf{n}} + \underbrace{\frac{V_x}{R_n + h}}_{\approx\rho_y}\mathbf{y}^{\mathbf{n}} + (\dot{\lambda}\sin\Phi + \dot{\alpha})\mathbf{z}^{\mathbf{n}} \quad (6.53)$$

De donde se obtienen las componentes según los ejes $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de la terna $\{\mathbf{n}\}$:

$$\delta\rho_x \approx -\frac{\delta V_y}{\mathrm{R_n}+h}+\frac{V_y\delta h}{\left(\mathrm{R_n}+h\right)^2}=-\frac{\delta V_y+\rho_x\delta h}{\mathrm{R_n}+h}$$
$$\delta\rho_y \approx \frac{\delta V_x}{\mathrm{R_n}+h}-\frac{V_x\delta h}{\left(\mathrm{R_n}+h\right)^2}=-\frac{-\delta V_x+\rho_y\delta h}{\mathrm{R_n}+h} \tag{6.54}$$

La componente $\delta\rho_z$ depende de la mecanización adoptada para ρ_z^n (ver Tabla 5.1). Consideramos 3 casos:

1. Azimut libre:

$$\rho_z = 0 \Rightarrow \delta\rho_z = 0 \tag{6.55}$$

2. Foucault:

$$\rho_z = -\Omega_e \mathrm{sen}\Phi = -\mathbf{z}_n \bullet \mathbf{\Omega}_e^n = -\mathbf{z}_n \bullet \mathbf{C}_e^n \mathbf{\Omega}_e^e \Rightarrow$$
$$\delta\rho_z = -\mathbf{z}_n \bullet \delta\mathbf{C}_e^n \mathbf{\Omega}_e^e = -\mathbf{z}_n \bullet \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^n)\mathbf{C}_e^n \mathbf{\Omega}_e^e = \mathbf{z}_n \bullet \mathbf{S}(\mathbf{\Omega}_e^n)\delta\boldsymbol{\theta}^n \tag{6.56}$$

3. Apuntamiento al Norte ({***n***}={***g***}):

$$\alpha = \dot{\alpha} = 0 \Rightarrow \rho_U = \frac{V_E \tan\Phi}{R_n+h} = \rho_\mathrm{N} \tan\Phi \Rightarrow usando\ \delta\Phi = -\delta\theta_E$$
$$\boldsymbol{\rho}^g = \frac{1}{R_n+h}\begin{bmatrix} -V_N \\ V_E \\ V_E \tan\Phi \end{bmatrix} \Rightarrow \tag{6.57}$$
$$\delta\boldsymbol{\rho}^g = \frac{1}{R_n+h}\begin{bmatrix} -\delta V_N \\ \delta V_E \\ \tan\Phi\delta V_E \end{bmatrix} - \frac{1}{R_n+h}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_E \sec^2\Phi \end{bmatrix}\delta\theta_E - \frac{\delta h}{R_n+h}\boldsymbol{\rho}^g$$

Diferencial de la gravedad

La configuración: "*terna LGV + gravedad normal*" es la más adaptada a vehículos sub-atmosféricos tanto por su precisión como por su sencillez matemática. Como se mostró en el Capítulo 4, en la gran mayoría de estas aplicaciones resulta suficiente la siguiente aproximación de 2º orden (en la altura geodésica *h*) de la gravedad normal en terna g-LGV (ver Ecs. **(4.44)** y **(4.45)**):

$$\mathbf{g}^g \approx \boldsymbol{\gamma}^g = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_N & \gamma_U \end{bmatrix}^T \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\gamma(h,\Phi) \end{bmatrix}^T \tag{6.58}$$

$$\gamma(h,\Phi) = \gamma_s(\Phi)\left(1-2\left(1+f+m-2f\sin^2(\Phi)\right)\frac{h}{a}+3\left(\frac{h}{a}\right)^2\right)$$

$$k = 0{,}001931852; \quad \gamma_s(\Phi) = \gamma_e \frac{1+k\sin^2\Phi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\Phi}}\ ; \quad m = \frac{\Omega_e^2 a^2 b}{GM}$$

En las aplicaciones en que se requiera mayor precisión podrá adoptarse la gravedad normal corregida mediante el uso de las anomalías δg, ξ y η expresada por la Ec. **(4.55)** que aquí reproducimos.

$$\mathbf{g}^g \cong \boldsymbol{\gamma}^g_{corr}(\lambda,\Phi,h;\xi,\eta) = -\begin{bmatrix} (\gamma+\delta g)\eta \\ (\gamma+\delta g)\xi+\gamma_N \\ \delta g+\gamma_U \end{bmatrix} \tag{6.59}$$

Siendo la (6.58) un caso particular de la (6.59) para $\xi=\delta g=\eta=0$, establecemos la diferencial de esta última:

$$\delta\mathbf{g}^g = -\left(\delta\gamma(h,\Phi)+\delta\delta g\right)\begin{bmatrix}\hat{\eta}\\ \hat{\xi}\\ 1\end{bmatrix} - \left(\gamma(\hat{h},\hat{\Phi})\right)\begin{bmatrix}\delta\hat{\eta}\\ \delta\hat{\xi}\\ 0\end{bmatrix} \approx -\begin{bmatrix}\gamma(\hat{h},\hat{\Phi})\delta\hat{\eta}\\ \gamma(\hat{h},\hat{\Phi})\delta\hat{\xi}\\ (\delta\gamma+\delta\delta g)\end{bmatrix} \tag{6.60}$$

Con: $\delta h \triangleq h-\hat{h}$; $\delta\Phi \triangleq \Phi-\hat{\Phi}$; $\delta\delta g \triangleq \delta g-\hat{\delta g}$; $\delta\eta \triangleq \eta-\hat{\eta}$; $\delta\xi \triangleq \xi-\hat{\xi}$, y además:

$$\delta\gamma(h,\Phi) = \frac{\partial\gamma(\hat{h},\hat{\Phi})}{\partial h}\delta h + \frac{\partial\gamma(\hat{h},\hat{\Phi})}{\partial\Phi}\delta\Phi \tag{6.61}$$

Finalmente, definiendo el error en el ángulo vectorial de deriva como: $\delta\boldsymbol{\alpha}^n \triangleq \begin{bmatrix}0 & 0 & \delta\alpha\end{bmatrix}^T$ y $\delta\alpha \triangleq \alpha-\hat{\alpha}$ se obtiene $\delta\mathbf{g}^n$ mediante:

$$\delta\mathbf{g}^n = \delta\mathbf{C}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{g}}\mathbf{g}^g + \mathbf{C}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{g}}\delta\mathbf{g}^g \cong \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\alpha})\mathbf{C}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{g}}\hat{\mathbf{g}}^g + \mathbf{C}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{g}}\delta\mathbf{g}^g = \delta\boldsymbol{\alpha}\times\hat{\mathbf{g}}^n + \mathbf{C}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{g}}\delta\mathbf{g}^g \tag{6.62}$$

6.5.5 Ecuaciones generales de la dinámica del error en terna LGV

A continuación resumimos las ecuaciones lineales del error en terna LGV ((6.27), (6.38) y (6.50)). Para simplificar usamos: $\boldsymbol{\upsilon}^n \triangleq \boldsymbol{\rho}^n + 2\boldsymbol{\Omega}^n_e$, $\mathbf{f}^n = \mathbf{C}^n_b\mathbf{f}^b$, $\boldsymbol{\Omega}^n_e = \mathbf{C}^n_e\boldsymbol{\Omega}^e_e$.

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\phi}}^n &= -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^n_{in})\boldsymbol{\phi}^n + \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}^n_e)\delta\boldsymbol{\theta}^n - \delta\boldsymbol{\rho}^n + \mathbf{C}^n_b\delta\boldsymbol{\omega}^b_{ib} \\
\delta\dot{\mathbf{V}}^n &= -\mathbf{S}(\mathbf{f}^n)\boldsymbol{\phi}^n - \mathbf{S}(\boldsymbol{\upsilon}^n)\delta\mathbf{V}^n + \mathbf{S}(\mathbf{V}^n)[\delta\boldsymbol{\rho}^n - 2\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}^n_e)\delta\boldsymbol{\theta}^n] + \mathbf{C}^n_b\delta\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{g}^n \\
\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}^n &= -\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}^n)\delta\boldsymbol{\theta}^n - \delta\boldsymbol{\rho}^n \\
\delta\dot{h} &= \delta V^n_z
\end{aligned} \tag{6.63}$$

Con:

$$\delta\mathbf{g}^n = \begin{bmatrix}-g_y\\ g_x\\ 0\end{bmatrix}\delta\alpha + \mathbf{C}^n_g\delta\mathbf{g}^g; \quad \delta\boldsymbol{\rho}^n = \frac{1}{R_n+h}\begin{bmatrix}-\delta V_y - \rho_x\delta h\\ \delta V_x - \rho_y\delta h\\ \delta\rho_z/(R_n+h)\end{bmatrix} \tag{6.64}$$

Definiendo al error de navegación en terna LGV como:

$$\delta\mathbf{x}^n \triangleq \left[(\boldsymbol{\phi}^n)^T \quad (\delta\mathbf{V}^n)^T \quad (\delta\boldsymbol{\theta}^n)^T \quad \delta h\right]^T \in \mathbb{R}^{10}; \tag{6.65}$$

mediante sustituciones adecuadas, las ecuaciones (6.63) adoptan la forma general de ecuación de estado lineal variante con el tiempo:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}^n = \mathbf{F}^n(t)\delta\mathbf{x}^n + \mathbf{B}^n(t)\delta\boldsymbol{\mu} + \mathbf{G}\delta\mathbf{g}^n \tag{6.66}$$

Donde $\mathbf{F}^n(t) \in \mathbb{R}^{10x10}$ y $\mathbf{B}^n(t) \in \mathbb{R}^{10x6}$ son matrices con coeficientes dependientes del tiempo, en tanto que $\mathbf{G} = \left[0_{3\times3} \;\; I_{3\times3} \;\; 0_{3\times3}\right]^T$.

6.6 Ejemplos de ecuaciones de errores y aplicaciones

6.6.1 Ecuaciones del error en coordenadas geográficas {g}.

La condición de apuntamiento al Norte ($\alpha = \dot{\alpha} = \delta\alpha = 0$) y la relación (6.30) imponen restricciones sobre las coordenadas de $\delta\boldsymbol{\theta}^g$. En particular, $\delta\theta_N$ y $\delta\theta_U$ quedan vinculadas por la relación $\delta\theta_U = \delta\theta_N \tan\Phi$. Esto reduce a 2 los grados de libertad del error $\delta\boldsymbol{\theta}^g$ el cual podrá expresarse ya sea en función de sus componentes sobre el plano horizontal $\delta\boldsymbol{\theta}^H = \left[\delta\theta_E \; \delta\theta_N\right]^T$ o bien en función de $\delta\lambda$ y $\delta\Phi$ mediante:

$$\delta\boldsymbol{\theta}^g = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \tan\Phi \end{bmatrix}}_{T_{gH}} \delta\boldsymbol{\theta}^H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \cos\Phi & 0 \\ \sin\Phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\lambda \\ \delta\Phi \end{bmatrix} \tag{6.67}$$

Por la misma razón, el error $\delta\mathbf{x}^g$ definido en (6.65) queda reducido al siguiente vector de dimensión 9.

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}^g &\triangleq \left[(\boldsymbol{\phi}^g)^T \quad (\delta\mathbf{V}^g)^T \quad \delta\theta_E \quad \delta\theta_N \quad \delta h\right]^T \\ &= \left[(\boldsymbol{\phi}^g)^T \quad (\delta\mathbf{V}^g)^T \quad (\delta\boldsymbol{\pi}^g)^T\right]^T \in \mathbb{R}^9 \end{aligned} \tag{6.68}$$

Las últimas 3 componentes de $\delta\mathbf{x}$ corresponden al error de posición que denotamos $\delta\boldsymbol{\pi}^g = \left[\delta\theta_E \quad \delta\theta_N \quad \delta h\right]^T$. Reescribimos la Ec. (6.57) en la forma:

$$\delta\boldsymbol{\rho}^g = \mathbf{R}_V \delta\mathbf{V}^g + \mathbf{R}_\pi \delta\boldsymbol{\pi}^g \tag{6.69}$$

Con:

$$\mathbf{R}_V \triangleq \frac{1}{R_n + h}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \tan\Phi & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_\pi \triangleq \frac{1}{R_n + h}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\rho_E \\ 0 & 0 & -\rho_N \\ -V_E \sec^2\Phi & 0 & -\rho_U \end{bmatrix} \tag{6.70}$$

Dado que en coordenadas $\{\boldsymbol{g}\}$ Ω_E=0 y Ω_U=$\Omega_N$tanΦ, usando la (6.67) determinamos el producto:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_e^g)\delta\boldsymbol{\theta}^g = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_U \\ -\Omega_N \end{bmatrix}\delta\theta_E \tag{6.71}$$

A partir de las (6.67) a (6.70) y usando además las definiciones:

$$\boldsymbol{\Phi}_\pi \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_E/(R_n+h) \\ \Omega_U & 0 & \rho_N/(R_n+h) \\ -\Omega_N + \rho_N \sec^2\Phi & 0 & \rho_U/(R_n+h) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Phi}_V \triangleq -\mathbf{R}_V \tag{6.72}$$

Se obtiene para el término:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_e^g)\delta\boldsymbol{\theta}^g - \delta\boldsymbol{\rho}^g = \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_e^g)\delta\boldsymbol{\theta}^g - \mathbf{R}_V\delta\mathbf{V}^g - \mathbf{R}_\pi\delta\boldsymbol{\pi}^g = \boldsymbol{\Phi}_\pi\delta\boldsymbol{\pi}^g + \boldsymbol{\Phi}_V\delta\mathbf{V}^g \tag{6.73}$$

Introduciendo la definición $\boldsymbol{\Phi}_\phi \triangleq -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ig}^g)$, a continuación reescribimos la 1ª de las (6.63) como:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}^g = \boldsymbol{\Phi}_\phi\boldsymbol{\phi}^g + \boldsymbol{\Phi}_V\delta\mathbf{V}^g + \boldsymbol{\Phi}_\pi\delta\boldsymbol{\pi}^g + \mathbf{C}_b^g\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \tag{6.74}$$

Usando una vez más la (6.71) junto la (6.69) después de algunas manipulaciones algebraicas determinamos el siguiente término de la 2ª de las Ecs. (6.63):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{V}^n)[\delta\boldsymbol{\rho}^n - 2\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_e^n)\delta\boldsymbol{\theta}^n] &= \mathbf{S}(\mathbf{V}^g)\mathbf{R}_V\delta\mathbf{V}^g + \mathbf{S}(\mathbf{V}^g)\left[\mathbf{R}_\pi\delta\boldsymbol{\pi}^g - 2\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_e^g)\delta\boldsymbol{\theta}^g\right] \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{V}^g)\mathbf{R}_V\delta\mathbf{V}^g + \mathbf{V}_\pi\delta\boldsymbol{\pi}^g \end{aligned} \tag{6.75}$$

donde:

$$\mathbf{V}_\pi \triangleq \mathbf{S}(\mathbf{V}^g)\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\rho_E/(R_n+h) \\ -2\Omega_U & 0 & -\rho_N/(R_n+h) \\ 2\Omega_N - \rho_N\sec^2\Phi & 0 & -\rho_U/(R_n+h) \end{bmatrix}; \tag{6.76}$$

Con las definiciones anteriores y las siguientes:

$$\mathbf{V}_\phi \triangleq -\mathbf{S}(\mathbf{f}^n);\ \mathbf{V}_V \triangleq -\mathbf{S}(\boldsymbol{\upsilon}^g) + \mathbf{S}(\mathbf{V}^g)\mathbf{R}_V; \tag{6.77}$$

la 2ª de las Ecs. (6.63) puede escribirse para este ejemplo como:

$$\delta\dot{\mathbf{V}}^g = \mathbf{V}_\phi\boldsymbol{\phi}^g + \mathbf{V}_V\delta\mathbf{V}^g + \mathbf{V}_\pi\delta\boldsymbol{\pi}^g + \mathbf{C}_b^g\delta\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{g}^g \tag{6.78}$$

evaluamos ahora:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_\pi \delta\boldsymbol{\pi}^g &\triangleq -\mathbf{S}(\rho^g)\begin{bmatrix}0\\ \Omega_U\\ -\Omega_N\end{bmatrix}\delta\theta_E - \mathbf{R}_\pi\delta\boldsymbol{\pi}^g \\ &= \begin{bmatrix}0 & 0 & \rho_E/(R_n+h)\\ -\rho_N & \rho_E\tan\Phi & \rho_N/(R_n+h)\\ \rho_N(1+\sec^2\Phi) & -\rho_E & \rho_U/(R_n+h)\end{bmatrix}\delta\boldsymbol{\pi}^g\end{aligned} \tag{6.79}$$

Mediante la cual, junto con la definición: $\mathbf{T}_V \triangleq -\mathbf{R}_V$, la 3ª de las (6.63) resulta:

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}^g = \mathbf{T}_V\delta\mathbf{V}^g + \mathbf{T}_\pi\delta\boldsymbol{\pi}^g \tag{6.80}$$

Reemplazando la última fila de la (6.80) por la ecuación $\delta\dot{h} = \delta V_U^g$ resulta:

$$\delta\dot{\boldsymbol{\pi}}^g = \boldsymbol{\Pi}_V\delta\mathbf{V}^g + \boldsymbol{\Pi}_\pi\delta\boldsymbol{\pi}^g \tag{6.81}$$

Con:

$$\boldsymbol{\Pi}_V \triangleq \frac{1}{R_n+h}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{\Pi}_\pi \triangleq \begin{bmatrix}0 & 0 & \rho_E/(R_n+h)\\ -\rho_N & \rho_E\tan\Phi & \rho_N/(R_n+h)\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{6.82}$$

Agrupando las Ecs. (6.74), (6.78) y (6.81), la Ec.(6.66) del error de navegación resulta para este ejemplo:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{x}}^g &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_\phi & \boldsymbol{\Phi}_V & \boldsymbol{\Phi}_\pi\\ \mathbf{V}_\phi & \mathbf{V}_V & \mathbf{V}_\pi\\ 0 & \boldsymbol{\Pi}_V & \boldsymbol{\Pi}_\pi\end{bmatrix}\delta\mathbf{x}^g + \begin{bmatrix}\mathbf{C}_b^g & 0\\ 0 & \mathbf{C}_b^g\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\\ \delta\mathbf{f}^b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ I\\ 0\end{bmatrix}\delta\mathbf{g}^g \\ &= \mathbf{F}^g\delta\mathbf{x}^g + \mathbf{B}^g\delta\boldsymbol{\mu} + \mathbf{G}\delta\mathbf{g}^g\end{aligned} \tag{6.83}$$

6.6.2 Error de navegación con vehículo en reposo en terna terrestre {g}.

La condición de reposo sobre la Tierra impone:

$$\begin{aligned}&\dot{\mathbf{V}}^g = \mathbf{V}^g = \boldsymbol{\rho}^g = 0;\ \boldsymbol{\omega}_{ig}^g = \boldsymbol{\Omega}^g \\ &\dot{\mathbf{C}}_b^g = \dot{\mathbf{C}}_e^g = 0\end{aligned} \tag{6.84}$$

Para los fines del análisis de este ejemplo y el siguiente se usará la aproximación (6.58) para la gravedad $\mathbf{g}^g$. Bajo estas condiciones la fuerza específica y la velocidad angular inerciales junto con sus respectivas mediciones provistas por los instrumentos inerciales a bordo resultan:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{f}^{\mathrm{b}} = -\boldsymbol{\gamma}^{b} \Rightarrow \hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{b}} = -\boldsymbol{\gamma}^{b} - \delta\mathbf{f}^{b} \\
&\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} = \boldsymbol{\Omega}_{e}^{b} = \mathbf{C}_{g}^{b}\boldsymbol{\Omega}_{e}^{g} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b} = \boldsymbol{\Omega}_{e}^{b} - \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}
\end{aligned} \tag{6.85}$$

Las condiciones (6.84) imponen los siguientes valores para las matrices definidas en el ejemplo 6.1:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}_{\phi} = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}^{g}); \quad \boldsymbol{\Phi}_{\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Omega_U & 0 & 0 \\ -\Omega_N & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\mathbf{V}_{\phi} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\gamma}^{g}); \ \mathbf{V}_{V} = -2\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_{e}^{g}); \ \mathbf{V}_{\pi} = 0 \\
&\boldsymbol{\Pi}_{\pi} = 0
\end{aligned} \tag{6.86}$$

De este modo, la matriz de la dinámica del error (6.83) para este ejemplo resulta:

$$\mathbf{F}^{g} \triangleq \begin{bmatrix}
0 & \Omega_U & -\Omega_N & 0 & (R_n+h)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\Omega_U & 0 & 0 & -(R_n+h)^{-1} & 0 & 0 & \Omega_U & 0 & 0 \\
\Omega_N & 0 & 0 & -(R_n+h)^{-1}\tan\Phi & 0 & 0 & -\Omega_N & 0 & 0 \\
0 & -\gamma & 0 & 0 & 2\Omega_U & -2\Omega_N & 0 & 0 & 0 \\
\gamma & 0 & 0 & -2\Omega_U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2\Omega_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & (R_n+h)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -(R_n+h)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}; \tag{6.87}$$

Esta matriz permite extraer algunas conclusiones sobre la dinámica del error:

1. Las ecuaciones del error son invariantes con el tiempo y dependen de los valores de la latitud Φ, la altura h sobre el elipsoide normal y su orientación $\mathbf{C}_{b}^{g}$.
2. Las componentes $\delta\boldsymbol{\theta}_N$ y δh no afectan a las otras componentes de $\delta\mathbf{x}$.
3. Los valores propios de la matriz $\mathbf{F}^{g}$ están sobre el eje imaginario. En particular, para la latitud Φ=35º y h=0 los valores propios de $\mathbf{F}^{g}$ resultan:

$$\lambda_{1,2} = \pm i1{,}2910\text{x}10^{-3}, \ \lambda_{3,4} = \pm i1{,}19\text{x}10^{-3}; \ \lambda_{5,6} = \pm i0{,}0729\text{x}10^{-3}; \ \lambda_{7,8,9} = 0 \tag{6.88}$$

De estos valores surgen los siguientes períodos de oscilaciones autosostenidas: dos llamados *de Shuller*: $T_{1,2} \approx 81$seg; $T_{3,4} \approx 88$seg y dos llamados *de Foucault*: $T_{5,6} \approx 23{,}93$ hs. Los primeros corresponden aproximadamente al periodo de oscilación de un péndulo de brazo igual al radio terrestre: $T_{1234} \approx \pm\sqrt{a/\gamma} \approx 84 seg$. El segundo período corresponde al de la rotación sideral terrestre*.

*Período de rotación de la Tierra respecto de las estrellas que difiere del día solar de 24hs.

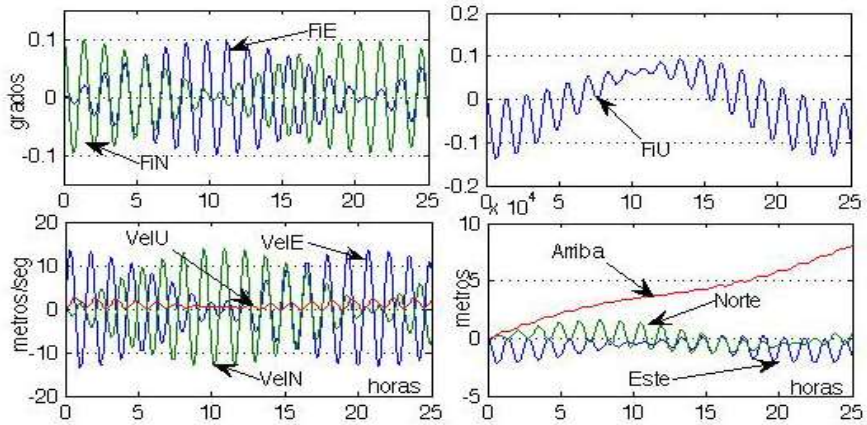


Figura 6.7: Respuesta del vector de error al error inicial $\phi_N(0)$=0,1º.

La Fig. 6.7 presenta las formas de onda de las componentes del vector de error provocadas por un desconocimiento inicial en la componte $\phi_N(0)$=0,1º. Se destacan las oscilaciones de Shuller moduladas por oscilaciones más lentas de Foucault. Se advierte una transferencia cíclica y conservativa de la energía entre oscilaciones N-S y E-O tanto para los errores de velocidad como de plataforma. Dicha transferencia es provocada por la fuerza de Coriolis debida a la rotación terrestre y tiene como período el día sideral 23,9hs El gráfico inferior derecho muestra los errores de desplazamiento en metros según las direcciones E,N,U y evidencia el importante efecto que tiene sobre la posición cualquier error inicial de alineación de la plataforma analítica. Las oscilaciones E,N se corresponden con las respectivas componentes del error en velocidad, en tanto que la componente vertical diverge como consecuencia de la presencia de polos múltiples en el origen.

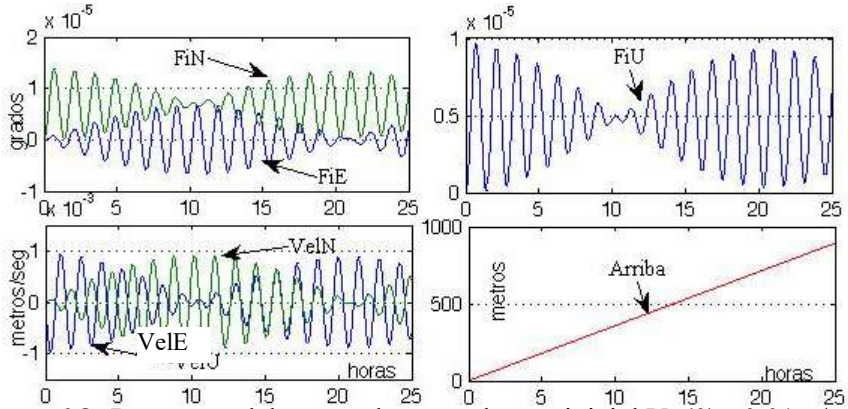


Figura 6.8: Respuesta del vector de error al error inicial $V_U(0)$= 0,01m/seg.

La Fig. 6.8 demuestra el efecto de un error inicial en la velocidad: $Vel_U(0)$= 0,01m/seg. Además de las oscilaciones propias de un sistema no amortiguado, se advierte la respuesta en rampa de la posición en la dirección "arriba". Una vez más, esta dinámica está asociada a al polo múltiple en el origen del sistema (6.87).

La Fig. 6.9 revela la influencia de los errores giroscópicos sobre los parámetros de navegación. En ella se destaca la divergencia polinomial en la posición debida a un error giroscópico proyectado sobre la dirección Norte.

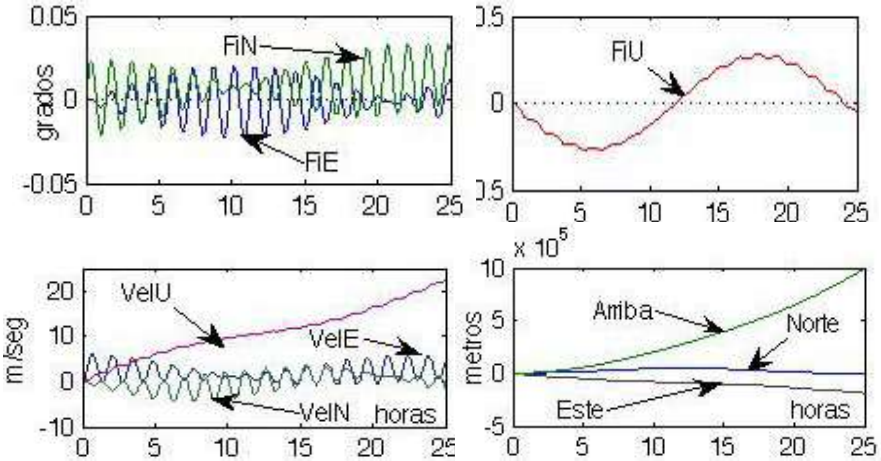


Figura 6.9: Respuesta del error a un sesgo giroscópico en dirección N: ε_N=0,1gr/hr.

De este ejemplo se concluye que aún pequeños desconocimientos en las condiciones iniciales o errores en las mediciones inerciales pueden inducir oscilaciones indeseadas y divergencias no acotadas en los parámetros de navegación calculados mediante la integración de las ecuaciones de navegación. El fenómeno guarda cierta similitud con el de la inestabilidad del canal vertical abordado en el Capítulo 5 aunque en este caso, el problema no está asociado a la dependencia funcional de la gravedad respecto de la altura sino que es inherente a la dinámica de los sistemas no amortiguados con polos múltiples en el origen.

6.6.3 Autoalineación de un vehículo estacionario sobre la Tierra

El ejemplo anterior demuestra la importancia de reducir el error inicial del estado cinemático en un sistema de navegación inercial (SNI). Se denomina alineación al procedimiento mediante el cual se intenta lograr este objetivo. Un caso particular es la alineación de los ejes de la plataforma analítica respecto de la terna de navegación de un vehículo en reposo sobre la Tierra. El procedimiento consta usualmente de dos fases (ver Titerton/Weston, (2004)). La primera, de alineación gruesa, utiliza normalmente instrumentos ópticos, geométricos y magnéticos para obtener una primera aproximación de la orientación inicial. A esta fase suele sucederle otra de autoalineación fina que tiene por objetivo reducir dicho error inicial. Para esto es posible usar el propio algoritmo de navegación inercial realimentado con información externa. En este ejemplo se supondrá que la posición del vehículo y la gravedad local son perfectamente conocidas.

La Fig. 6.10 describe el modo de funcionamiento del sistema de navegación durante el procedimiento de autoalineación. Éste consiste en sumar a la proyección de las magnitudes inerciales sobre la terna geográfica local la señal calculada mediante la siguiente ley lineal en la velocidad horizontal:

$$\mathbf{u}^g \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\omega \\ \mathbf{u}_V \end{bmatrix} = \mathbf{K}\begin{bmatrix} \hat{V}_E \\ \hat{V}_N \end{bmatrix} = \mathbf{K}\hat{\mathbf{V}}_H;\ \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{6\times 2} \tag{6.89}$$

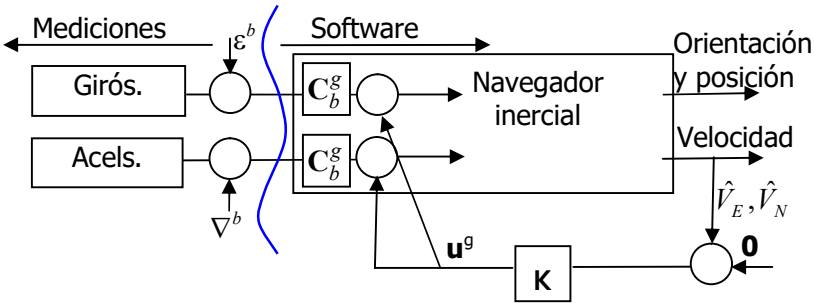


Figura 6.10: Esquema de mecanización de la autoalineación en reposo.

Cabe señalar que siendo la velocidad del vehículo $\mathbf{V}^g$=0 su valor calculado $\hat{\mathbf{V}}^g$ es en sí mismo el error de velocidad y de acuerdo con la definición (6.1):

$$\hat{\mathbf{V}}^g = -\delta\mathbf{V}^g \tag{6.90}$$

La racionalidad de la ley (6.89) radica en que, como se vió en el ejemplo anterior, los errores en las componentes de la velocidad horizontal calculada son una consecuencia "visible" de los errores de alineación e instrumentales (ver Fig. 6.7 a 6.9). Estando el vehículo en reposo, su estado cinemático es constante en tanto que el estado calculado evoluciona alrededor de este valor fijo. Siendo precisamente el objetivo de la autoalineación reducir estas diferencias, en lo que sigue haremos uso del modelo (6.83) que describe la dinámica del error de navegación.

Dado que este esquema de autolineación no utiliza la velocidad vertical, se impone a ésta el valor nulo de la condición de reposo durante la autoalineación. Asimismo, se impone como condición inicial de la posición del vehículo su valor conocido. Lo anterior se traduce en las siguientes condiciones sobre el vector de error (6.68) y su dinámica (6.83):

$$\begin{aligned} \hat{V}_U &= \delta V_U = \delta\dot{V}_U = 0 \\ \delta\boldsymbol{\pi}^g &= \delta\dot{\boldsymbol{\pi}}^g = 0 \end{aligned} \tag{6.91}$$

Las condiciones anteriores implican suprimir las últimas 4 filas y columnas de la matriz $\mathbf{F}^g$ de la (6.87), de modo que el modelo lineal que describe los apartamientos de la condición nominal de reposo del navegador realimentado de la Fig. 6.10 resulta:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^g\delta\mathbf{x} + \delta\boldsymbol{\mu}^g + \mathbf{u}^g; \tag{6.92}$$

Donde:

$$\delta\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^g \\ \delta\mathbf{V}_H \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5;\quad \mathbf{u}^g = \mathbf{K}\begin{bmatrix} \hat{V}_E \\ \hat{V}_N \end{bmatrix} = -\mathbf{KH}\delta\mathbf{x}; \tag{6.93}$$

y además:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix};\ \mathbf{F}^g\triangleq\begin{bmatrix}0&\Omega_U&-\Omega_N&0&-\frac{1}{R_n+h}\\-\Omega_U&0&0&\frac{1}{R_n+h}&0\\\Omega_N&0&0&0&0\\0&-\gamma&0&0&2\Omega_U\\\gamma&0&0&-2\Omega_U&0\end{bmatrix};\ \delta\boldsymbol{\mu}^g\triangleq\begin{bmatrix}\varepsilon_E^g\\\varepsilon_N^g\\\varepsilon_U^g\\\nabla_E^g\\\nabla_N^g\end{bmatrix};\qquad(6.94)$$

La matriz constante K se diseña de modo de que el siguiente sistema lineal realimentado sea exponencialmente estable:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}=(\mathbf{F}^g-\mathbf{KH})\delta\mathbf{x}+\delta\boldsymbol{\mu}^g;\qquad(6.95)$$

Condición que es posible lograr dado que, como es fácil demostrar, las matrices ($\mathbf{F}^g$,$\mathbf{H}$) conforman un par observable (ver por ejemplo Goodwin et al., 2001 para una exposición general sobre la observabilidad). En efecto, bajo esta condición es posible asignar arbitrariamente los valores propios la matriz del sistema en lazo cerrado: $\mathbf{A}_{lc}(\mathbf{K})\triangleq\mathbf{F}^g-\mathbf{KH}$. Así imponiendo que estos tengan parte real negativa, el resultado es que si los errores instrumentales son nulos ($\delta\boldsymbol{\mu}^g=0$) el error $\delta\mathbf{x}$ converge exponencialmente a cero asegurando la alinearon asintótica de la plataforma analítica.

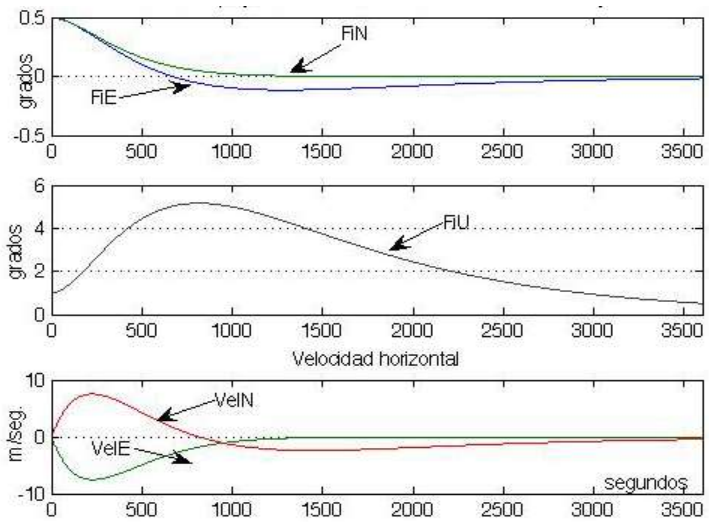


Figura 6.11: Alineación sin errores instrumentales.

Para las unidades $\boldsymbol{\phi}$[rad] y $\mathbf{V}$[m/s] con el valor de $\mathbf{K}$ (Para la determinación de $\mathbf{K}$ en función de los valores propios deseados de $\mathbf{A}_{lc}(\mathbf{K})$ consultar, por ejemplo Kautsky/Nichols, (1985) o Laub/Wette, (1984)):

$$\mathbf{K}=10^{-4}\begin{bmatrix}0&-0.0178&0&80&0\\0.0178&0&-0.2&0&80\end{bmatrix}^T\qquad(6.96)$$

se obtienen los siguientes valores propios de $\mathbf{A}_{lc}(\mathbf{K})$

$$\lambda_{1,2,3,4,5}=-0.0010,\ -0.0030,\ \ -0.0040,\ -0.0040+0.0017i,\ -0.0040-0.0017i \tag{6.97}$$

La Fig. 6.11 muestra el resultado de la autoalineación para la ganancia **K** establecida en (6.96) para un desalineamiento inicial $\boldsymbol{\phi}^g=[0.5,0.5,1]^T[^o]$. También se grafican las componentes de $\hat{\mathbf{V}}_H$ con el fin de mostrar que todas las componentes del vector de errores tienden asintóticamente a cero como esperado.

Cuando $\delta\boldsymbol{\mu}^g \neq 0$, la estabilidad asintótica del sistema realimentado (6.95) asegura que $\delta\dot{\mathbf{x}} \to 0$, pero no que $\delta\mathbf{x} \to 0$. Efectivamente, como es fácil comprobar en este caso, $\delta\mathbf{x}$ converge a:

$$\delta\mathbf{x}_\infty \triangleq -\mathbf{A}_{lc}^{-1}(\mathbf{K})\delta\boldsymbol{\mu}^g \tag{6.98}$$

Donde $\mathbf{A}_{lc}^{-1}(\mathbf{K})$ es la matriz de sensibilidad del error de alineación a los errores instrumentales. Despreciando el término de Coriolis, de las 2 últimas filas de la Ec. (6.95) en estado estacionario ($\delta\dot{\mathbf{x}}=0$) se obtienen los errores de nivelación límites en función de los sesgos acelerométricos:

$$\begin{aligned} \delta\dot{\hat{V}}_E &= 0 \Rightarrow \phi_N \approx \nabla_E/\gamma \\ \delta\dot{\hat{V}}_N &= 0 \Rightarrow \phi_E \approx -\nabla_N/\gamma \end{aligned} \tag{6.99}$$

De las Ecs. (6.99) resulta que, con resoluciones $|\nabla| \leq 100\mu g$ pueden obtenerse errores de nivelación $|\phi_N|,|\phi_E| \leq 10^{-4}[rad]$. Con estos valores y para las resoluciones giroscópicas usuales, resulta ser: $|\Omega_U\phi_N|,|\hat{V}_N/R_n| \ll \varepsilon_E$ por lo que, de la 1ª fila de la Ec. (6.95) se obtiene una estimación del límite inferior en la precisión de la determinación del azimut usando instrumentos inerciales (función de girocompás) en función de la resolución del giróscopo ε_E:

$$|\phi_U| \geq |\varepsilon_E|/\Omega_e\cos\Phi \tag{6.100}$$

Físicamente, la anterior debe interpretarse como el límite de la capacidad de medir con giróscopos la componente E de la velocidad angular terrestre, la cual, sólo tendrá un valor aparente diferente de cero si hay un error de azimut. Claramente, esta capacidad es nula en los polos y máxima en el Ecuador.

Finalmente, la Fig. 6.12 ilustra la evolución del error en los parámetros de navegación durante el proceso de alineación para un desalineamiento inicial de la plataforma analítica proyectado sobre la terna $\{\mathbf{g}\}$: $\boldsymbol{\phi}^g=[0.5,0.5,1][^o]$ y errores instrumentales ε^g=[1, 1, 1][gr/hr], ∇^g=[100, 100, 100][μg]. Como se advierte, en presencia de errores instrumentales el error de alineación estacionario no es nulo.

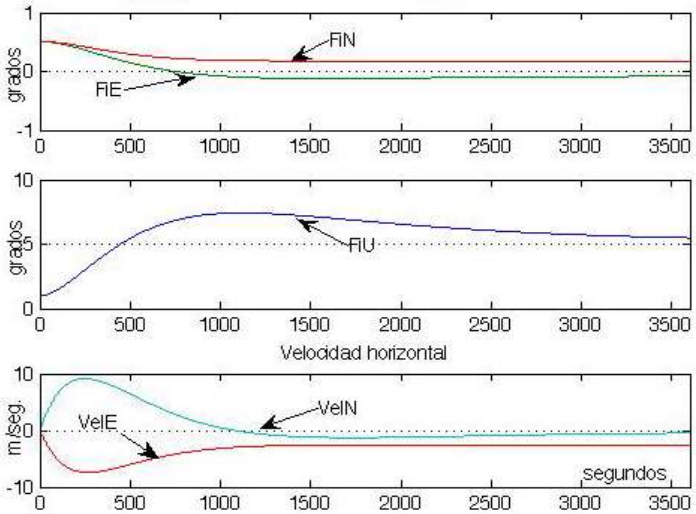


Figura 6.12: Alineación con errores instrumentales.

Capítulo 7
Algoritmos "Strapdown" de Navegación Inercial

Para determinar la posición, velocidad y actitud de un vehículo a partir de mediciones inerciales en configuración "strapdown" la computadora de navegación a bordo debe integrar en tiempo real las ecuaciones cinemáticas de la mecanización correspondiente. Los requerimientos en la capacidad de cómputo son impuestos tanto por la aplicación específica como por la dinámica del vehículo en la misión estipulada. Mientras más rápida sea la dinámica, más alta serán las tasas requeridas de actualización de los parámetros de navegación, de adquisición de datos y por ende, la velocidad de cómputo del algoritmo de navegación inercial.

De los capítulos anteriores, resulta claro que el conocimiento de la orientación instantánea del vehículo es crucial para proyectar adecuadamente las aceleraciones registradas por los acelerómetros sobre la terna de referencia (de navegación) en la que se describe la traslación. De otro modo, debido a la doble integración de las aceleraciones, pequeños errores de orientación se traducen en errores de posición que crecen polinomialmente con el tiempo. Esto confiere a la ecuación de Laning/Bortz (o de coneo) que describe la evolución de la orientación, un rol central en los métodos de navegación inercial. Este hecho y la complejidad inherente al carácter no lineal de dicha ecuación han hecho que el cálculo de la orientación tenga en la literatura un lugar preponderante.

Si bien es posible usar métodos de integración numérica generales estándar tales como Runge-Kutta, predictor corrector etc., se aprovecha mejor la capacidad de cómputo disponible con algoritmos adaptados a la estructura particular de las ecuaciones cinemáticas. Esta idea está en la base de una línea de investigación muy activa durante el pasado reciente, entre cuyos resultados mas significativos se destacan los trabajos pioneros de Savage, (1966), Jordan, (1969) y Bortz, (1971) y más recientemente, los trabajos de Savage (1998) partes I y II y Savage (2006) que consolidan la maduración del tema.

Aunque dinámicamente acoplados, los movimientos de rotación y traslación de un vehículo suelen desarrollarse en escalas de tiempo distintas. Una de las características más significativas de los algoritmos mencionados arriba es que permiten independizar la tasa de ejecución de los cálculos para las distintas dinámicas presentes lo cual permite reducir la carga computacional efectiva en tiempo real sin afectar la precisión.

Para muchos casos prácticos la terna de navegción usada es LGV. Esto comporta especiales cuidados en el cálculo de la rotación por transporte ya que cuando la terna geográfica varía rápidamente respecto de una terna inercial, las aproximaciones del algoritmo tienden a producir un crecimiento acelerado en el error de la posición. Esta situación, que puede presentarse aún en vehículos estacionados sobre la Tierra en fase de alineación (tener en cuenta que un punto sobre el ecuador se mueve a 1600Km/hr

respecto de una terna inercial) y resulta crítica en vehículos "veloces", como satélites, lanzadores satelitales, cohetes, etc. Por esta razón, en la primera parte de este Capítulo se desarrolla un algoritmo de navegación inercial referido a la terna LGV. En la segunda parte se muestra sin embargo que, adoptar la referencia ECEF no sólo simplifica considerablemente la formulación matemática, si no que además permite mejorar significativa la precisión en traslación, especialmente en vehículos rápidos, a la vez que reduce considerablemente la complejidad numérica del algoritmo de navegación.

La Fig. 7.1 es un esquema de la estructura clásica de un algoritmo de navegación inercial en tiempo real alojado en la computadora de navegación de un vehículo. El algoritmo toma como entradas los incrementos integrales vectoriales $\Delta\boldsymbol{\alpha}_l$ y $\Delta\mathbf{v}_l$ provistos por la electrónica asociada a los instrumentos inerciales: giróscopos y acelerómetros. La salida del algoritmo son los parámetros de navegación en la terna elegida y a la tasa requerida por la aplicación.

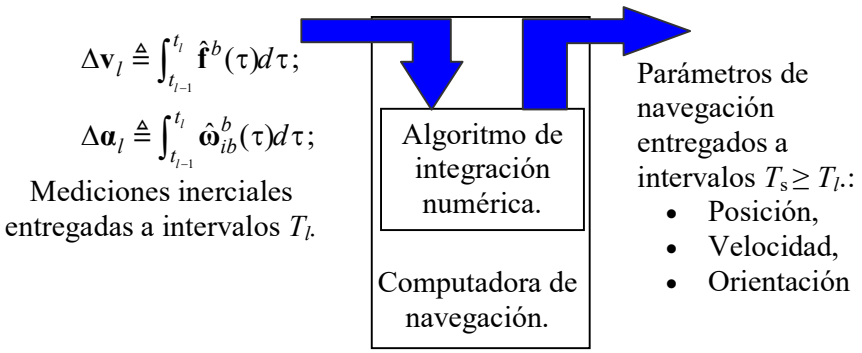


Figura 7.1: Entradas y salidas de un algoritmo de navegación inercial.

7.1 Integración numérica de las ecuaciones de navegación en terna LGV

En este apartado usaremos las ecuaciones de navegación en la forma **(5.33)** que rescribimos a continuación.

Ecuaciones de orientación:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{in}^n)\mathbf{C}_b^n \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}}_b^n = \frac{1}{2}\mathbf{q}_b^n \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{in}^n \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{q}_b^n \\ &\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \boldsymbol{\rho}^n + \boldsymbol{\Omega}_e^n = \boldsymbol{\rho}^n + \mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\Omega}_e^e \end{aligned} \tag{7.1}$$

Ecuaciones de traslación:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{V}}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^n - (2\boldsymbol{\Omega}_e^n + \rho^n) \times \mathbf{V}^n \quad ; \mathbf{V}^n(0) = \mathbf{V}_0^n \\ &\dot{h} = V_z^n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ; h(t_0) = h_0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

$$\dot{\mathbf{C}}_n^e = \mathbf{C}_n^e \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}^n) \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}}_n^e = \frac{1}{2}\mathbf{q}_n^e \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}^n \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

Como se menciona en el Párrafo 5.3, para trayectorias cercanas a la Tierra podrá ser suficiente usar el modelo de gravedad normal que en terna LGV resulta (ver Ec. **(5.32)**):

$$\mathbf{g}^n \approx \boldsymbol{\gamma}^n(\Phi, h) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{\gamma}_U(\Phi, h) \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

Donde $\hat{\gamma}_U(\Phi, h)$ representa la aproximación de Hofmann/Moritz (ver Párrafo 4.41 y Ec. **(4.45)**):

$$\hat{\gamma}_U(\Phi, h) \triangleq \gamma(\Phi)\left(1 - 2\left(1 + f + \frac{\Omega^2 a^2 b}{GM_T} - 2f\sin^2(\Phi)\right)\frac{h}{a} + 3\left(\frac{h}{a}\right)^2\right) \tag{7.5}$$

La relativa simplicidad de la expresión de $\boldsymbol{\gamma}^n$ en la terna LGV constituye una de las motivaciones más importantes para usar a ésta última como referencia. En aplicaciones de precisión, en lugar de la (7.4) podrá utilizarse la expresión corregida por las anomalías locales dada por la Ec. **(4.55)**.

Rotación por transporte:

$$\boldsymbol{\rho}^n = \mathcal{K}^n(\Phi, \alpha, h)\mathbf{V}^n + \mathbf{z}_n \rho_z^n; \quad \rho_z^n = \dot{\lambda}\,\mathrm{sen}(\Phi) + \dot{\alpha} \tag{7.6}$$

La anterior se corresponde con la expresión **(5.37)** y subsiguientes y depende de la mecanización elegida para la deriva de azimut cuyas versiones más usuales fueron indicadas en la Tabla 5.1. Por razones de claridad, en la mayor parte de lo que sigue usaremos la descripción de la orientación en términos de MCD, sin embargo, tal como fuera señalado en el Capítulo 3, en la práctica podrá preferirse la representación en cuaterniones por requerir actualizar menos coeficientes y aún asegurar mayor estabilidad numérica.

7.1.1 Notación

Siguiendo a Savage (1998), subdividimos los cálculos de la integración de las ecuaciones de navegación según tres cadencias. Esto permite agregar flexibilidad y aprovechar mejor la capacidad de cómputo instalada a bordo, teniendo en cuenta que en general las cinemáticas de orientación y de traslación evolucionan en escalas de tiempo muy distintas. En las cadencias más rápidas se ejecutan los cálculos más sencillos pero que requieren de mayor precisión en el tiempo. Estos cálculos están relacionados con la actualización de los parámetros de la orientación y de las componentes de alta frecuencia de la velocidad.

De acuerdo con la Fig. 7.2, distinguimos 3 períodos encastrados: un período corto: T_l , otro medio: T_m y un tercero largo: T_s. Estos períodos se supondrán vinculados mediante

los números enteros L y M de tal modo que: $T_s=MT_m$, $T_m=LT_l$. Para distinguir diferentes instantes e intervalos de tiempo introducimos la siguiente notación, también representada en la Fig. 7.2, para $j=0,...,M-1$, $i=0,...,L-1$ y k=0,…,HN (horizonte de navegación).

$$t_{k+1}=t_k+M\,T_m;\;\; t_{k,j}=t_k+j\,T_m;\;\; t_{k,j,i}=t_k+j\,T_m+i\,T_l \tag{7.7}$$

Notar en particular que: $t_{k,0}=t_k$; $t_{k,j,0}=t_{k,j}$; $t_{k,j,L}=t_{k,j+1}$; $t_{k,M}=t_{k+1}$. Cualquier variable dependiente del tiempo $v(t)$ evaluada en el instante $t_{k,j,i}$ se denotará indistintamente como $v(t_{k,j,i})$ *ó* $v_{k,j,i}$.

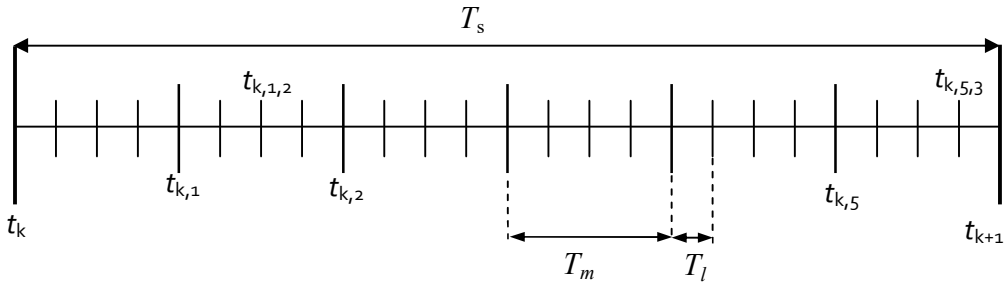


Figura 7.2: Períodos encastrados y notación de tiempos.

En lo que sigue se usarán las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
&\{\mathbf{b}(t_{k,j,i})\}\equiv\{\mathbf{b}(k,j,i)\}\text{: terna }\{\mathbf{b}\}\text{ en el instante }t_{k,j.i}\\
&\boldsymbol{\phi}^b_{k,j}(t)\text{: ángulo entre las ternas }\{\mathbf{b}(t_{k,j})\}\text{ y }\{\mathbf{b}(t)\}\text{ para }t\in[t_{k,j},t_{k,j}+T_m]\\
&\boldsymbol{\phi}^b_{k,j}(t_{k,j,i})=\boldsymbol{\phi}^b_{k,j:i}\text{: ángulo entre las ternas }\{\mathbf{b}(t_{k,j})\}\text{ y }\{\mathbf{b}(t_{k,j,i})\}\\
&\delta\boldsymbol{\phi}^b_{k,j,i}(t)\text{: ángulo entre las ternas }\{\mathbf{b}(t_{k,j,i})\}\text{ y }\{\mathbf{b}(t)\}\text{ para }t\in[t_{k,j,i},t_{k,j,i}+T_l]\\
&\boldsymbol{\phi}^b_{k,j}(t_{k,j+1})=\boldsymbol{\phi}^b_{k,j:j+1}\text{: ángulo entre las ternas }\{\mathbf{b}(t_{k,j})\}\text{ y }\{\mathbf{b}(t_{k,j+1})\}\\
&\boldsymbol{\theta}_k(t)\text{: ángulo entre las ternas }\{\mathbf{n}(t_k)\}\;y\;\{\mathbf{n}(t)\}\text{ para }t\in[t_k,t_k+T_s]\\
&\boldsymbol{\theta}_k(t_{k+1})=\boldsymbol{\theta}_{k:k+1}\text{: ángulo entre las ternas }\{\mathbf{n}(t_k)\}\;y\;\{\mathbf{n}(t_{k+1})\}\\
&\boldsymbol{\theta}_k(t_{k,j})=\boldsymbol{\theta}_{k:j}\text{: ángulo entre las ternas }\{\mathbf{n}(t_k)\}\;y\;\{\mathbf{n}(t_{k,j})\}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Donde $\boldsymbol{\phi}^b_{k,j}(t)$ y $\boldsymbol{\theta}_k(t)$ son, respectivamente, las soluciones en el instante t de las ecuaciones de Laning/Borz (ver Ec. **(3.98)** del apartado 3.8):

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)=\boldsymbol{\omega}^b_{ib}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}^b_{ib}+\frac{1}{\phi^2}\left[1-\frac{\phi\sin(\phi)}{2(1-\cos(\phi))}\right]\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}^b_{ib});\quad \boldsymbol{\phi}(t_{k,j})=0 \tag{7.9}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)=\boldsymbol{\omega}^n_{in}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega}^n_{in}+\frac{1}{\theta^2}\left[1-\frac{\theta\sin(\theta)}{2(1-\cos(\theta))}\right]\boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega}^n_{in});\quad \boldsymbol{\theta}(t_k)=0 \tag{7.10}$$

Como se advierte de la Ec. (7.9), $\boldsymbol{\phi}_{k,j}^{b}(t)$ depende de la velocidad angular del vehículo respecto de la terna inercial $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$ medida por los giróscopos, mientras que $\boldsymbol{\theta}_k(t)$ depende de la velocidad angular de la terna $\{\mathbf{n}\}$ respecto de la terna inercial: $\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} = \boldsymbol{\Omega}^n + \boldsymbol{\rho}^n$ (ver la expresión general **(5.37)** de $\boldsymbol{\rho}^n$ en el apartado 5.3.1).

En general, la integral entre los instantes $t_{k,j,i}$ y $t \geqslant t_{k,j,i}$ de una función integrable del tiempo $\dot{v}(t)$ se denotará:

$$\begin{aligned} v_{k,j,i}(t) &\triangleq \int_{t_{k,j,i}}^{t} \dot{v}(\lambda)d\lambda \\ v_{k,j,i}(t_{k,j,i+1}) &\triangleq v_{k,j,i:i+1} = \int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} \dot{v}(\lambda)d\lambda \end{aligned} \tag{7.11}$$

7.1.2 Integración de las ecuaciones de orientación.

En el instante t_{k+1} la MCD y el cuaternión que transforman las coordenadas de la terna del cuerpo $\{\mathbf{b}\}$ a la terna de navegación $\{\mathbf{n}\}$ pueden factorizarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{b(k+1)}^{n(k+1)} &= \mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)}\mathbf{C}_{b(k)}^{n(k)}\mathbf{C}_{b(k+1)}^{b(k)} \\ \mathbf{q}_{b(k+1)}^{n(k+1)} &= \mathbf{q}_{n(k)}^{n(k+1)}\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)}\mathbf{q}_{b(k+1)}^{b(k)} \end{aligned} \tag{7.12}$$

con lo cual es posible considerar en forma independiente la rotación inercial de la terna del cuerpo y la rotación de la terna de navegación. Esto adquiere especial significación en el cálculo que sigue dado que, usualmente, ambos movimientos se ejecutan en escalas de tiempo distintas. En efecto, un vehículo sub-atmosférico puede estar sometido a velocidades angulares inerciales de varios rad/seg (un cohete con estabilización por espinado axial puede llegar a varias decenas de rad/seg), mientras que la rotación por transporte de vehículos aun de muy alta velocidad, sumada a la velocidad angular de la Tierra, resulta en velocidadades angulares de la terna de navegación respecto de la inercial relativamente bajas (Ejemplo: para $\left|\mathbf{V}^n\right| \approx 10^4$ Km/hr resulta $\left|\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\right| \ll 0.01$ rad/seg.)

En consecuencia, la actualización de la MCD $\mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)}$ se calcula más lentamente a intervalos T_s en función del ángulo $\boldsymbol{\theta}_{k:k+1}^{n}$ mediante:

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)} = exp(\mathbf{S}(-\boldsymbol{\theta}_{k:k+1}^{n})) \Rightarrow \mathbf{C}_{n(k+1)}^{n(k)} = exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{k:k+1}^{n})), \text{ o bien:} \\ &\mathbf{q}_{n(k)}^{n(k+1)} = \begin{bmatrix} -\breve{\boldsymbol{\theta}}_{k:k+1}^{n}\sin(\theta_{k:k+1}^{n}/2) \\ \cos(\theta_{k:k+1}^{n}/2) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}_{n(k+1)}^{n(k)} = \left[\mathbf{q}_{n(k)}^{n(k+1)}\right]^* \end{aligned} \tag{7.13}$$

Por otra parte, la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{b(k+1)}^{b(k)} &= \mathbf{C}_{b(k,1)}^{b(k)}\mathbf{C}_{b(k,2)}^{b(k,1)}\cdots\mathbf{C}_{b(k+1)}^{b(k,M-1)}\\ \mathbf{q}_{b(k+1)}^{b(k)} &= \mathbf{q}_{b(k,1)}^{b(k)}\mathbf{q}_{b(k,2)}^{b(k,1)}\cdots\mathbf{q}_{b(k+1)}^{b(k,M-1)}\end{aligned} \tag{7.14}$$

permite actualizar la MCD $\mathbf{C}_{b(k+1)}^{b(k)}$ a intervalos más cortos en función del ángulo $\boldsymbol{\phi}_{k,j:j+1}^{b}$ (j=0 a M-1) rotado por la terna del vehículo respecto de la terna inercial en cada intervalo $T_{\mathrm{m}}=T_{\mathrm{s}}/\mathrm{M}$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}_{b(k,j+1)}^{b(k,j)} = exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}_{k,j:j+1}^{b})) \Rightarrow \mathbf{C}_{b(k,j)}^{b(k,j+1)} = exp(\mathbf{S}(-\boldsymbol{\phi}_{k,j:j+1}^{b})), \text{ o bien}\\ &\mathbf{q}_{b(k,j+1)}^{b(k,j)} = \begin{bmatrix}\breve{\boldsymbol{\phi}}_{k,j:j+1}^{b}\sin(\phi_{k.j:j+1}^{b}/2)\\ \cos(\phi_{k.j:j+1}^{b}/2)\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}_{b(k,j)}^{b(k,j+1)} = \left[\mathbf{q}_{b(k,j+1)}^{b(k,j)}\right]^{*}\end{aligned} \tag{7.15}$$

Una aproximación de la solución de la expresión (7.9):
Expandiendo en potencias de ϕ el factor del último término de la Ec. (7.9) se encuentra que:

$$\frac{1}{\phi^2}\left[1-\frac{\phi\sin(\phi)}{2(1-\cos(\phi))}\right] = \frac{1}{12}(1+\frac{1}{60}\phi^2+...) = \frac{1}{12}+O(\phi^2) \tag{7.16}$$

Dado que este factor pondera al término de 2° orden de la Ec. (7.9) se concluye que, a menos de errores de orden $O(\phi^4)$, el 2º miembro de esa ecuación diferencial resulta aproximable mediante:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) \approx \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \frac{1}{12}\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b});\;\; \boldsymbol{\phi}(t_{k,j}) = 0;\;\; t \geq t_{k,j} \tag{7.17}$$

Por otro lado, y dado que $\boldsymbol{\phi}(t_{k,j}) = 0$, para $\left|t-t_{k,j}\right|$ suficientemente pequeño el término que más contribuye a la solución $\boldsymbol{\phi}(t)$ de la (7.9) es el primero ($\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$) (lo mismo se vale respecto de la (7.17)). De este modo, para $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$ suficientemente suave resulta $\phi(t) \approx O(\left|t-t_{k,j}\right|)$ y $O(\phi^2) \approx O(\left|t-t_{k,j}\right|^2)$. Por consiguiente, en el mismo pequeño intervalo, la diferencia entre los 2º miembros de las Ecs. (7.9) y (7.17) es de orden $O(\left|t-t_{k,j}\right|^4)$ con lo cual el error entre la soluciones de las Ecs. (7.9) y (7.17) resulta de orden $O(\left|t-t_{k}\right|^5)$. Reescribimos la última como:

$$\boldsymbol{\phi}_{k,j}(t) \approx \int_{t_{k,j}}^{t}\left[\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \frac{1}{12}\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b})\right]d\lambda;\quad t \geq t_{k,j} \tag{7.18}$$

Si $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$ no rotase respecto de la terna $\{\mathbf{b}(t)\}$, en cuyo caso $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$ se mantiene paralela a $\boldsymbol{\phi}$ y los dos últimos térrminos de las (7.18) y (7.9) son nulos, la solución exacta de $\boldsymbol{\phi}_{k,j}(t)$ se podría calcular explícitamente por simple cuadratura integrando $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$. De lo contrario,

la Ec. (7.18) presenta, la complejidad inherente a toda integral implícita. Miller (1983) propone en estos casos usar la siguiente forma truncada de la (7.17):

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) \approx \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}; \;\; \boldsymbol{\phi}(t_{k,j}) = 0; \;\; t \geq t_{k,j}; \tag{7.19}$$

Por las razones comentadas más arriba, la falta del término de 2° orden de la Ec. (7.17) produce errores del orden $O(|t - t_k|^3)$ en las soluciones de la Ec. (7.19) respecto de la (7.18). Auque en muchos casos esto pueda representar en la práctica un grado aceptable de aproximación, de todos modos, la simplificación de Miller no evita tener que calcular la integral implícita (7.19).

Savage (1998, parte I) propone la siguiente reformulación de la (7.19):

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) \approx \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}; \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \boldsymbol{\phi}(t_{k,j}) = 0 \\ \boldsymbol{\alpha}(t_{k,j}) = 0 \end{array}; \;\; t \geq t_{k,j} \tag{7.20}$$

en la cual ambos 2° miembros son independientes de $\boldsymbol{\phi}(t)$ y por tanto pueden integrarse directamente por cuadratura. Pero, lo que hace aún más interesante a las (7.20) es el resultado de Savage (2006), obtenido usando la teoría de aproximaciones sucesivas de Picard de las soluciones de ecuaciones diferenciales (para la teoría de aproximaciones de Picard ver, p.e. Boyce/Diprima, 1997), según el cual los errores en las soluciones de la (7.20) son al menos de un orden inferior a los alcanzados por la aproximación de Miller (7.19) (ver los excelentes análisis de los errores derivados de estas aproximaciones para la dinámica de coneo en Ignagni, 1994 y para la combinación de las dinámicas de coneo y *sculling*, término que definiremos más abajo en Ignagni, 1998). Es decir, los errores en $\boldsymbol{\phi}(t)$ son ahora del orden $O(|t - t_k|^4)$! La selección del intervalo corto T_l dependerá de este pequeño error.

Cálculo del ángulo $\boldsymbol{\phi}_{k,j:j+1}^{b}$:

Con el resultado anterior y basándonos en Savage (1998, parte I), presentaremos a continuación el algoritmo digital propuesto de integración de la Ec. (7.20). Previamente introducimos la notación:

$$\boldsymbol{\alpha}_{k,j}(t) \triangleq \int_{t_{k,j}}^{t} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\lambda) d\lambda \tag{7.21}$$

$$\boldsymbol{\phi}_{k,j}(t) \approx \int_{t_{k,j}}^{t} (\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_{k,j}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau)) d\tau \; = \boldsymbol{\alpha}_{k,j}(t) + \boldsymbol{\beta}_{k,j}(t); \tag{7.22}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{k,j}(t) \triangleq \frac{1}{2}\int_{t_{k,j}}^{t} \boldsymbol{\alpha}_{k,j}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau) d\tau; \tag{7.23}$$

El término (7.23) es una corrección de 2º orden respecto de la aproximación de 1er orden dada por el ángulo integral $\boldsymbol{\alpha}_{k,j}(t)$. Como ya se mencionó esta corrección será nula sólo si $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\lambda)$ es no-rotante para $t \geq t_{k,j}$, razón por la cual el término $\boldsymbol{\beta}_{k,j}(t)$ es

denominado *corrección por coneo.* Las aproximaciones requeridas para el cálculo del término $\boldsymbol{\beta}_{k,j}(t)$ imponen subdividir el intervalo $[t_{k,j}, t_{k,j+1}]$ en L pequeños sub-intervalos de longitud T_l; con lo cual:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\beta}_{k,j}(t) = \boldsymbol{\beta}_{k,j,i} + \Delta\boldsymbol{\beta}_{k,j,i}(t); \\ &\Delta\boldsymbol{\beta}_{k,j,i}(t) \triangleq \frac{1}{2}\int_{t_{k,j,i}}^{t} \boldsymbol{\alpha}_{k,j}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau) d\tau \\ &\boldsymbol{\beta}_{k,j,i} = \frac{1}{2}\int_{t_{k,j}}^{t_{k,j,i}} \boldsymbol{\alpha}_{k,j}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau) d\tau \end{aligned}\right\} t_{k,j,i} \le t \le t_{k,j.i+1} \tag{7.24}$$

Análogamente con respecto del ángulo integral establecemos:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}_{k,j}(t) = \boldsymbol{\alpha}_{k,j,i} + \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}(t); \\ &\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}(t) \triangleq \int_{t_{k,j,i}}^{t} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau) d\tau; \\ &\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i} = \int_{t_{k,j}}^{t_{k,j,i}} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau) d\tau \end{aligned}\right\} t_{k,j,i} \le t \le t_{k,j.i+1} \tag{7.25}$$

Introduciendo las definiciones: $\Delta\boldsymbol{\beta}_{k,j,i+1} \triangleq \Delta\boldsymbol{\beta}_{k,j,i}(t_{k,j,i+1})$, $\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1} \triangleq \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}(t_{k,j,i+1})$, junto con las (7.24) y (7.25) se tiene:

$$\Delta\boldsymbol{\beta}_{k,j,i+1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i} \times \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1} + \frac{1}{2}\int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau) d\tau; \tag{7.26}$$

Para evaluar el último término de la Ec. (7.26), supondremos una variación lineal de $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$ respecto del tiempo a lo largo de dos intervalos consecutivos $[t_{k,j,i-1}, t_{k,j,i+1}]$. Esto equivale a la existencia para cada i=1,.. L-2 de vectores constantes $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ tales que:

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau) = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i(\tau - t_{k,j,i}); \;\; t_{k,j,i-1} \le \tau \le t_{k,j,i+1} \tag{7.27}$$

A partir de la anterior evaluamos los ángulos integrales consecutivos:

$$\begin{aligned} &\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1} \triangleq \int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau) d\tau = \int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} [\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i(\tau - t_{k,j,i})] d\tau = \mathbf{a}_i T_l + \frac{1}{2}\mathbf{b}_i T_l^2 \\ &\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i} \triangleq \int_{t_{k,j,i-1}}^{t_{k,j,i}} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau) d\tau = \mathbf{a}_i T_l - \frac{1}{2}\mathbf{b}_i T_l^2 \end{aligned} \tag{7.28}$$

En función de los cuales se obtienen las:

$$\mathbf{a}_i = \left(\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1} + \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}\right) / 2T_l; \;\; \mathbf{b}_i = \left(\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1} - \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}\right) / T_l^2 \tag{7.29}$$

que, junto con la (7.27), permiten calcular el 2º término de la (7.26) como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} \Delta\alpha_{k,j,i}(\lambda)\times\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\lambda)d\lambda &= \frac{1}{2}\int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} [\int_{t_{k,j,i}}^{\lambda} \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\tau)d\tau]\times\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\lambda)d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} [\mathbf{a}_i(\lambda - t_{k,j,i}) + \frac{1}{2}\mathbf{b}_i(\lambda - t_{k,j,i})^2]\times[\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i(\lambda - t_{k,j,i})]d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} [\mathbf{a}_i\times\mathbf{b}_i(\lambda - t_{k,j,i})^2 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_i\times\mathbf{a}_i(\lambda - t_{k,j,i})^2]d\lambda \\
&= \frac{1}{4}\mathbf{a}_i\times\mathbf{b}_i\left.\frac{(\lambda - t_{k,j,i})^3}{3}\right|_{t_{k,j,i+1}} = \frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}^{b}\times\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1}^{b}
\end{aligned} \tag{7.30}$$

Con lo cual la (7.26) resulta:

$$\Delta\boldsymbol{\beta}_{k,j,i+1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}\times\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1} + \frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}^{b}\times\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1}^{b} \tag{7.31}$$

Finalmente, de las (7.21) a la (7.31) se obtiene el algoritmo para el cálculo de $\boldsymbol{\phi}_{k,j:j+1}^{b}$:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\phi}_{k,j:0}^{b} = 0;\ \boldsymbol{\alpha}_{k,j,0} = 0;\ \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,0} = \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j-1,L} \\
&\textit{for i= 1:L,} \\
&\quad \textit{Adquirir la medida } \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i} \\
&\quad \boldsymbol{\alpha}_{k,j,i} = \boldsymbol{\alpha}_{k,j,i-1} + \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i} \\
&\quad \Delta\boldsymbol{\beta}_{k,j,i} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i-1}\times\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i} + \frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i-1}^{b}\times\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}^{b} \\
&\quad \boldsymbol{\phi}_{k,j:i}^{b} = \boldsymbol{\phi}_{k,j:i-1}^{b} + \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i} + \Delta\boldsymbol{\beta}_{k,j,i} \\
&\textit{end} \\
&\boldsymbol{\phi}_{k,j:L}^{b} = \boldsymbol{\phi}_{k,j:j+1}^{b}
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Este algoritmo es considerado de 2º orden dado que en la Ec. (7.31) aparecen productos de los ángulos integrales presente y pasado: $\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i-1}$ $\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}$ como consecuencia de haber supuesto una variación lineal $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\lambda)$ en dos intervalos consecutivos. El lector podrá comprobar que es posible obtener algoritmos de orden superior usando una expansión polinomial de grado mayor a uno para $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\lambda)$, lo cual conduce a una expresión de la corrección por coneo en función de ángulos integrales de dos o más períodos consecutivos pasados (un análisis generalizado que incluye algoritmos de orden superior a dos se presenta en Ignagni, 1998). Finalmente, destacamos que los ángulos integrales $\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}$ i=1,…,L pueden ser provistos directamente por la electrónica de adquisición de los giróscopos en cada intervalo de adquisición T_l lo cual tiene el beneficio suplementario de promediar el ruido de medición. En Carrizo J. (2019) se demuestra que de este modo, no sólo se evita usar un filtro "*antialias*", si no que además permite independizar la selección del ancho de banda útil de la señal (ejemplo

rechazando vibraciones mecánicas espurias) de las necesidades de la precisión numérica del algoritmo (selección del período T_l).

7.1.3 Integración de las ecuaciones de traslación.

Retomamos la ecuación (7.2) que reformulamos en su forma integral en terna $n(k)$ en el instante t_k, denotando con: $\mathbf{V}_k^{n(k)} = \mathbf{V}^{n(k)}(t_k)$

$$\mathbf{V}^{n(k)}(t) = \mathbf{V}_k^{n(k)} + \int_{t_k}^{t} \dot{\mathbf{V}}^{n(k)}(\lambda)d\lambda = \mathbf{V}_k^{n(k)} + \Delta\mathbf{V}_k^{n(k)}(t) \tag{7.33}$$

Introducimos a continuación las definiciones de los términos de "*gravedad*" ${}_g\mathbf{u}_k^{n(k)}(t)$; "*Coriolis*" ${}_c\mathbf{u}_k^{n(k)}(t)$ y "*fuerza específica*" ${}_f\mathbf{u}_k^{n(k)}(t)$ (todas referidas a la terna $\boldsymbol{n}(k)$):

$${}_g\mathbf{u}_k^{n(k)}(t) \triangleq \int_{t_k}^{t} \boldsymbol{\gamma}^{n(k)} d\tau \;\Rightarrow\; {}_g\mathbf{u}_{k+1}^{n(k)} \triangleq {}_g\mathbf{u}_k^{n(k)}(t_{k+1}) \tag{7.34}$$

$${}_c\mathbf{u}_k^{n(k)}(t) \triangleq -\int_{t_k}^{t} (2\boldsymbol{\Omega}_e^{n(k)} + \boldsymbol{\rho}^{n(k)}(\tau) \times \mathbf{V}^{n(k)}(\tau)d\tau \;\Rightarrow\; {}_c\mathbf{u}_{k+1}^{n(k)} \triangleq {}_c\mathbf{u}_k^{n(k)}(t_{k+1}) \tag{7.35}$$

$${}_f\mathbf{u}_k^{n(k)}(t) \triangleq \int_{t_k}^{t} \mathbf{C}_{b(\lambda)}^{n(k)}\mathbf{f}^b(\tau)d\tau \;\Rightarrow\; {}_f\mathbf{u}_{k+1}^{n(k)} \triangleq {}_f\mathbf{u}_k^{n(k)}(t_{k+1}) \tag{7.36}$$

mediante los cuales, la actualización de la Ec. (7.33) se escribe como:

$$\begin{aligned} &\Delta\mathbf{V}_k^{n(k)}(t) = {}_f\mathbf{u}_k^{n(k)}(t) + {}_g\mathbf{u}_k^{n(k)}(t) + {}_c\mathbf{u}_k^{n(k)}(t); \;\Rightarrow \\ &\Delta\mathbf{V}_{k+1}^{n(k)} \triangleq {}_f\mathbf{u}_{k+1}^{n(k)} + {}_g\mathbf{u}_{k+1}^{n(k)} + {}_c\mathbf{u}_{k+1}^{n(k)} \\ &\mathbf{V}_{k+1}^{n(k)} = \mathbf{V}_k^{n(k)} + \Delta\mathbf{V}_{k+1}^{n(k)} \end{aligned} \tag{7.37}$$

Cálculo del término de la fuerza específica

El término (7.36), relativo a la fuerza específica (propulsión/sustentación) medida en terna del cuerpo, puede, en vehículos ágiles, contener componentes de alta frecuencia y, por tanto, requerir, a la vez, de una alta tasa de cálculo y de un método de integración preciso. Para tener en cuenta esto, introducimos primeramente las definiciones ($t \in [t_{k,j}, t_{k,j+1}]$):

$$\begin{aligned} &{}_f\mathbf{u}_{k,j}^{n(k)} \triangleq {}_f\mathbf{u}_k^{n(k)}(t_{k,j}) = \int_{t_k}^{t_{k,j}} \mathbf{C}_{b(\lambda)}^{n(k)}\mathbf{f}^b(\tau)d\tau \\ &\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{n(k)}(t) \triangleq \int_{t_{k,j}}^{t} \mathbf{C}_{b(\lambda)}^{n(k)}\mathbf{f}^b(\lambda)d\lambda; \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j+1}^{n(k)} \triangleq \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{n(k)}(t_{k,j+1}) \end{aligned} \tag{7.38}$$

Descomponiendo el intervalo de integración de la Ec. (7.36), con las anteriores escribimos:

$${}_f\mathbf{u}_k^{n(k)}(t) = {}_f\mathbf{u}_{k,j}^{n(k)} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{n(k)}(t) \tag{7.39}$$

Ecuación que conduce a la siguiente iteración para calcular ${}_f\mathbf{u}_{k+1}^{n(k)}$:

$$\begin{aligned} {}_f\mathbf{u}_{k,0}^{n(k)} &= 0 \\ {}_f\mathbf{u}_{k,j+1}^{n(k)} &= {}_f\mathbf{u}_{k,j}^{n(k)} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j+1}^{n(k)};\ j = 1,...,.M-1 \\ {}_f\mathbf{u}_{k,M}^{n(k)} &= {}_f\mathbf{u}_{k+1}^{n(k)} \end{aligned} \tag{7.40}$$

Retomamos ahora el término $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{n(k)}(t)$ en la Ec. (7.38) que rescribimos como:

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{n(k)}(t) = \mathbf{C}_{b(k,j)}^{n(k)} \int_{t_{k,j}}^{t} \mathbf{C}_{b(\lambda)}^{b(k,j)} \mathbf{f}^b(\lambda) d\lambda = \mathbf{C}_{b(k,j)}^{n(k)} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{b(k,j)}(t) \tag{7.41}$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{b(k,j)}(t) \triangleq \int_{t_{k,j}}^{t} \mathbf{C}_{b(\lambda)}^{b(k,j)} \mathbf{f}^b(\lambda) d\lambda \tag{7.42}$$

En la primera se extrajo de la integral el término $\mathbf{C}_{b(k,j)}^{n(k)}$ que, por estar referido al inicio del intervalo de integración, es constante a lo largo del mismo. Cada uno de esos términos podrá actualizase como sigue en función de los ángulos $\boldsymbol{\phi}_{k,j-1:j}^{b}$ ya calculados mediante la iteración (7.32):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{b(k,0)}^{n(k)} &= \mathbf{C}_{b(k)}^{n(k)} \\ \mathbf{C}_{b(k,j)}^{b(k,j-1)} &= exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}_{k,j-1:j}^{b})); \\ \mathbf{C}_{b(k,j)}^{n(k)} &= \mathbf{C}_{b(k,j-1)}^{n(k)} \mathbf{C}_{b(k,j)}^{b(k,j-1)};\ j = 1,...,M \\ \mathbf{C}_{b(k+1)}^{n(k)} &= \mathbf{C}_{b(k,M)}^{n(k)} \end{aligned} \tag{7.43}$$

El resultado final de la iteración anterior: $\mathbf{C}_{b(k+1)}^{n(k)}$, junto $\mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)}$ (cuando esté disponible) y la Ec. (7.12) nos permitirán reiniciar un nuevo ciclo del cálculo de $\mathbf{C}_{b}^{n}$ a partir $\mathbf{C}_{b(k+1)}^{n(k+1)}$.

Para calcular el término $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{b(k,j)}(t)$ con $t \in [t_{k,j}, t_{k,j+1}]$ usamos la misma sub-partición de este intervalo que la empleada en las (7.24) a (7.32), de tal modo que para $t \in \left[t_{k,j,i}, t_{k,j,i+1}\right]$ la Ec. (7.42) se reescribe como:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{b(k,j)}(t) &= \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{b(k,j)}(t_{k,j,i}) + \mathbf{C}_{b(k,j,i)}^{b(k,j)} \boldsymbol{\upsilon}_{k,j,i}^{b(k,j,i)}(t) \\ \boldsymbol{\upsilon}_{k,j,i}^{b(k,j,i)}(t) &\triangleq \int_{t_{k,j,i}}^{t} \mathbf{C}_{b(\lambda)}^{b(k,j,i)} \mathbf{f}^b(\lambda) d\lambda \end{aligned}\right\} t \in \left[t_{k,j,i}, t_{k,j,i+1}\right] \tag{7.44}$$

Tal como en (7.42), se extrajo de la integral el término de la rotación referido al inicio del intervalo de integración. Para las rotaciones se usan las siguientes expresiones o sus respectivas aproximaciones de 1º orden:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{b(k,j,i)}^{b(k,j)} &= \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}_{k,j:i}^{b})) \approx \mathbf{I} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}_{k,j:i}^{b}) \\ \mathbf{C}_{b(\lambda)}^{b(k,j,i)} &= \exp(\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\phi}_{k,j,i}^{b}(\lambda)) \approx \mathbf{I} + \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\phi}_{k,j,i}^{b}(\lambda))\end{aligned} \tag{7.45}$$

Donde la primera es función de los pequeños ángulos calculados en cada paso de la iteración (7.32) (al final de cada intervalo T_l). A continuación procedemos a evaluar el término que surge de la Ec. (7.44):

$$\boldsymbol{\upsilon}_{k,j,i+1}^{b(k,j,i)} \triangleq \boldsymbol{\upsilon}_{k,j,i}^{b(k,j,i)}(t_{k,j,.i+1}) = \int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} \mathbf{C}_{b(\lambda)}^{b(k,j,i)} \mathbf{f}^{b}(\lambda) d\lambda;\ i = 1,...,L-1 \tag{7.46}$$

para lo cual, en primer lugar, supondremos que T_l es suficientemente pequeño como para considerar $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$ no rotante en cada intervalo, lo que nos permite escribir:

$$\left.\begin{aligned}\delta\dot{\boldsymbol{\phi}}_{k,j,i}^{b}(t) &\approx \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t) \\ \delta\boldsymbol{\phi}_{k,j,i}^{b}(t) &\approx \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}(t);\end{aligned}\right\}\ t \in [t_{k,j,i}, t_{k,j,i+1}] \tag{7.47}$$

Luego, usando la 2ª de las aproximaciones (7.45), válida para $\left|\delta\boldsymbol{\phi}_{k,j,i}^{b}(t)\right| \ll 1$ dentro de un intervalo T_l, se tiene:

$$\mathbf{C}_{b(\lambda)}^{b(k,j,i)} = \exp(\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\phi}_{k,j,i}^{b}(\lambda)) \approx I + \mathbf{S}(\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}(\lambda));\quad \forall\lambda \in [t_{k,j,i}, t_{k,j,i+1}] \tag{7.48}$$

Introducimos ahora las definiciones:

$$\Delta\mathbf{v}_{k,j,i}(t) \triangleq \int_{t_{k,j,i}}^{t} \mathbf{f}^{b}(\lambda) d\lambda \ \Rightarrow \Delta\dot{\mathbf{v}}_{k,j,i}(t) = \mathbf{f}^{b}(t);\quad \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} = \int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} \mathbf{f}^{b}(\lambda) d\lambda \tag{7.49}$$

que sustituimos junto con la (7.48) en la (7.46) para obtener:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\upsilon}_{k,j,i+1}^{b(k,j,i)} &\approx \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} + \int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}(\lambda) \times \mathbf{f}^{b}(\lambda) d\lambda \\ &= \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} + \int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}(\lambda) \times \Delta\dot{\mathbf{v}}_{k,j,i}(\lambda) d\lambda\end{aligned} \tag{7.50}$$

Integrando por partes el último término de la Ec. (7.50) se llega a:

$$\begin{aligned}&\int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}(\lambda) \times \Delta\dot{\mathbf{v}}_{k,j,i}(\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1} \times \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} + \frac{1}{2}\int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} \left(\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}(\lambda) \times \mathbf{f}^{b}(\lambda) + \Delta\mathbf{v}_{k,j,i}(\lambda) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(\lambda)\right) d\lambda\end{aligned} \tag{7.51}$$

Lo que permite descomponer el aporte de la propulsión a lo largo del intervalo $[t_{k,j,i}, t_{k,j,i+1}]$ según la terna $\{\mathbf{b}(k,j,i)\}$, dado por la (7.50), según los términos siguientes:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\upsilon}_{k,j,i+1}^{b(k,j,i)} &\approx \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} + \Delta\mathbf{v}_{rtk,j,i+1} + \Delta\mathbf{v}_{sck,j,i+1} \\
\Delta\mathbf{v}_{rtk,j,i+1} &\triangleq \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1} \times \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} \\
\Delta\mathbf{v}_{sck,j,i+1} &\triangleq \frac{1}{2}\int_{t_{k,j,i}}^{t_{k,j,i+1}} \left(\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}(\lambda)\times\mathbf{f}^b(\lambda) + \Delta\mathbf{v}_{k,j,i}(\lambda)\times\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(\lambda)\right)d\lambda
\end{aligned} \tag{7.52}$$

Analizamos a continuación el significado de cada uno de estos términos. La variación integral de la fuerza específica en un intervalo T_l: $\Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1}$ corresponde al incremento de la velocidad del vehículo en ausencia de rotación de la terna del cuerpo. Los otros términos son productos de variaciones integrales de ambas magnitudes inerciales y por lo tanto son correcciones de 2º orden respecto del primero. Cuando a lo largo de T_l ocurre una rotación de la terna del vehículo respecto de la terna inercial, $\Delta\mathbf{v}_{rtk,j,i+1}$ corrige la impulsión $\Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1}$ debido al cambio de orientación de la terna $\{\mathbf{b}\}$ (el producto vectorial proyecta $\Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1}$ sobre los ejes actuales de $\{\mathbf{b}\}$). A esto debe este término el nombre de *corrección por rotación*. El término $\Delta\mathbf{v}_{sck,j,i+1}$ merece un análisis más detallado. Cuando en el intervalo T_l puedan despreciarse las variaciones tanto de la fuerza específica como de la velocidad angular ($\mathbf{f}^b \approx const.$ y $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \approx const.$) se tendrá (ver definiciones (7.25) y (7.49)):

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}(\lambda) &\approx \boldsymbol{\omega}_{ib}^b\big|_{t_{k,j,i}}(\lambda - t_{k,j,i}) \\
\Delta\mathbf{v}_{k,j,i}(\lambda) &\approx \mathbf{f}^b\big|_{t_{k,j,i}}(\lambda - t_{k,j,i})
\end{aligned} \tag{7.53}$$

de donde, sustituyendo en la última de las (7.52), surge claramente para este caso que el integrando del término $\Delta\mathbf{v}_{sck,j,i+1}$ resultará despreciable y por tanto:

$$\boldsymbol{\upsilon}_{k,j,i+1}^{b(k,j,i)} \approx \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1} \times \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} \tag{7.54}$$

De este resultado extraemos como primera conclusión que el término $\Delta\mathbf{v}_{rtk,j,i+1}$ predomina en bajas frecuencias mientras que el término integral $\Delta\mathbf{v}_{sck,j,i+1}$ constituye una corrección de alta frecuencia del incremento de la velocidad debido a la propulsión. Más aún, este último término refleja ciertos efectos dinámicos combinados de $\mathbf{f}^b(\lambda)$ y $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(\lambda)$ promediados a lo largo de T_l y proyectados sobre la terna $\{\mathbf{b}(k,j,i)\}$ que son de interés destacar. Como es fácil constatar a partir de las definiciones (7.25), (7.49) y (7.52), si $\mathbf{f}^b(\lambda)$ y $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(\lambda)$ fuesen paralelas a lo largo de T_l, este término se anularía. Por otra parte, a magnitudes iguales, su contribución a la propulsión se maximiza cuando ambos vectores permanecen ortogonales entre sí en el mismo intervalo. Este efecto es el que explica el impulso que imprime un remero a una embarcación con un único remo (la góndola es el ejemplo clásico) mediante un movimiento ondulante del mismo y es conocido por su nombre náutico en inglés *"sculling"*. Por esta razón, el término $\Delta\mathbf{v}_{sck,j,i+1}$ es denotado en la literatura inglesa como *corrección por sculling* (Savage 1998 parte II) lo cual podría traducirse al Castellano como "*corrección por gondoleo"*.

Para evaluar la corrección por *gondoleo* procedemos en forma similar al cálculo de la integral (7.30) suponiendo, junto con la existencia de los vectores $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ que satisfacen la Ec. (7.27), la existencia de los vectores constantes $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{d}_i$ que satisfacen:

$$\mathbf{f}^b(\tau) = \mathbf{c}_i + \mathbf{d}_i(\tau - t_{k,j,i}); \quad t_{k,j,i-1} \le \tau \le t_{k,j,i+1} \tag{7.55}$$

Lo que implica suponer una variación lineal con el tiempo de ambas magnitudes inerciales en coordenadas del cuerpo. Sustituyendo las (7.27) y (7.55) respectivamente en las (7.25) y (7.49) se obtienen, además de las (7.28), las siguientes relaciones con los incrementos integrales de la fuerza específica:

$$\Delta\mathbf{v}_{k,j,i} = \mathbf{c}_i T_l - \frac{1}{2}\mathbf{d}_i T_l^2; \quad \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} = \mathbf{c}_i T_l + \frac{1}{2}\mathbf{d}_i T_l^2 \tag{7.56}$$

Si a continuación se sustituyen las (7.27), (7.28), (7.55) y (7.56) en la expresión de $\Delta\mathbf{v}_{sck,j,i+1}$ (Ec. (7.52)) después de algunas manipulaciones similares a las que conducen a la (7.30) se obtiene:

$$\Delta\mathbf{v}_{sck,j,i+1} = \frac{1}{12}[\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i} \times \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} + \Delta\mathbf{v}_{k,j,i} \times \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1}] \tag{7.57}$$

A partir de las expresiones (7.44), (7.45), (7.52), (7.57) es posible calcular el término $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j+1}^{n(k)}$ requerido en cada paso de la iteración (7.40) (al final de cada intervalo T_m), mediante el siguiente algoritmo que procesa las magnitudes integrales $\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i}$ y $\Delta\mathbf{v}_{k,j,i}$ enviadas a la más alta frecuencia desde la electrónica de los sensores inerciales:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{b(k,j)}(t_{k,j,0}) = 0; \ \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,0} = \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j-i,L}; \ \Delta\mathbf{v}_{k,j,0} = \Delta\mathbf{v}_{k,j-1,L} \\
&\textit{for } \text{i= 0 : } L\text{-1}, \\
&\quad \textit{Adquirir medidas } \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1} \textit{ y } \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} \\
&\quad \boldsymbol{\upsilon}_{k,j,i+1}^{b(k,j,i)} = \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1} \times \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} + \frac{1}{12}[\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i} \times \Delta\mathbf{v}_{k,j,i+1} + \Delta\mathbf{v}_{k,j,i} \times \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k,j,i+1}] \\
&\quad \mathbf{C}_{b(k,j,i)}^{b(k,j)} = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}_{k,j:i}^{b})) \approx \mathbf{I} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}_{k,j:i}^{b}) \\
&\quad \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{b(k,j)}(t_{k,j,i+1}) = \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{b(k,j)}(t_{k,j,i}) + \mathbf{C}_{b(k,j,i)}^{b(k,j)}\boldsymbol{\upsilon}_{k,j,i+1}^{b(k,j,i)} \\
&\textit{end} \\
&\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j}^{b(k,j)}(t_{k,j,L}) = \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j+1}^{b(k,j)} \\
&\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j+1}^{n(k)} = \mathbf{C}_{b(k,j)}^{n(k)}\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{k,j+1}^{b(k,j)}
\end{aligned} \tag{7.58}$$

Imbricando el pseudo-código (7.58) en el (7.40) se obtiene finalmente un procedimiento para calcular el término de la fuerza específica en la Ec. (7.37).

Cálculo de los términos de gravedad y Coriolis

En vehiculos no espaciales, la posición, la gravedad (dependiente fundamentalmente de la altura), la velocidad, la rotación de transporte y, consiguientemete, la aceleración por

Coriolis son funciones diferenciables (suaves) del tiempo y por tanto aproximables por su valor medio en un intervalo de integración T_s elegido lo suficientemte pequeño.

Bajo estas condiciones se justifica reunir los términos de *gravedad* y *Coriolis* en un solo término ${}_{gc}\mathbf{u}_{k+1}^{n(k)}$ aproximado mediante la siguiente formula de los trapecios*:

$$ {}_{gc}\mathbf{u}_{k+1}^{n(k)} \approx (T_s/2)\left[\left(\hat{\mathbf{g}}_{k+1}^{n(k)} - (2\boldsymbol{\Omega}_e^{n(k)} + \hat{\boldsymbol{\rho}}_{k+1}^{n(k)}) \times \hat{\mathbf{V}}_{k+1}^{n(k)}\right) + \left(\mathbf{g}^{n(k)}(\Phi_k, h_k) - (2\boldsymbol{\Omega}_e^{n(k)} + \boldsymbol{\rho}_k^{n(k)}) \times \mathbf{V}_k^{n(k)}\right)\right] \quad (7.59)$$

En la anterior, además de los valores conocidos en t_k: Φ_k, $\mathbf{V}_k^{n(k)}$, $\dot{\mathbf{V}}_k^{n(k)}$, $\boldsymbol{\rho}_k^{n(k)}$ y $\mathcal{K}^{n(k)}$, se usan las "predicciones":

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{V}}_{k+1}^{n(k)} &= \mathbf{V}_k^{n(k)} + \dot{\mathbf{V}}_k^{n(k)} T_s; \\
\hat{h}_{k+1} &= h_k + \frac{T_s}{2}\left(\hat{\mathbf{V}}_{k+1}^{n(k)} + \mathbf{V}_k^{n(k)}\right) \bullet \breve{\mathbf{z}} \\
\hat{\boldsymbol{\rho}}_{k+1}^{n(k)} &= \mathcal{K}^n(\Phi_k, \alpha_k, \hat{h}_{k+1}) \hat{\mathbf{V}}_{k+1}^{n(k)} + \mathbf{z}_n \boldsymbol{\rho}_z^{n(k)}(t_k) \\
\hat{\mathbf{g}}_{k+1}^{n(k)} &= \mathbf{g}^{n(k)}(\Phi_k, \hat{h}_{k+1})
\end{aligned} \quad (7.60)$$

denotadas con "^" para destacar que sus valores no son aún los definitivos que serán determinados según se indica en el siguiente párrafo.

Actualización de la velocidad en t_{k+1}:
Luego de calcular la Ec. (7.59) junto con el resultado de ejecutar el algoritmo (7.40) se calcula la velocidad $\mathbf{V}_{k+1}^{n(k)}$ en t_{k+1} mediante las Ecs. (7.37). Si es necesario, éste último valor podrá reintroducirse en las Ecs. (7.59) y (7.60) iterando los cálculos de ${}_{gc}\mathbf{u}_{k+1}^{n(k)}$ y de $\mathbf{V}_{k+1}^{n(k)}$ hasta lograr la aproximación deseada.

Destacamos sin embargo que $\mathbf{V}_{k+1}^{n(k)}$ deberá aún ser proyectada sobre la terna $\mathbf{n}(k+1)$ una vez que $\mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)}$ esté disponible, mediante:

$$\mathbf{V}_{k+1}^{n(k+1)} = \mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)} \mathbf{V}_{k+1}^{n(k)} \quad (7.61)$$

Actualización de la posición:
La posición del vehículo relativa al elipsoide normal queda determinada por su altura h y por $\mathbf{C}_n^e$ (también $\mathbf{q}_n^e$ o, equivalentemente, las coordenadas curvilíneas Φ, λ junto con el ángulo de deriva α) solución de las ecuaciones cinemáticas:

*Más cuidado deberá tenerse en los casos de cohetes zonda o de lanzadores satelitales.

$$\begin{aligned}
&\dot{h} = V_z^n = \mathbf{z}^n \bullet \mathbf{V}^n \\
&\dot{\mathbf{C}}_n^e = \mathbf{C}_n^e \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}^n) \\
&\boldsymbol{\rho}^n = \mathcal{K}^n(\Phi\,,\,\alpha, h)\mathbf{V}^n + \mathbf{z}_n \rho_z^n; \quad \rho_z^n = \dot{\lambda}\,\mathrm{sen}(\Phi) + \dot{\alpha}
\end{aligned} \tag{7.62}$$

En caso de utilizarse un filtro estabilizador del canal vertical, deberá agregarse a la primera de las (7.62) el término correspondiente que fuera introducido en el Párrafo 5.4.1. Primeramente, usando la componente "z" de la velocidad calculada según el párrafo anterior y la Ec. (7.37), actualizamos la altura mediante:

$$\begin{aligned}
&h_{k+1} = h_k + \Delta h_{k+1}; \\
&\Delta h_{k+1} \triangleq \int_{t_k}^{t_{k+1}} V_z^n(\lambda)\, d\lambda \approx \frac{V_z^n(t_k) + V_z^n(t_{k+1})}{2} T_s
\end{aligned} \tag{7.63}$$

Por su parte, para calcular la matriz $\mathbf{C}_{n(k+1)}^e$ en función de $\mathbf{C}_{n(k)}^e$ se requiere conocer el ángulo vectorial $\boldsymbol{\vartheta}_{k+1}$, rotado por la terna $\{\mathbf{n}\}$ en $[t_k, t_{k+1}]$ respecto de $\{\mathbf{e}\}$, impulsado por la velocidad angular $\boldsymbol{\rho}^n$ y solución, en ese intervalo, de una ecuación de Laning/Bortz del tipo de las (7.9) y (7.10). Para vehículos no espaciales y valores usuales de T_s, el vector de rotación $\boldsymbol{\vartheta}_{k+1}$ resulta en la práctica lo suficientemente pequeño* como para suponerlo *paralelo a* $\boldsymbol{\rho}^n$ en dicho intervalo. Esto permite aproximar su evolución mediante el primer término de la ecuación de Laning/Bortz:

$$\boldsymbol{\vartheta}_{k+1}^{n(k)} = \int_{t_k}^{t_k+T_s} \boldsymbol{\rho}^{n(k)}(\lambda)\, d\lambda \approx \left[\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k+1}^{n(k)} + \boldsymbol{\rho}_k^{n(k)}\right]\frac{T_s}{2} \tag{7.64}$$

Las mismas condiciones de suavidad invocadas más arriba para la velocidad vertical y rotación por transporte justifican las integraciones por trapecios usadas en (7.63) y (7.64)†.

En las siguientes $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k+1}^{n(k)}$ es una predicción que en este caso se calcula usando el valor ya actualizado de la velocidad $\mathbf{V}_{k+1}^{n(k)}$:

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{k+1} = \boldsymbol{\rho}_k^{n(k)} T_s \\
&\hat{\mathbf{C}}_{n(k+1)}^e = \mathbf{C}_{n(k)}^e \exp(\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{k+1})) \;\Rightarrow\; \hat{\Phi}_{k+1}, \hat{\lambda}_{k+1}, \hat{\alpha}_{k+1} \\
&\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k+1}^{n(k)} = \mathcal{K}^{n(k)}(\hat{\Phi}_{k+1}\,,\,\hat{\alpha}_{k+1}, h_{k+1})\mathbf{V}_{k+1}^{n(k)} + \mathbf{z}_n \boldsymbol{\rho}_{k,z}^{n(k)}
\end{aligned} \tag{7.65}$$

Se destaca, en primer lugar, la necesidad del paso intermedio en las Ecs. (7.65) para calcular los valores (no definitivos) de $\hat{\Phi}_{k+1}$ y $\hat{\alpha}_{k+1}$ que, junto con h_{k+1}, son argumentos

---

* Para la velocidad orbital terrestre (ground speed) $\simeq$7Km/seg y T_s <0.1 seg, $\|\boldsymbol{\vartheta}\| \ll 0.01$[rad].

† Savage (1998 II, secc. IV-C) propone un método de mayor precisión y complejidad numérica para estos cálculos.

del tensor de curvatura $\mathcal{K}^{n(k)}$ requerido en la última ecuación para determinar las componentes horizontales de $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k+1}^{n(k)}$. También, que ésta última está expresada en terna $\mathbf{n}(k)$ y, finalmente, que su componente vertical es ña calculada al final del ciclo anterior.

Con $\boldsymbol{\vartheta}_{k+1}$ calculado con la Ec. (7.64), las siguientes ecuaciones permiten evaluar $\mathbf{C}_{n(k+1)}^{e}$ y, a partir de ésta, las coordenadas curvilíneas en t_{k+1}:

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}_{n(k+1)}^{e} = \mathbf{C}_{n(k)}^{e} \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\vartheta}_{k+1})) \\ &\mathbf{C}_{n(k+1)}^{e} \Rightarrow \boldsymbol{\Phi}_{k+1}, \lambda_{k+1}, \alpha_{k+1} \end{aligned} \tag{7.66}$$

De requerirse mayor precisión en el cálculo de estas últimas podrán iterarse las Ecs. (7.64), (7.65) y (7.66).

Cálculo de $\mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)}$

Resta por evaluar la transformación de coordenadas usada en la Ec. (7.61) que permite re-expresar la velocidad según la terna de navegación actualizada al instante t_{k+1}. Una vez más, vistos los valores usuales de T_s, es posible considerar el vector de rotación angular $\boldsymbol{\theta}_{k:k+1}^{n}$ de la terna $\{\mathbf{n}\}$ colineal con $\boldsymbol{\omega}_{in}^{n(k)}$ y a ésta aproximadamente lineal con el tiempo en cada intervalo T_s. Esto justifica, en primera aproximación, el cálculo:

$$\boldsymbol{\theta}_{k:k+1}^{n} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\omega}_{in}^{n(k)}(\tau) d\tau \approx \frac{\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^{n(k)}(t_{k+1}) + \boldsymbol{\omega}_{in}^{n(k)}(t_k)}{2} T_s \tag{7.67}$$

Aquí, la predicción $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^{n(k)}(t_{k+1})$ se evalúa mediante:

$$\begin{aligned} &\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^{n(k)}(t_{k+1}) = \boldsymbol{\Omega}_{e}^{n(k)} + \hat{\hat{\boldsymbol{\rho}}}^{n(k)}(t_{k+1}) \\ &\hat{\hat{\boldsymbol{\rho}}}^{n(k)}(t_{k+1}) \triangleq \mathcal{K}^{n(k)}(\Phi_{k+1}, \boldsymbol{\alpha}_{k+1}, h_{k+1})) \mathbf{V}_{k+1}^{n(k)} + \mathbf{z}_n \boldsymbol{\rho}_z^{n(k)}(t_k) \end{aligned} \tag{7.68}$$

En la cual se usan los valores determinados previamente para $\Phi_{k+1}, \alpha_{k+1}, h_{k+1}$ (Ecs. (7.63) y (7.66)) y para la velocidad $\mathbf{V}_{k+1}^{n(k)}$ (Ec. (7.37) y subsiguientes). Se usa $\hat{\hat{\boldsymbol{\rho}}}$ para distinguirla de su valor definitivo calculado más adelante incluyendo la actualización de su componente vertical.

$\mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1}$ se calcula mediante la siguiente expresión:.

$$\mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)} = exp(\mathbf{S}(-\boldsymbol{\theta}_{k:k+1}^{n})) \; (\approx I - \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_{k:k+1}^{n}); \left|\boldsymbol{\theta}_{k:k+1}^{n}\right| \ll 1) \tag{7.69}$$

Proyección de las variables sobre la terna *n*(*k*+1)

La expresión anterior junto con la (7.61) nos permite referir las velocidades a la terna $\boldsymbol{n}(k+1)$ y recalcular h_{k+1} y Δh_{k+1} de la Ec. (7.63) usando las expresiones:

$$\Delta h_{k+1} \approx \left.\frac{\mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)}\mathbf{V}_{k}^{n(k)} + \mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)}\mathbf{V}_{k+1}^{n(k)}}{2}\right|_{z} T_s$$
$$h_{k+1} = h_k + \Delta h_{k+1} \tag{7.70}$$

Con lo cual será posible actualizar la matriz de rotación desde el cuerpo a la plataforma analítica (en el Capítulo 6 (Fig. 6.5) se estableció la notación equivalente $\mathbf{C}_b^{\hat{n}}(k+1) = \mathbf{C}_b^p(k+1)$):

$$\mathbf{C}_b^p(k+1) = \mathbf{C}_{n(k)}^{n(k+1)}\mathbf{C}_b^p(k)\mathbf{C}_{b(k+1)}^{b(k)} \tag{7.71}$$

Finalmente, antes de iniciar el siguiente período de integración T_s de las Ecs. (7.1) a (7.3) se actualiza la rotación por transporte en el instante t_{k+1}

$$\boldsymbol{\rho}_z^{n(k+1)}(t_{k+1}) = \frac{V_E(t_{k+1})}{R_p(t_{k+1})}\sin\Phi(t_{k+1}) + \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_{k+1})$$
$$\boldsymbol{\rho}^{n(k+1)}(t_{k+1}) \triangleq \mathcal{K}^{n(k+1)}(\Phi_{k+1}, \alpha_{k+1}, h_{k+1}))\,\mathbf{V}_{k+1}^{n(k+1)}\Big|_H + \mathbf{z}_n\boldsymbol{\rho}_z^{n(k+1)}(t_{k+1}) \tag{7.72}$$

7.2 Integración numérica de las ecuaciones de navegación en terna ECEF

Cuando en las ecuaciones (7.1) y (7.2) se impone $\boldsymbol{n}\equiv\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\rho}^e = 0$ la ecuación de orientación resulta:

$$\dot{\mathbf{C}}_b^e = \mathbf{C}_b^e\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e)\mathbf{C}_b^e;\ \boldsymbol{\omega}_{ie}^e = \boldsymbol{\Omega}_e^e$$
$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_e^e) = \Omega_e^e\mathbf{S}(\mathbf{e}_z);\ \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T;\ \Omega_e^e = |\boldsymbol{\Omega}_e^e| \tag{7.73}$$
$$\Leftrightarrow\quad \dot{\mathbf{q}}_b^e = \frac{1}{2}\mathbf{q}_b^e\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\\ 0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_e^e\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{q}_b^e$$

y para las de traslación se tiene *:

$$\dot{\mathbf{V}}^e = \mathbf{C}_b^e\mathbf{f}^b + \boldsymbol{\gamma}^e - 2\boldsymbol{\Omega}_e^e \times \mathbf{V}^e \quad ;\ \mathbf{V}^e(0) = \mathbf{V}_0^e$$
$$\dot{\mathbf{P}}^e = \mathbf{V}^e \tag{7.74}$$

Como se advierte, la inexistencia de rotación de transporte conduce a ecuaciones cinemáticas más simples que las ecuaciones (7.1) y (7.2). En particular, la ecuación de orientación resulta desacoplada de la de traslación y el término de Coriolis en la (7.74) es lineal en la velocidad. Aunque en este caso el modelo de la gravedad normal no tiene una forma tan sencilla como la (7.4), es posible utilizar alguna de sus expresiones explicitas en coordenadas ECEF dadas por las ecuaciones **(4.48)** ó **(4.51)**.

*Para simplificar la exposición supondremos el modelo normal de gravedad, pero todo lo que sigue se extiende sin dificultad a cualquier otro modelo de gravedad.

7.2.1 Integración de las ecuaciones de orientación.

Con la notación definida en el Párrafo 7.1.1, tal como en la (7.12), usamos la descomposición:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{b(k+1)}^{e(k+1)} &= \mathbf{C}_{e(k)}^{e(k+1)}\mathbf{C}_{b(k)}^{e(k)}\mathbf{C}_{b(k+1)}^{b(k)} \\ \mathbf{q}_{b(k+1)}^{e(k+1)} &= \mathbf{q}_{e(k)}^{e(k+1)}\mathbf{q}_{b(k)}^{e(k)}\mathbf{q}_{b(k+1)}^{b(k)} \end{aligned} \tag{7.75}$$

Dado que ahora $\mathbf{\Omega}_e^e$ es constante, la rotación de la terna de referencia **e** respecto de la ECI en un periodo T_s esta dada por $\boldsymbol{\theta}_{k:k+1}^e = T_s\mathbf{\Omega}_e^e$ (comparar con las (7.67) y (7.68)). Así, la expresión (7.69) (y su versión en cuaternión) resulta para este caso en la matriz constante:

$$\mathbf{C}_{e(k)}^{e(k+1)} = exp(\mathbf{S}(-T_s\mathbf{\Omega}_e^e)); \quad \mathbf{q}_{e(k)}^{e(k+1)} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_z \sin(T_s\Omega_e^e/2) \\ \cos(T_s\Omega_e^e/2) \end{bmatrix}; \tag{7.76}$$

Notar que en esta formulación la rotación de la terna de referencia puede calcularse en forma exacta evitando las aproximaciones (7.67) a (7.69). Por su parte, el factor $\mathbf{C}_{b(k+1)}^{b(k)} = exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}_{k,j:j+1}^b))$, correspondiente a la rotación inercial del vehículo, se actualiza del mismo modo que para la terna LGV (ver pseudocódigo (7.32)).

7.2.2 Integración de las ecuaciones de traslación.*

Introduciendo la notación:

$$\mathbf{X}^e \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{P}^e \\ \mathbf{V}^e \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{X}}^e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}^e \\ \dot{\mathbf{V}}^e \end{bmatrix}; \tag{7.77}$$

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ 0 & -2S(\mathbf{\Omega}^e) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6x6}; \; \mathbf{w}^e(t) \triangleq \boldsymbol{\gamma}^e(\mathbf{P}^e(t)) + \mathbf{C}_b^e\mathbf{f}^b(t) \in \mathbb{R}^3 \tag{7.78}$$

las ecuaciones de traslación (7.74) se agrupan en la siguiente ecuación de estado:

$$\dot{\mathbf{X}}^e = \mathbf{A}\mathbf{X}^e + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w}^e(t) \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{X}^e(t_k) = \mathbf{X}_k^e = dado; \; t \geq t_k \tag{7.79}$$

con solución explicita en $t = t_{k+1} = t_k + T_s$:

$$\mathbf{X}_{k+1}^e = e^{\mathbf{A}T_s}\mathbf{X}_k^e + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}(t-\lambda)} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w}^e(\lambda) \end{bmatrix} d\lambda; \tag{7.80}$$

*La validación numérica de este enfoque, cuyo desarrollo no habia sido publicado previamente, es tratada en Carrizo et al. 2007.

Dada la estructura de la matriz constante **A** y usando la definición de la exp(**A**t) es posible constatar que:

$$e^{\mathbf{A}t} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + ... = \begin{bmatrix} I & \mathbf{Q}(t) \\ 0 & \mathbf{R}(t) \end{bmatrix} \tag{7.81}$$

Donde:

$$\mathbf{R}(t) \triangleq e^{-2\mathbf{S}(\mathbf{\Omega}^e)t};\ \mathbf{Q}(t) \triangleq \int_0^t \mathbf{R}(\lambda)\, d\lambda; \tag{7.82}$$

Para lo que sigue convendrá además introducir las siguientes definiciones:

$$\mathbf{U}(t) \triangleq \int_0^t \mathbf{Q}(\lambda)\, d\lambda;\ \mathbf{W}(t) \triangleq \int_0^t \mathbf{U}(\lambda)\, d\lambda \tag{7.83}$$

Integrando sucesivamente término a término la serie de potencias (7.81) y tendido en cuenta que toda matriz conmuta con su exponencial, resultan, además las siguientes relaciones útiles:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= -2\mathbf{Q}(t)\mathbf{S}(\mathbf{\Omega}^e) + I = -2\mathbf{S}(\mathbf{\Omega}^e)\mathbf{Q}(t) + I \\ \mathbf{Q}(t) &= -2\mathbf{U}(t)\mathbf{S}(\mathbf{\Omega}^e) + It = -2\mathbf{S}(\mathbf{\Omega}^e)\mathbf{U}(t) + It \\ \mathbf{U}(t) &= -2\mathbf{W}(t)\mathbf{S}(\mathbf{\Omega}^e) + It^2/2 = -2\mathbf{S}(\mathbf{\Omega}^e)\mathbf{W}(t) + It^2/2 \end{aligned} \tag{7.84}$$

Nótese en la (7.80) que el término independiente de la propulsión, que incluye al efecto Coriolis, a diferencia de la (7.59) en la formulación en LGV (ver también la Ec. (7.60)), se calcula en forma exacta como una simple transformación lineal constante del estado en el instante anterior. Más aún, las submatrices constantes $\mathbf{Q}(T_s)$ y $\mathbf{R}(T_s)$ de exp($\mathbf{A}T_s$) pueden ser calculadas de una vez para siempre fuera del algoritmo de integración reduciendo así la complejidad del algoritmo en tiempo real.

Por otra parte, con las definiciones (7.82), el término de la convolución en (7.80) se reescribe como:

$$\Delta\mathbf{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{P}_{k+1} \\ \Delta\mathbf{V}_{k+1} \end{bmatrix} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-\lambda)} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w}^e(\lambda) \end{bmatrix} d\lambda = \Delta\mathbf{X}_{k+1}^g + \Delta\mathbf{X}_{k+1}^f \tag{7.85}$$

Donde se introdujeron los términos de gravedad y de fuerza específica:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{X}_{k+1}^g &\triangleq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t_{k+1}-\lambda) \\ \mathbf{R}(t_{k+1}-\lambda) \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}^e(\mathbf{P}^e(\lambda))\, d\lambda; \\ \Delta\mathbf{X}_{k+1}^f &\triangleq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t_{k+1}-\lambda) \\ \mathbf{R}(t_{k+1}-\lambda) \end{bmatrix} \mathbf{f}^e(\lambda)\ d\lambda \end{aligned} \tag{7.86}$$

Cálculo del término de la gravedad:
Introducimos la aproximación de primer orden para $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}^e(\mathbf{P}^e(t)) &\cong \boldsymbol{\gamma}^e\left(\mathbf{P}^e(t_k)+\mathbf{V}^e(t_k)\cdot(t-t_k)\right)\cong \\ &\cong \underbrace{\boldsymbol{\gamma}^e\left[\mathbf{P}^e(t_k)\right]}_{\boldsymbol{\gamma}_k^e}+\underbrace{\left.\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^e}{\partial\mathbf{P}^e}\right|_{\mathbf{P}^e(t_k)}\mathbf{V}^e(t_k)}_{\mathbf{b}_k}\cdot(t-t_k)=\boldsymbol{\gamma}_k^e+\mathbf{b}_k(t-t_k)\end{aligned} \tag{7.87}$$

En la anterior pueden utilizase alguna de las expresiones explícitas de la gravedad en función de $\mathbf{P}^e$ presentadas en el Párrafo 4.4.1. En el Apéndice B se consignan las expresiones analíticas de las entradas de la matriz jacobiana $[\partial\boldsymbol{\gamma}^e/\partial\mathbf{P}^e]$ para el caso particular de la aproximación "J_2" de la gravitación normal dada por la Ec. **(4.51)**.

Introduciendo la (7.87) en la primera de las (7.86) luego $\tau = t_{k+1}-\lambda$ y por último el cambio del variables habitual para integrar por partes, se obtiene:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{X}_{k+1}^g &= \int_{t_k}^{t_{k+1}}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(t_{k+1}-\lambda)\\ \mathbf{R}(t_{k+1}-\lambda)\end{bmatrix}d\lambda\boldsymbol{\gamma}_k^e+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(t_{k+1}-\lambda)\\ \mathbf{R}(t_{k+1}-\lambda)\end{bmatrix}(\lambda-t_k)\,d\lambda\mathbf{b}_k \\ &= \int_0^{T_s}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(\tau)\\ \mathbf{R}(\tau)\end{bmatrix}d\tau\boldsymbol{\gamma}_k^e+\int_0^{T_s}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(\tau)\\ \mathbf{R}(\tau)\end{bmatrix}(T_s-\tau)\,d\tau\mathbf{b}_k=\int_0^{T_s}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(\tau)\\ \mathbf{R}(\tau)\end{bmatrix}d\tau(\boldsymbol{\gamma}_k^e+T_s\mathbf{b}_k)-\int_0^{T_s}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(\tau)\\ \mathbf{R}(\tau)\end{bmatrix}\tau\,d\tau\mathbf{b}_k \\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{U}(T_s)\\ \mathbf{Q}(T_s)\end{bmatrix}(\boldsymbol{\gamma}_k^e+T_s\mathbf{b}_k)-\int_0^{T_s}\tau\begin{bmatrix}d\mathbf{U}(\tau)\\ d\mathbf{Q}(\tau)\end{bmatrix}\mathbf{b}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{U}(T_s)\\ \mathbf{Q}(T_s)\end{bmatrix}(\boldsymbol{\gamma}_k^e+T_s\mathbf{b}_k)+\begin{bmatrix}\mathbf{W}(T_s)\\ \mathbf{U}(T_s)\end{bmatrix}\mathbf{b}_k-\begin{bmatrix}\mathbf{U}(T_s)\\ \mathbf{Q}(T_s)\end{bmatrix}T_s\mathbf{b}_k \\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{U}(T_s)\\ \mathbf{Q}(T_s)\end{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_k^e+\begin{bmatrix}\mathbf{W}(T_s)\\ \mathbf{U}(T_s)\end{bmatrix}\mathbf{b}_k\end{aligned} \tag{7.88}$$

Una vez más, las matrices constantes que intervienen en la expresión anterior pueden calcularse a priori en funcion del T_s elegido fuera del algoritmo.

Cálculo del término de la fuerza específica
Descomponiendo el intervalo $[t_k,\ t_{k+1}]$ en sub-intervalos de longitud T_m, la 2ª de las (7.86) se rescribe como:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{X}_{k+1}^f &= \sum_{j=0}^{M-1}\int_{t_{k.j}}^{t_{k,j+1}}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(t_{k+1}-\lambda)\\ \mathbf{R}(t_{k+1}-\lambda)\end{bmatrix}\mathbf{f}^e(\lambda)\ d\lambda \\ &\approx \sum_{j=0}^{M-1}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(t_{k+1}-(t_{k.j}+T_m/2))\\ \mathbf{R}(t_{k+1}-(t_{k.j}+T_m/2))\end{bmatrix}\int_{t_{k.j}}^{t_{k,j+1}}\mathbf{C}_b^e\mathbf{f}^b(\lambda)\ d\lambda\end{aligned} \tag{7.89}$$

Donde se introdujo la aproximación para $\lambda \in \left[t_{k,j}, t_{k,j+1}\right]$:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(t_{k+1}-\lambda)\\ \mathbf{R}(t_{k+1}-\lambda)\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(t_{k+1}-(t_{k.j}+T_m/2))\\ \mathbf{R}(t_{k+1}-(t_{k.j}+T_m/2))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(T_s-(j+\frac{1}{2})T_m)\\ \mathbf{R}(T_s-(j+\frac{1}{2})T_m)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(j)\\ \mathbf{R}(j)\end{bmatrix};\ j=0,..,M-1 \tag{7.90}$$

Similarmente a las (7.38) definimos:

$$\delta\mathbf{u}^{e}_{k,j}(t) \triangleq \int_{t_{k,j}}^{t} \mathbf{C}^{e}_{b(\lambda)}\mathbf{f}^{b}(\lambda)d\lambda\,;\ \Rightarrow \delta\mathbf{u}^{e}_{k,j+1} \triangleq \delta\mathbf{u}^{e}_{k,j}(t_{k,j+1}) \tag{7.91}$$

Con la cual la (7.89) resulta:

$$\Delta\mathbf{X}^{f}_{k+1} \approx \sum_{j=0}^{M-1}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(j)\\ \mathbf{R}(j)\end{bmatrix}\delta\mathbf{u}^{e}_{k,j}(t_{k,j+1}) \tag{7.92}$$

Donde las matrices constantes $\mathbf{Q}(j)$, $\mathbf{R}(j)$; j=0,..,M-1 se calculan de una vez para siempre en función de T_s y T_m.

Similarmente a la (7.41) escribimos:

$$\delta\mathbf{u}^{e}_{k,j}(t) = \mathbf{C}^{e}_{b(k,j)}\int_{t_{k,j}}^{t}\mathbf{C}^{b(k,j)}_{b(\lambda)}\mathbf{f}^{b}(\lambda)d\lambda = \mathbf{C}^{e}_{b(k,j)}\delta\mathbf{u}^{b(k,j)}_{k,j}(t) \tag{7.93}$$

donde, como en (7.43), $\mathbf{C}^{e}_{b(k,j)}$ es actualizado mediante la siguiente iteración en función del ángulo $\boldsymbol{\phi}^{b}_{k,j-1:j}$ previamente calculado con el pseudo-código (7.32)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}^{e}_{b(k,0)} = \mathbf{C}^{e}_{b(k)}\\
&\mathbf{C}^{b(k,j-1)}_{b(k,j)} = exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^{b}_{k,j-1:j}));\\
&\mathbf{C}^{e}_{b(k,j)} = \mathbf{C}^{e}_{b(k,j-1)}\mathbf{C}^{b(k,j-1)}_{b(k,j)};\ j = 1,\ldots,M\\
&\mathbf{C}^{e}_{b(k+1)} = \mathbf{C}^{e}_{b(k,M)}
\end{aligned} \tag{7.94}$$

El resultado final de la iteración anterior: $\mathbf{C}^{e(k)}_{b(k+1)}$ junto con la (7.75) y la (7.76) permiten reiniciar el ciclo del cálculo $\mathbf{C}^{e}_{b}$ a partir $\mathbf{C}^{e(k+1)}_{b(k+1)}$. En cuanto al cálculo del término $\delta\mathbf{u}^{b(k,j)}_{k,j}(t)$ en (7.93) el desarrollo reproduce los mismos pasos que para la terna LGV desde la (7.44) hasta el pseudo-código expresado por (7.58).

7.3 Comparación entre los algoritmos en ternas LGV y ECEF

Los algoritmos "strapdown" en coordenadas LGV son la continuación natural de los sistemas de navegación con plataforma giroestabilizada paralela al plano tangente local terrestre. En gran parte es esta herencia histórica la que ha determinado su popularidad durante el desarrollo de la tecnología "strapdown". En defensa de esta opción cabe destacar además que la terna de referencia geográfica y el posicionamiento en coordenadas curvilíneas son muy usados en la navegación en vehículos sub-atmosféricos y que muchos instrumentes exoceptivos clásicos de ayuda a la navegación inercial (altímetros, radionavegación terrestre y radar) son diseñados adaptados a esa misma terna. Otro especto que motiva el uso de estas coordenadas es la forma sencilla que en ellas adopta la expresión de la gravedad normal (fórmula de Somigliana en el Capítulo 4). Sin embargo, como se demuestra en este Capítulo la formulación en terna LGV no resulta las más adecuada desde el punto de vista numérico.

Las ecuaciones cinemáticas según la terna terrestre (ECEF) son considerablemente más sencillas que las expresadas en terna LGV. Como fuera señalado en Wei/Schwarz (1990), esto permite relajar aproximaciones mejorando así la precisión y reduciendo la complejidad e intensidad del cálculo en tiempo real. Más específicamente, en ECEF: a) La corrección por Corilolis se calcula en forma exacta en cada paso del algoritmo que transforma el estado cinemático anterior mediante una matriz constante conocida a priori; b) La rotación de la terna "**e**" en cada intervalo T_s es constante y conocida a priori en forma exacta; c) La ausencia de la rotación de transporte reduce la complejidad de las ecuaciones.

Las ventajas numéricas señaladas se acentúan en alta velocidad (alta rotación de transporte) como satélites, inyectores satelitales y aviones. En Carrizo et all. (2007) se demuestra que en vehículos rápidos los errores inducidos por la aproximación del término de Coriolis en terna LGV pueden dominar en varios ordenes de magnitud a los provocados por las otras aproximaciones numéricas. En la misma referencia se compara el desempeño de ambos algoritmos para idénticos valores de T_l, T_m y T_s, sobre una trayectoria sintética (generada con el método expuesto en Giribet et al. 2007) de un inyector satelital similar al vehículo DELTA-II de NASA. El resultado es una divergencia en la posición en la versión LGV más de 3 órdenes de magnitud superior en relación a la observada en terna ECEF.

Como la ECEF es la terna estándar de los sistemas GNSS, a las ventajas anteriores se suma una mejor adecuación del algoritmo de propagación del estado cinemático a la navegación integrada inercial-GPS (objeto del Capítulo 10). En particular, los modelos matemáticos de las medidas de pseudo-rango y Doppler (considerados en el próximo Capítulo) son los mismos que los adoptados por los receptores GPS. La mayor simplicidad de los modelos de estas mediciones exoceptivas se traducen además en ventajas numéricas en la implementación del algoritmo de navegación integrada. Por último cabe destacar que para ciertas aplicaciones como la geo-referenciación automática de imágenes adquiridas mediante sensores remotos tanto aéreos como satelitales la terna de preferencia es la ECEF.

Capítulo 8
Sistemas Satelitales de Navegación Global

Los Sistemas Satelitales de Navegación Global (GNSS según sus siglas en inglés) son sistemas de radionavegación pasiva con estaciones de referencias a bordo de satélites en órbita alrededor de la Tierra. La constelación de satélites constituye un sistema de referenciación absoluta que permite a un receptor alcanzado por las señales satelitales medir su distancia respecto de cada satélite y determinar, por triangulación, su propia posición en coordenadas ECEF, terna de referencia estándar adoptada por todos los sistemas GNSS.

La posición de cada satélite visible es determinada en el propio receptor con base en sus parámetros orbitales (efemérides) transmitidos junto con la señal recibida. La distancia a cada trasmisor satelital se calcula escalando con la velocidad de propagación de la luz en el vacío la medida del tiempo de propagación de la correspondiente señal. Clásicamente, la medición precisa de intervalos de tiempos entre eventos no co-localizados requirió de relojes sincronizados de alta precisión y estabilidad en ambos eventos. Es la introducción del concepto de pseudo-distancia o "*pseudo-rango"* lo que hizo posible reducir esos requerimientos de alta calidad y sincronía en el reloj del receptor permitiendo así su miniaturización y masificación. Para esto se utiliza un número redundante de mediciones de tiempos de propagación (al menos 4 en $\mathbb{R}^3$ ó 3 en $\mathbb{R}^2$) todos afectados por idénticas imprecisiones del reloj del receptor (de calidad comercial). A partir de éstas se determina, simultáneamente, las coordenadas de la posición del receptor y el sesgo horario de su propio reloj. De éste modo, además de posicionar un receptor es posible propagar el tiempo preciso medido a bordo de los satélites de referencia. Con los sistemas GNSS es posible lograr esto con errores acotados uniformemente sobre casi cualquier punto del espacio circundante a la Tierra, en casi todo instante y con escasa dependencia de las condiciones atmosféricas. Así mismo, el desplazamiento Doppler, medido al sintonizar la portadora, permite calcular la velocidad radial del receptor respecto de cada satélite y, consiguientemente, determinar el vector velocidad en las mismas coordenadas del sistema de referencia satelital. Los receptores modernos pueden además rastrear la fase de la portadora emitida por los satélites, lo cual, mediante técnicas interferométricas, hace posible posicionamientos de muy alta precisión y aún medir directamente la orientación de un receptor equipado con múltiples antenas. Los métodos interferométricos son la base de los más modernos sistemas de navegación de alta precisión.

Los sistemas GNSS son tributarios del rápido desarrollo durante las últimas décadas de importantes tecnologías críticas tales como: vehículos espaciales altamente confiables; relojes atómicos de alta precisión y estabilidad (<1 seg. en $3x10^6$ años); buena estabilidad a corto plazo de osciladores de cuarzo; técnicas precisas de rastreo satelital y de cálculo de efemérides y métodos avanzados de modulación de portadora.

Las aplicaciones actuales y potenciales de los GNSS son innumerables y abarcan todas las ramas de la ingeniería, la arquitectura, la salud, el manejo territorial, de los recursos naturales y de catástrofes, los sensores remotos, entretenimientos y, por supuesto, cualquier medio de transporte lo cual constituyó el motor original de esta tecnología.

Los actuales sistemas GNSS operativos o en curso de serlo son: el NAVSTAR-GPS desarrollado y operado por la fuerza aérea estadounidense y operativo desde 1992, el sistema GLONASS desarrollado y operado por el ministerio de defensa ruso, operativio definitivamente en 2012 y el sistema GALILEO. Este último, único de origen civil fue desarrollado por la Comunidad Europea y está en sus fases finales de puesta en servicio. Un aspecto destacable de esta última constelación es el uso, a bordo de cada satélite, de un par de relojes atómicos redundantes de muy alta precisión: un *H-Maser* (1nesg/día) y otro RAFS (*Rubidium Atomic Frequency Standard*, 10nseg/día). Asimismo, GALILEO constituirá un sistema de segunda generación capaz de proveer por sí mismo una señal de integridad compatible con las requeridas por la ICAO (*International Civil Aviation Organization*) para la mayor parte de las fases de los vuelos comerciales. Actualmente esta función es provista por subsistemas *ad-hoc* de aumentación regional GPS, tales como el WAAS (Enge et al., 1996) sobre Norteamérica, el EGNOS (Toran/Traveset, 2004) sobre el continente europeo y el MSAS sobre Japón. Paralelamente al desarrollo del sistema GALILEO, EEUU inició un plan de modernización del GPS con miras a proveer también prestaciones de 2ª generación durante la presente década. Es importante remarcar que en un futuro próximo todos estos sistemas estarán accesibles simultáneamente para receptores multi-constelación lo cual permitirá mejorar la confiabilidad, la precisión, la continuidad y la integridad a niveles insospechados por los pioneros de la navegación satelital.

Luego de presentar la arquitectura básica de los sistemas GNSS y de cada uno de sus componentes, se describe la señal de radiofrecuencia en el espacio, en base a la cual se modela matemáticamente la señal en la antena del receptor y su etapa de RF antes de introducir los procedimientos de demodulación compleja y de conversión digital de la señal. Toda la información emitida por la(s) constelación(es) visible(s) es luego extraída numéricamente de la señal muestreada, esto incluye el rastreo de cada satélite en línea de vista. El último sub-capítulo está dedicado a describir el mensaje transmitido por la señal de RF en el espacio de la constelación GPS.

8.1 Arquitectura de un sistema GNSS

Es clásico describir la arquitectura de los sistemas GNSS según sus 3 componentes principales, a saber: el segmento espacial, el segmento terreno y el receptor o segmento del usuario.

8.1.1 El segmento espacial

Consiste en la constelación de satélites junto con las señales en el espacio que ellos proveen. Los satélites se distribuyen según órbitas circulares cada una de las cuales ocupa un plano fijo en coordenadas ECI conteniendo entre 4 y 6 satélites activos más uno, o en ciertos casos dos, de repuesto. La distribución espacial de los satélites (y sus órbitas) esta diseñada de modo que sea posible “ver” al menos 4 satélites desde cualquier punto de la Tierra.

La Tabla 8.1 indica algunas características de las constelaciones GPS, GALILEO y GLONASS. Por su parte, la Figura 8.1 muestra, a modo de ejemplo, los 6 planos orbitales del sistema GPS con 4+1 satélites en cada órbita.

Las funciones del segmento espacial son: a) recibir y almacenar la información preveniente del segmento de control, b) mantener el tiempo preciso a bordo, c) modular y transmitir las portadoras con los respectivos códigos de cada satélite y los mensajes de navegación y d) asegurar la localización espacio-temporal asignada por el segmento de control de cada satélite dentro de su órbita.

GNSS	PLANOS ORBITALES	SATÉLITES /ÓRBITA	INCLINA-CIÓN	PERÍODOS	SATÉLITES VISIBLES	ALTURA
GPS	6 a 60º	4+1	55º	12hs	≥4	20200Km
GALILEO	3 a 120º	10+1	56º	14hs	≥6	23600Km
GLONASS	3 a 120º	7+1	64,8º	11,25hs	≥5	19100Km

Tabla 8.1: Características orbitales nominales de 1as principales constelaciones GNSS.

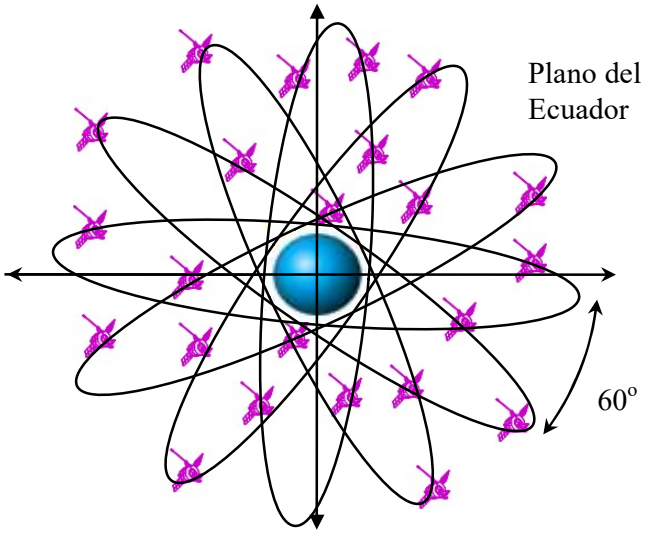


Figura 8.1: Órbitas del segmento espacial del sistema GPS proyectadas sobre el plano del Ecuador.

La Figura 8.2 indica las portadoras de las señales en el espacio para las 3 constelaciones consideradas, todas ubicadas en la región RNSS (*Radionavigation Satellite Service*) de la banda L. Esta región incluye a la zona protegida de interferencias ARNS (*Aeronautical Radio Navigation Service*) destinada a la aeronavegación comercial y sujeta a muy estrictas regulaciones internacionales.

El sistema GPS utiliza el método CDMA (*Code Division Multiple Access,* ver Sec. 8.2*)* para emitir sus señales según dos códigos con un canal de código independiente asignado a cada satélite. Sobre su portadora L1 (1575.42 MHz) en la zona ARNS trasmite, "en fase", una señal de precisión para aplicaciones militares con el código denominado *P(Y) code* (que puede estar encriptado) y otra "en cuadratura" con código C/A (*Coarse-Acquisition code*) de libre acceso. El código P(Y) también es trasmitido

sobre la componente en fase de una segunda portadora L2 (1227.60 MHz) ubicada fuera de la zona protegida ARNS. A partir de los primeros satélites del plan de modernización: Block II R-M (*Repelenishment and Modernized*) lanzados en 2005, GPS también trasmite en cuadratura sobre la portadora L2 la nueva señal civil L2C con código C/A. Los satélites del bloque Block II F (*follow on*), con lanzamientos desde 2009, incluyen dos nuevas señales de seguridad de vida (SOL: *Safety of Life*) sobre la portadora L5 (1176.45 MHz) con un código similar al P(Y)*. Culminado el proceso de modernización, el sistema GPS ofrecerá señales en 3 bandas de frecuencias diferentes a sus usuarios civiles, lo que implicará una significativa mejora en precisión y confiabilidad respecto de la situación actual.

El sistema GLONASS utiliza como técnica de multiplexado la división por frecuencia FDMA (*Frequency Division Multiple Access*) y trasmite un mismo código simultáneamente en 15 canales de frecuencias sobre dos portadoras: L1: 1602,0 Mhz (1598.0625 a 1605.375 MHz) y L2: 1245,8 MHz (1242.9375 a 1248.625 MHz). La no coincidencia de bandas con GPS complica y encarece el diseño de receptores combinados GLONASS/GPS, por lo que el programa de modernización de GLONASS, anunciado en 2008 por el estado ruso, contempla la transmisión de los mismos 15 canales sobre una nueva señal FDMA localizada en la banda L3 (de 1197.648 a 1212.255 MHz) situada entre las bandas L2 y L5 de GPS y coincidente con la banda E5b de GALILEO. El uso de FDMA hacia de GLONASS la excepción en el uso de CDMA adoptado por el resto de los sistemas GNSS (incluido el sistema COMPASS chino en desarrollo). Teniendo en cuenta esto, la federación rusa aprobó en 2008 la futura incorporación de dos señales CDMA centradas, respectivamente, en las portadoras L1 y L5 de GPS.

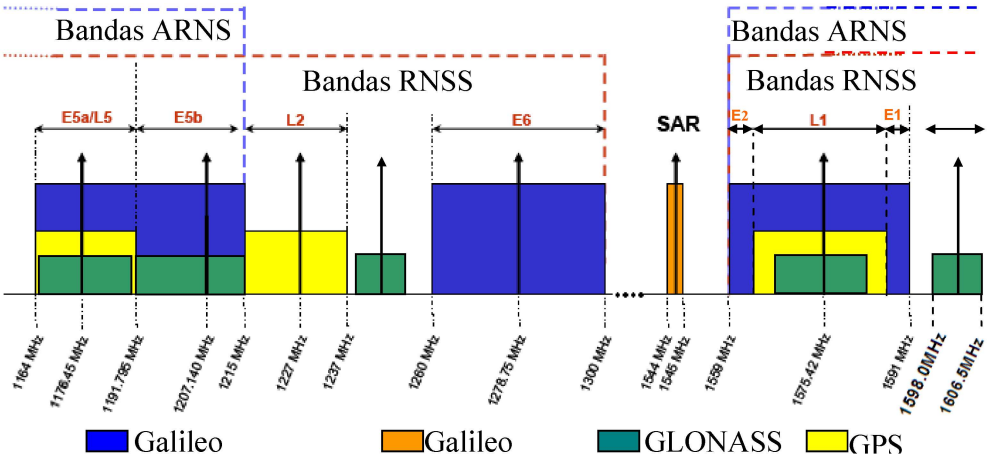


Figura 8.2: Portadoras en banda L de los 3 sistemas GNSS.

La constelación GALILEO utiliza 10 señales multiplexadas según el sistema CDMA con portadoras en las bandas E5a, E5b, E6, en banda L inferior, y E2-L1-E1, en la banda L superior (ver; Hein et al., 2002). La selección de estas bandas asegura compatibilidad en la recepción con los sistemas GPS y GLONASS. En particular, como se advierte en la Figura 8.2, GALILEO comparte con GLONASS y GPS las frecuencias centrales E5a/L5 y L1 y con GLONASS la sub-banda E5b.

*El satélite SVN49 del Bloque IIR-M lanzado en marzo de 2009 fue el primero en trasmitir en frecuencia L5. Se prevé una constelación operativa en L5 para 2018.

La Tabla 8.2 resume las principales características previstas para la señales de GALILEO (no todas tienen ya definida la velocidad de transmisión de datos) que conllevarán 5 tipos de datos: a) de navegación, b) de integridad, c) comerciales, d) señales reguladas por el poder público (PRS: *Public Regulated Service*) y e) del servicio de búsqueda y rescate o SAR (S*earch And Rescue*). Esta última banda es una novedad del sistema GALILEO y está dedicada a la emisión de datos sobre situaciones de emergencias a los operadores de este servicio. Las señales destinadas a los servicios comerciales (CS) y PRS son de acceso restringido y estarán encriptadas, mientras que el resto serán de acceso libre (OS: *Open Service*))). El sistema ofrecerá datos de navegación OS y SOL en 6 señales, incluyendo 3 "portadoras piloto" sin datos*, sobre las bandas E5a/L5 y L1.

SEÑAL	BANDA	CHIP RATE	ENCRIPT.	USUARIO
1	E5a1	10Mcps	No	OS
2	E5a2	10Mcps	Piloto	OS
3	E5b1	10Mcps	No	OS/CS/SoL
4	E5b2	10Mcps	Piloto	OS
5	E6a	5Mcps	Si	PRS
6	E6b	5Mcps	Si	CS
7	E6c	5Mcps	Piloto	OS
8	L1a	mMcps	Si	PRS
9	L1b	2Mcps	No	OS/CS/SoL
10	L1c	2Mcps	No	OS/CS/SoL

Tabla 8.2: Características y usuarios de las bandas de GALILEO.

8.1.2 El segmento terreno

El segmento terreno o segmento de control de un sistema GNSS es el conjunto de estaciones, instalaciones y equipos destinados a monitorear la salud del segmento espacial y asegurar el rastreo, la telemetría, el comando y control de cada satélite. También queda bajo su autoridad la determinación del tiempo global del sistema, la sincronización de los relojes de los segmentos espacial y terreno, el cálculo de las correcciones de tiempo y de efemérides, la determinación de los parámetros de propagación y el enlace de datos hacia el segmento espacial. Un conjunto de estaciones de referencia de posiciones conocidas con alta precisión rastrea los satélites visibles y reenvía sus señales a un centro de cómputo que calcula las efemérides y el error del reloj atómico abordo de cada satélite. Estos datos son luego transmitidos a las estaciones terrenas de enlace las que a su vez los suben a la constelación para luego ser incorporados al mensaje de navegación modulado sobre la señal que recibe el usuario.

Posiblemente la principal fuente de errores en la determinación del tiempo de propagación proviene de la capa ionosférica de la Tierra que introduce un retraso en la velocidad de grupo de la señal (ver más adelante). Como la profundidad e intensidad de la ionosfera varían con la hora del día, la latitud y la actividad solar†, una función del segmento terreno es actualizar los parámetros de un modelo del contenido electrónico

*Las portadoras piloto facilitan el rastreo y la medición de la distancia al satélite emisor por parte del receptor.

†Como veremos en el próximo capitulo sus efectos pueden ser paliados si cada satélite emite en más de una frecuencia y el receptor está capacitado para recibirlas.

de esta capa. El sistema GPS utiliza el modelo de *Klobuchar* (ver Parkinson/ Spilker, 1996, Vol. 1, Ch.12, p.485-514) que corrige hasta un 60% del retraso ionosférico. Los parámetros del modelo ionosférico son subidos a la constelación y posteriormente difundidos por vía del mensaje de navegación.

La precisión con la cual es posible corregir los errores del segmento espacial (incluido el retraso ionosférico) depende de la densidad de estaciones de rastreo, de la cantidad de estaciones de referencia que ve cada satélite en un dado instante y de la frecuencia de renovación de estos datos por parte del segmento de control. Por este motivo, el nuevo programa de modernización del segmento terreno del sistema GPS, acordado en septiembre de 2007 elevó a 11 las estaciones de monitoreo *MS (Monitor Station*), agregando a las 5 originales manejadas por la USAF, localizadas en Hawaii, Colorado Springs, las islas Ascensión (Atlántico Sur), Diego García (Indico Sur) y Kwajalein (Pacífico Norte), las recientes 6 administradas por la agencia NIMA (*National Imagery and Mapping Agency*) y localizadas en: Washington, DC, Inglaterra, Argentina, Ecuador, Arabia Saudita y Australia. También prevé a mediano plazo la incorporación de 5 nuevas estaciones más. Asimismo, a la estación de control central *MCS* (*Master Control Station*) en *Colorado Springs* se agregó la MCS en Gaithersburg, Maryland. La actual red de estaciones MS de GPS asegura la visibilidad desde cada satélite de al menos 2 MS el 100% del tiempo (Yinger, *et.al*., 2003). Las 3 antenas de subida de datos (*GA: Ground Antenna*) ubicadas, respectivamente, en Ascensión, Diego García y Kwajalein actualizan los parámetros orbitales de la efemérides de los satélites y sus respectivos relojes atómicos (con precisión de nano-segundos) al menos una vez por día. Estos datos son incorporados al mensaje de navegación incluido en la señal trasmitida desde cada satélite. Con la sustitución de la actual constelación por las nuevas generaciones de satélites Block IIR/IIF, el segmento espacial dispondrá de la funcionalidad de auto-navegación relativa, lo que permitirá actualizar con mayor frecuencia los parámetros del mensaje prescindiendo del segmento terreno, que, de todos modos, seguirá asegurando la supervisión a largo plazo de los parámetros del mensaje de navegación.

El segmento terreno de GLONASS ocupa actualmente el interior del territorio de la antigua URSS y consiste de 9 estaciones MS, 3 estaciones de enlace (GA), 4 de rastreo, telemetría y control y su MCS cercana a Moscú. Un programa de modernización (anunciado en 2008) consiste en la instalación de nuevas estaciones MS fuera del territorio ruso para mejorar la trazabilidad de la constelación y reducir el período de actualización de las correcciones a bordo. Esto es un avance significativo teniendo en cuenta que hasta ahora un satélite podía emitir datos erróneos durante 6hs. sin ser detectado. Con esta mejora GLONASS puede proveer una precisión de tiempo y de determinación orbital similares a las de GPS.

El segmento terreno del sistema GALILEO está conformado por dos subsistemas: el GCS (*Ground Control Segment*) y el GMS (*Ground Mission Segment*). El GCS con una red global de 5 estaciones TTC (*Telemetry Tracking and Control*) para el mantenimiento, control orbital, supervisión paramétrica y salud de los satélites. El GMS se apoyará en una red global de 30 estaciones GSS (*Galileo Sensor Stations*) equipadas con receptores de referencia dedicadas al monitoreo continuo de las señales en el espacio (SIS) emitidas por la constelación. Mediante esta red el GMS realiza la determinación orbitográfica y la sincronía de tiempos (ODTS: *Orbitography Determination and Time Synchronization*) incluyendo el cálculo de los desfasajes de los

relojes y de la predicción de sus derivas, resultados que serán retransmitidos a la constelación a intervalos de 100 minutos. Asimismo el GMS calculará la función de integridad de la señal de cada satélite luego traducida en mensajes de alerta difundidos por la constelación asegurando que el intervalo entre la detección de una falla y su notificación al usuario TTA (*Time to Alert*) sea inferior a 6 segs. Cinco estaciones globales de enlace ULS (*Up-Link-Stations*) permitirán la comunicación del segmento terreno con el segmento espacial.

8.2 Características de la señal GPS

Como se dijo más arriba, el sistema GPS utiliza el multiplexado CDMA para emitir las señales desde cada satélite. Este sistema consiste en modular, en banda base, una secuencia binaria pseudo-aleatoria (PRBS) única para cada satélite (código) con los bits de los datos efectivamente trasmitidos por éste. La tasa de bits (*bit rate*) de la PRBS se elije mucho más alta que la tasa de bits de los datos. Como veremos, entre otros estos últimos vehiculizan hacia el receptor información crucial relativa, por un lado, sobre a la constelación en su conjunto y, más detallada y precisa, sobre el satélite emisor. A la señal en banda base resultante se la llama de espectro expandido (s*pread spectrum* en inglés) dado que el soporte de su espectro de potencia queda determinado por la señal PRBS y se extiende sobre una banda de frecuencias mucho más amplia que la correspondiente a la información efectivamente trasmitida. Señales en banda base de este tipo pueden ser emitidas sobre más de una portadora.

Dos son los servicios básicos que ofrece el GPS: el SPS (S*tandard Positioning Service*) y el PPS (*Precise Positioning Service*). Ambos utilizan multiplexado de tipo CDMA, el primero usa un código (PRBS) llamado "C/A" (*Coarse Acquisition*) y el segundo un código de mayor extensión y ancho de banda y por tanto más preciso llamado "P" que, cuando está encriptado (y es sólo accesible a usuarios autorizados), se denota Y. La notación usual P(Y) hace referencia al código de precisión sin distinguir si está o no encriptado. Ambos códigos modulados por los datos se montan sobre señales portadoras usando modulación de tipo BPSK (*Binary Phase Shift Keying*) consistente en rotar en 180º la fase de la portadora (coincidente con el pasaje por 0 o π radianes de la misma) cada vez que hay un cambio de nivel en la señal en banda base a trasmitir. Esto permite distinguir entre ambos estados.

Las frecuencias de las portadoras usadas por estos servicios son múltiplos enteros coherentes de una frecuencia única generada por el reloj atómico estándar a bordo de cada satélite de 10,23MHz., de tal modo que:

$$\begin{aligned} f_{L1} &= 154 \times 10,23\text{MHz} = 1575,42\text{MHz} \\ f_{L2} &= 120 \times 10,23\text{MHz} = 1227,60\text{MHz} \end{aligned} \tag{8.1}$$

Las tasas de cambio de estado (*chip-rate*) están sincronizados con el reloj atómico de referencia y ésta para el código C/A es de 1,023MHz mientras que para el código P(Y) es de 10,23MHz. Cada satélite tiene asignada una secuencia PRBS de bits (+1 ó -1) única para ambos códigos de ambos servicios. El código C/A usa secuencias PRBS lineales de tipo "*Gold"* de máxima longitud, de duración temporal total igual a 1ms con N=1023 bits y ancho de pulso T_c=1/1,023μseg (1540 ciclos f_{L1}). Estas secuencias C/A son caracterizadas por ser mutuamente estadísticamente cuasi-ortogonales bajo la operación binaria de correlación cruzada (Gold, 1967). Esto permite discriminar

fácilmente entre dos secuencias PRBS distintas. Por su parte, el PPS codifica la señal con secuencias PRBS no-lineales, llamadas *P-code,* de gran longitud ($N \simeq 10^{14}$) y ancho de pulso T_p=1/10,23 μseg (120 ciclos f_{L2}). Estas secuencias son reiniciadas al principio de cada semana. Desde su inicio en 1994, el código P es usado en su forma encriptada: *Y-code* con el fin de limitar su uso sólo a usuarios autorizados.

La Figura 8.3 esquematiza la jerarquía en los procesos de modulación de las señales GPS. El nivel del bit del dato de navegación es sumado modulo-2 al correspondiente nivel del bit de la secuencia del código C/A ó P(Y) según el caso. Esta operación aprovecha el hecho de que los *chip rates* de ambos códigos son múltiplos enteros del *bit rate* (tasa de bits por unidad de tiempo) de los datos de 50Hz. De este modo, con una longitud T_d=20mseg. cada bit de datos recubre un número entero de bits de cualquiera de los dos códigos correspondiendo, respectivamente, a 20 secuencias PRBS completas del código C/A y a $\simeq 2x10^5$ bits del código P(Y). El nivel resultante de la primera operación binaria modula en BPSK la componente en cuadratura de la portadora L1, mientras que el resultado de la segunda operación modula las componentes en fase, tanto de la portadora L1 como de la L2. Así, la portadora L1 es modulada por ambos códigos (en fase y en cuadratura), mientras que la L2 está dedicada exclusivamente al código P(Y). La administración del sistema puede decidir no modular con datos al código P(Y) montado sobre una u otra portadora.

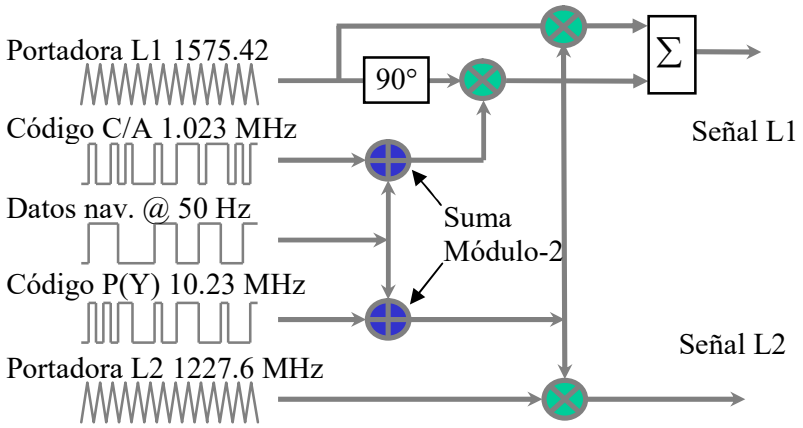


Figura 8.3: Esquema de modulación de las señales en el espacio de GPS.

Como ya se indicó, la modulación de la portadora con una PRBS redistribuye la potencia de la señal, originalmente contenida en una pequeña banda (50Hz en este caso), sobre una banda mucho mayor centrada en la portadora que, como veremos en el Párrafo 8.2.1, en el caso del código C/A es de 2Mhz y en el caso de código P(Y) es de 20MHz (en ambos casos dos veces el ancho de banda del *chip rate*). La potencia de estas señales en un punto cercano a la superficie terrestre es extremadamente baja. En promedio, para el código C/A es de -160dBW, para el código P(Y) en L1 es -163dBW y para el código P(Y) en L2 es -166dBW.

La Figura 8.4 muestra esquemáticamente las formas de onda en banda base y, en su parte inferior, la onda resultante de la modulación indicada en la Figura 8.3. Se

ejemplifica con varios bits del código C/A de longitud T_c y un bit de datos de longitud T_d recubriendo un cierto número entero de bits de código.

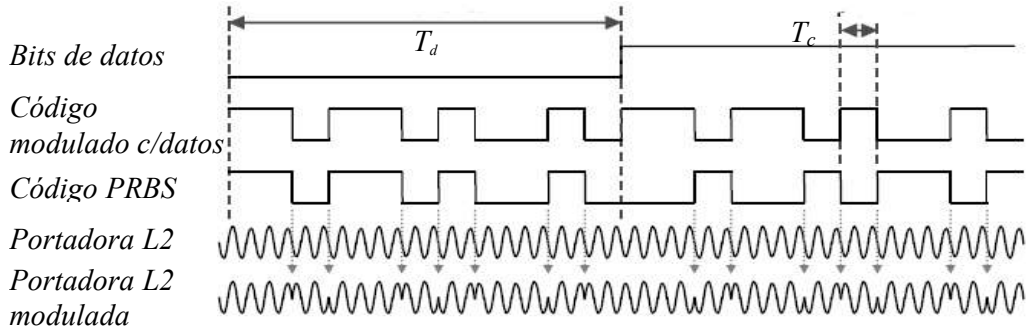


Figura 8.4: Modulación BPSK de la portadora GPS L2.

El modelo usado para describir la señal de espectro expandido en la antena del satélite *i* de la constelación GPS es:

$$\begin{aligned} s^i(t) = & \sqrt{2W_c}D^i(t)CA^i(t)sen(2\pi(f_1+\delta f_1^i)+\varphi_1^i)+ \\ & +\sqrt{2W_{P_1}}D^i(t)P^i(t)cos(2\pi(f_1+\delta f_1^i)+\varphi_1^i)+ \\ & +\sqrt{2W_{P_2}}D^i(t)P^i(t)cos(2\pi(f_2+\delta f_2^i)+\varphi_2^i) \end{aligned} \tag{8.2}$$

Donde: W_c, W_{P_1} y W_{P_2} son, respectivamente, las potencias promedio de las señales transportadas por el código C/A sobre la frecuencia f_1 (L1) y por el código P(Y), respectivamente, sobre f_1 y f_2 (L2); δf_1^i y δf_2^i son los desvíos en frecuencia de las respectivas portadoras respecto de sus valores nominales para el satélite *i*; φ_1^i y φ_2^i son las correspondientes fases módulo 2π (indeterminadas, ambiguas y no coherentes entre sí) de dichas portadoras; $D^i(t)$ (=±1) es la secuencia de bits de los datos del mensaje trasmitido por el satélite *i*; $CA^i(t)$ (=±1) es la secuencia PRBS de su correspondiente código C/A que, además de expandir el espectro, identifica al satélite *i*; $P^i(t)$ (=±1) es la secuencia correspondiente al código P(Y).

8.2.1 Banda base de la señal GPS

Siendo la señal PRBS del código C/A de cada satélite periódica de período 1ms (longitud temporal de la PRBS), su densidad espectral de potencia (PSD) en banda base resulta ser una distribución de *deltas de Dirac* (espectro de líneas) equi-espaciados a 1KHz. La envolvente de esta distribución tiene la forma (ver Papoulis (1962) y Kaplan/Hegarty (2006)):

$$E_s^i(f) = \frac{A^{i2}T_c}{2}\frac{\text{sen}^2(\pi f T_c)}{(\pi f T_c)^2} = \frac{A^{i2}T_c}{2}\text{sinc}^2(fT_c) \tag{8.3}$$

Sin ser realmente una función, un delta de Dirac tiene integral unitaria. Esto explica que la integral de la PSD de una PRBS sobre intervalos de frecuencias grandes comparados

con 1KHz resulte equivalente a la integral de su envolvente (8.3). Por esto, a la expresión anterior se la denomina la *envolvente continua equivalente* de la PSD de una PRBS (Parkinson/Spilker (1996), Vol. I, p. 338). Con esto, la potencia total de la señal PRBS puede calcularse a partir de la (8.3) y resulta:

$$P_s^i = \lim_{B\to\infty}\int_{-B}^{+B} E_s^i(f)df = \frac{A^{i2}}{2} \tag{8.4}$$

Es posible demostrar sin embargo que el 90% de la potencia total P_s^i se concentra en el intervalo de frecuencias [-B,B][Hz] con B=1/T_c≃1MHz. Teniendo en cuenta que el ancho de banda de la señal de datos $D^i(t)$ que modula al código C/A es, a penas, el 5% de B, el valor de referencia para la banda base efectiva de la señal útil emitida por cada satélite (PRBS+C/A) resulta en la práctica ~2B=2[MHz].

8.2.2 Representación de un ruido en banda base y de un ruido pasabanda

Introducimos estos conceptos para referencia futura. Por ruido en banda base se entiende a un ruido blanco (de banda ancha) gaussiano filtrado por un filtro pasabajos cuya PSD se concentra en una banda acotada de frecuencias conteniendo al origen tal que: $|f| < W$ siendo W el ancho de la banda base. Por otro lado, un ruido pasabanda es el resultado de filtrar un ruido blanco, gaussiano con un filtro pasabanda, así, por definición, un filtro pasabanda es aquel cuya función de transferencia se anula en un rango de frecuencias simétrico respecto del origen. Siendo la respuesta impulsiva de un filtro pasabanda (BPF) real, el módulo de su función de transferencia es simétrico respecto del origen. De este modo, un filtro pasabanda de frecuencia central f_c y ancho de banda $W < f_c$ posee respuesta no nula sólo entre las frecuencias $[f_c - W, f_c + W]$ (rama positiva del filtro) y entre las frecuencias $[-f_c - W, -f_c + W]$ (rama negativa del filtro).

Cuando un filtro pasabanda ideal, dado por el par (f_c,W), con función de transferencia $H_{\text{pb}}(f)$ unitaria y tal que $|H_{\text{pb}}(f)| = 0$ para $|f \pm f_c| \geq W$ es excitado por un ruido blanco de densidad espectral de potencia (PSD) constante igual a N/2, la respuesta $n_{pb}(t)$ del filtro es por definición un ruido pasabanda con densidad espectral de potencia $S_{n_{pb}}(f) = N/2$ para $|f \pm f_c| < W$ y nula sobre el resto del eje de las frecuencias. La potencia promedio de $n_{pb}(t)$ es por lo tanto: $P_n = E\{n_{pb}(t)^2\} = 2WN$.

Eligiendo dos ruidos gaussianos independientes $n_I(t)$ y $n_Q(t)$ descorrelacionados entre sí en la banda base W con PSD's planas, ambos tales que $S_{n_I}(f) = S_{n_Q}(f) = N$ para $|f| \leq W$ y nula fuera de esta banda, construimos el proceso estocástico:

$$n(t) = n_I(t)\cos(2\pi f_c t) - n_Q(t)\sin(2\pi f_c t) \tag{8.5}$$

Dada la descorrelación entre ambos ruidos y el hecho de que sus funciones de autocorrelación sean iguales a: $R_{n_I}(\tau) = R_{n_Q}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{n_I}(f)\}$, es fácil mostrar usando la definición de función de autocorrelación que (ver Proakis/Saleshi, 2002):

$$\begin{aligned} R_n(\tau) &= E\{n(t+\tau)n(t)\} \\ &= R_{n_I}(\tau)\cos(2\pi f_c\tau) = R_{n_I}(\tau)\left(\frac{e^{j2\pi f_c\tau}+e^{-j2\pi f_c\tau}}{2}\right) \end{aligned} \tag{8.6}$$

Usando las propiedades de traslación de la transformada de Fourier, el espectro de potencia del ruido $n(t)$ resulta:

$$S_n(f) = \mathcal{F}\{R_n(\tau)\} = \frac{S_{n_I}(f-f_c)+S_{n_I}(f+f_c)}{2} = S_{n_{pb}}(f) \tag{8.7}$$

con lo cual, en términos de sus estadísticas de segundo orden, el proceso $n(t)$ no se distingue de un proceso pasabanda $n_{pb}(t)$ introducido más arriba. Visto lo anterior, y siguiendo a Parkinson/Spilker (1996; Vol. I, pag. 340) o también a Proakis/Saleshi, (2002; Sec. 4.6) se adopta a la (8.5) como caracterización de un ruido pasabanda con frecuencia central f_c.

Introduciendo el *fasor* complejo en banda base $n_{bb}(t) \triangleq n_I(t) + jn_Q(t)$ y a partir de la caracterización (8.5) el ruido pasabanda se rescribe como:

$$n_{pb}(t) = \mathrm{Re}\{(n_I(t)+jn_Q(t))e^{j2\pi f_c t}\} = \mathrm{Re}\{n_{bb}(t)e^{j2\pi f_c t}\} \tag{8.8}$$

El proceso $n_{bb}(t)$ es llamado *la envolvente compleja en banda base* del ruido pasabanda $n_{pb}(t)$. Nuevamente usando la descorrelación entre los procesos $n_I(t)$ y $n_Q(t)$ y la definición de función de correlación, es fácil mostrar en primer lugar que:

$$\begin{aligned} &R_{bb}(\tau) = E\{n_{bb}(t+\tau)n_{bb}^*(t)\} = 2R_I(\tau) \\ &\Rightarrow S_{bb}(f) = \mathcal{F}\{R_{bb}(\tau)\} = 2S_I(f) \end{aligned} \tag{8.9}$$

y, junto con la (8.7), que la potencia promedio de $n_{pb}(t)$ resulta:

$$P_{n_{pb}} = E\{n_{pb}^2(t)\} = R_{n_{pb}}(0) = R_I(0) = R_Q(0) \tag{8.10}$$

8.3 El receptor GPS

El receptor GPS recibe en forma superpuesta las señales de espectro expandido (CDMA), emitidas por los satélites en línea de vista con el receptor, sumadas al ruido ambiental y a interferencias de diverso origen, tales como: ruido electrónico, emisiones térmicas de origen terrestre, atmosférico y astronómico, señales GPS reflejadas e interferencia humana deliberada o accidental. En condiciones de recepción nominal, la potencia de señal en el receptor comparada con la del ruido total, resulta, para la señal C/A, en una relación señal ruido (SNR) de entre -18dB y -26dB (dependiendo del ángulo de elevación de la línea de propagación). Para la señal P(Y) esta relación se deteriora aproximadamente en la misma proporción en que aumenta el ancho de la

banda base, es decir en un factor 10 (similar potencia de señal pero distribuida en una banda 10 veces mayor).

Como se advierte, el desafío del diseño de un receptor GPS reside en extraer la información desde el fondo de un ruido con niveles de potencia hasta 3 ordenes de magnitud superior a la potencia de la señal! Lo que hace posible abordar este desafío es el hecho de que la señal emitida por un dado satélite es, en un cierto sentido que comentaremos, incoherente con todas las perturbaciones, incluidas las señales emitidas por los otros satélites de la constelación.

8.3.1 La señal de RF en la antena del receptor

La portadora de cada satélite llega al receptor con un desplazamiento en frecuencia propio causado por la velocidad radial relativa del satélite respecto del receptor (efecto Doppler). Para un vehículo atmosférico este desplazamiento puede alcanzar los ±10Khz. En vehículos espaciales (cohetes o satélites) el desplazamiento total en frecuencia puede llegar hasta ±20Khz.

Para simplificar la exposición, consideramos sólo la portadora L_1 modulada con código C/A. Las conclusiones son generalizables a más de una portadora. Llamaremos $f_c=f_1$ a la frecuencia nominal de esa portadora. La señal en la antena del receptor, superposición de las señales provenientes de la constelación visible más el ruido, resulta:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{i=1}^{K} s^i(t) + w(t); \;\; K = n^{\text{o}} \text{ de satelites visibles.} \\ s^i(t) &= \sqrt{2P^i}\, D^i(t-\tau_a^i) CA^i(t-\tau_a^i) \cos(2\pi(f_c + \delta f^i + f_d^i)t + \phi^i); \;\; i = 1,\ldots,K \end{aligned} \tag{8.11}$$

Donde: P^i es la potencia promedio de la señal del satélite i en la antena; $w(t)$ es el ruido aditivo de banda ancha, mayormente de origen térmico o de impacto (*shot noise*), supuesto gaussiano, centrado, descorrelacionado, estacionario de 2º orden e independiente de las señales satelitales; τ_a^i es el tiempo de propagación desde el satélite i a la antena del receptor, f_d^i es el desvío Doppler en la antena, $\phi^i \in [0, 2\pi)$ es la fase módulo 2π (ambigua) de la portadora en la antena del receptor y, por último, $\delta f^i = \delta f_c^i$.

8.3.2 Etapa de RF en el receptor

En esta etapa, la señal en la antena $s(t)$ pasa primeramente por un pre-amplificador de bajo ruido, luego por un filtro pasa-banda centrado en la portadora que suprime en parte interferencias y ruido fuera de la banda pasante y, a continuación, por una etapa de mezclado con la señal del oscilador local cuya frecuencia f_{ol} es diseñada para bajar la frecuencia de la portadora a la frecuencia intermedia f_{if}. A la salida del mezclado se suprime la banda superior con un filtro pasabajos. La señal resultante pasará todavía por un filtro pasabanda centrado en f_{if} con ancho de banda W_{if} con el fin de atenuar o suprimir ruido fuera de la banda útil, armónicos y otros términos indeseados provenientes del proceso de mezclado.

A la salida de la etapa de frecuencia intermedia, la señal puede ser descrita mediante la siguiente "*señal pasabanda*":

$$s_{if}(t) = \sum_{i=1}^{K} s_{if}^{i}(t) + r(t);\ \ K = n^{o} \text{ de satelites visibles.}$$
$$s_{if}^{i}(t) = A^{i} D^{i}(t-\tau_{u}^{i}) C A^{i}(t-\tau_{u}^{i}) \cos(2\pi(f_{if} + f_{D}^{i})t + \phi^{i} - \varphi_{if});\ \ i = 1,\ldots,K \tag{8.12}$$

Donde, A^i es la amplitud resultante de la señal; τ_u^i es ahora el tiempo de propagación total incluyendo la suma de los retardos electrónicos de las distintas etapas en cascada del receptor del usuario (amplificación, filtrado, mezclado, etc.); φ_{if} es la fase módulo 2π que agrega el oscilador local; $r(t)$ es un ruido pasabanda resultado de filtrar el ruido de banda ancha $w(t)$ con el filtro pasabanda de la etapa de frecuencia intermedia. Por otra parte, denotando δf_u al error en frecuencia del OL, el desvío Doppler "efectivo" que percibe el receptor resulta ser:

$$f_D^i \triangleq f_d^i + \delta f^i - \delta f_u \tag{8.13}$$

El soporte sobre el eje de frecuencias del espectro de potencia de la señal pasabanda real $s_{if}(t)$ (incluyendo al ruido $r(t)$) es caracterizado por el par (f_{if} ,W_{if}); $f_{if} \gg W_{if}$. Dicho soporte, que resulta simétrico respecto del origen (sin contener a éste), posee una banda en las frecuencias positivas (rama positiva) de ancho W_{if} centrada en la frecuencia f_{if} y otra simétrica (rama negativa) centrada en la frecuencia $-f_{if}$ *.

8.3.3 Demodulación y muestreo en cuadratura

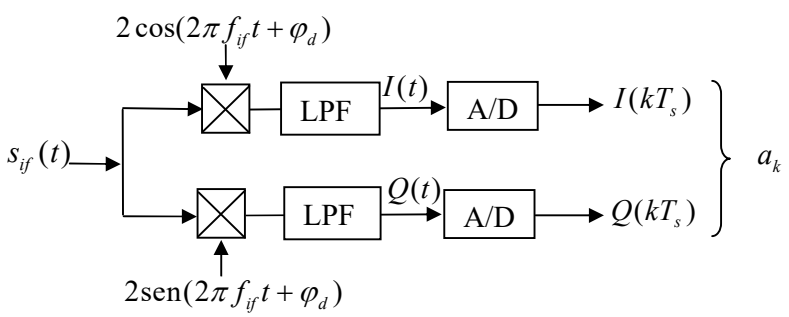


Figura 8.5: Demodulador complejo seguido del conversor A/D.

El muestreo en cuadratura consiste en digitalizar la envolvente compleja de la señal en frecuencia intermedia (8.12) (incluido el ruido) después de trasladar su espectro a la banda base (e.d.: centrado en el origen de frecuencias) reteniendo la señal útil (e.d: PRBS más código C/A más Doppler efectivo f_D^i). Por razones de brevedad y simplicidad, sólo expondremos la técnica más clásica del muestreo en cuadratura basada

*En rigor el centro de ambas bandas estaría en $\pm(f_{if} + f_D^i)$, pero en la práctica $f_{if} \gg f_D^i$.

en una etapa de demodulación analógica compleja seguida de otra de muestreo (ver Fig. 8.5)*.

La primera parte de la demodulación compleja consiste en mezclar la señal $s_{if}(t)$ (Ec.(8.12)) con las partes real e imaginaria de la señal compleja $2\exp(j2\pi f_{if}t)$ generada en el receptor. A continuación del mezclado, los filtros pasabajos (LPF) cumplen varias funciones claves: en primer lugar, suprimen las bandas superiores centradas en armónicos superiores de f_{if} resultantes del mezclado, en segundo lugar, limitan la señal al ancho de banda útil $|f| \le B$ y en tercer lugar filtran el ruido fuera de la banda útil impidiendo que éste se "pliegue" sobre dicha banda (efecto *aliasing*) distorsionando la señal discreta resultante del muestreado posterior. Supondremos que la densidad espectral de potencia del ruido pasabanda en la banda efectiva $|f \pm f_c| < B$ es $N_0/2$.

Expresando en la (8.12) el coseno como suma de exponenciales complejas y usando la representación (8.8) para el ruido pasabanda efectivo, las señales a la salida de ambos LPF resultan ser las componentes real e imaginaria de la envolvente compleja de la señal útil en la banda base:

$$\begin{aligned} a(t) &= I(t) + jQ(t) = \sum_{i=1}^{K} A^i D^i(t-\tau_u^i) CA^i(t-\tau_u^i) \exp(j(2\pi f_D^i t + \phi_u^i)) + n_{bb}(t) \\ I(t) &\triangleq \sum_{i=1}^{K} A^i D^i(t-\tau_u^i) CA^i(t-\tau_u^i) \cos(2\pi f_D^i t + \phi_u^i) + n_I(t); \\ Q(t) &\triangleq \sum_{i=1}^{K} A^i D^i(t-\tau_u^i) CA^i(t-\tau_u^i) \operatorname{sen}(2\pi f_D^i t + \phi_u^i) + n_Q(t) \end{aligned} \tag{8.14}$$

Donde, se usó la definición:

$$\phi_u^i \triangleq \phi^i - \varphi_{if} \tag{8.15}$$

Las magnitudes τ_u^i, f_D^i y ϕ_u^i varían lentamente con el tiempo y son desconocidas a priori. La señal compleja $a(t)$ a la salida del demodulador es muestreada con periodo T_s adaptado al ancho de banda de los LPF (<1/2B según Shannon-Whittaker, ver Capítulo 2) de lo cual resulta la secuencia compleja:

$$a_k = I(kT_s) + jQ(kT_s) = \sum_{i=1}^{K} A^i D^i(kT_s - \tau_u^i) CA^i(kT_s - \tau_u^i) \exp(j(2\pi f_D^i kT_s + \phi_u^i)) + n_{bbk} \tag{8.16}$$

donde $n_{bbk} = n_{Ik} + jn_{Qk}$ es la secuencia compleja resultante de muestrear el ruido aditivo complejo continuo en banda base ($|f| \le B$) $n_{bb}(t)$ limitado en frecuencia por el LPF con n_{Ik} y n_{Qk} secuencias reales, gaussianas, centradas y conjuntamente descorrelacionadas. De acuerdo con lo visto sobre el ruido blanco muestreado en el Párrafo 2.5.1 del

* Ver Parkinson/Spilker, 1996; Vol. 1 Chap. 8, para la descripción de un procedimiento basado en la discretización directa de la señal $s_{if}(t)$, conocido como *pass-band IF-sampling*, ampliamente usado en los receptores modernos definidos por *software.*

Capítulo 2 y la representación (8.8), se tiene $E\{n_{Ik}^2\}=E\{n_{Qk}^2\}=N_0/T_s$, de lo cual resulta que la función de auto-correlación del proceso complejo discreto n_{bbk} es*:

$$E\{n_{bbk}n_{bbl}^*\}=\delta_{kl}2N_0/T_s;\ \text{con}\ \delta_{kl}=1\ \text{si}\ k=l\ \text{y}\ \delta_{kl}=0\ \text{si}\ k\neq l \tag{8.17}$$

8.3.4 Adquisición de los satélites en vista

Resta aún extraer, de la señal discreta a_k de la (8.16), la información crucial requerida por el receptor para resolver la navegación, a saber: a) el código $CA^i(t)$ que determina el único satélite que lo usa, b) τ_u^i: el tiempo de tránsito entre el satélite i y el receptor (medida de la distancia radial), c) f_D^i: el desplazamiento Doppler (medida de su velocidad radial), d) $D^i(t)$: la cadena de bits de datos que contiene el mensaje emitido por el satélite i, finalmente, e) la fase ϕ_u^i que, cuando está disponible, permite, como veremos más adelante, el posicionamiento de alta precisión mediante métodos interferometricos.

Se entiende por adquisición de un satélite con señal presente en la antena del receptor, a la determinación de τ_u^i y f_D^i junto con la detección del código $CA^i(t)$ específico del satélite que emite la señal. A continuación resumimos este procedimiento cuyos detalles así como los principios más generales del diseño de los receptores GPS modernos pueden consultase en Kaplan/Hegarty, 2006, Misra/Enge, 2006 ó Parkinson/Spilker, 1996.

La secuencia discreta a_k es correlacionada numéricamente con la siguiente señal discreta generada en el receptor en sincronía con el muestreo (8.16) en función del código CA^i del satélite buscado:

$$\begin{aligned} x_k^i(\hat{\tau}_n^i,\hat{f}_{Dn}^i,\hat{\phi}_n^i) &= CA^i(kT_s-\hat{\tau}_n^i)\exp(j(2\pi\hat{f}_{Dn}^i kT_s+\hat{\phi}_n^i)) \\ &= X_k^i(\hat{\tau}_n^i,\hat{f}_{Dn}^i)\exp(j\hat{\phi}_n^i) \end{aligned} \tag{8.18}$$

Los valores $\hat{\tau}_n^i,\hat{f}_{Dn}^i,\hat{\phi}_n^i$ se mantienen constantes durante períodos de longitud fija $T_{in}=NT_s$, llamados de integración coherente e indexados con el índice n, en los cuales, el bit de datos de $D^i(t)$ es supuesto constante (0 ó 1). Para reducir la probabilidad de que el bit de datos (de 20*ms* de duración) cambie de signo en T_{in}, este periodo se elige igual a sólo unos pocos *ms*.

Para cada satélite visible (o potencialmente visible) y cada período T_{in} se forman las siguientes sumas de productos entre las señales complejas (8.16) y (8.18) indexadas con n:

$$r_n^i(\hat{\tau}_n^i,\hat{f}_{Dn}^i,\hat{\phi}_n^i)=\sum_{k=(n-1)N}^{nN} a_k x_k^{*i}(\hat{\tau}_n^i,\hat{f}_{Dn}^i,\hat{\phi}_n^i)\ ;\quad i=1,\ldots,K \tag{8.19}$$

* Se usa la notación: $v^*=conj(v)$; $v\in\mathbb{C}$.

La secuencia r_n^i constituye la medición fundamental que produce un receptor GPS respecto del satélite *i*. Con base en estas medidas se generan los "observables" defindos mas adelante y que son requeridos por la función de navegación que ejecuta el software del propio receptor.

Gracias a la ortogonalidad (descorrelación) entre secuencias PRBS Gold de máxima longitud diferentes, este procedimiento numérico (conocido como *"matching filtering",* Parkinson/Spilker, 1996) "selecciona" la señal proveniente del satélite *i* (en caso de estar presente en la antena) por ser la única para la cual la correlación r_n^i será apreciable, en tanto que la correlación con las otras señales aparecerá casi como ruido puro. De este modo, para $\Delta f_n^i \triangleq f_D^i - \hat{f}_{Dn}^i$ y $\delta\phi_n^i \triangleq \phi_u^i - \hat{\phi}_n^i$, al final del *n*-ésimo período, el valor acumulado en el *i*-ésimo correlador (8.19), *i*=1,...,*K,* se expresa según:

$$\begin{aligned} r_n^i(\hat{\tau}_n^i, \hat{f}_{Dn}^i, \hat{\phi}_n^i) &\approx A^i D_n^i \sum_{k=(n-1)N}^{nN} CA^i(kT_s - \tau_u^i) CA^i(kT_s - \hat{\tau}_n^i) \exp(j(2\pi(\Delta f_n^i)kT_s + \delta\phi_n^i)) + \upsilon_n \\ \upsilon_n &= \sum_{k=(n-1)N}^{nN} n_{bbk} x_k^{*i}(\hat{\tau}_n^i, \hat{f}_{Dn}^i, \hat{\phi}_n^i) \end{aligned} \tag{8.20}$$

Dado que la secuencia a_k es gaussiana, que el ruido complejo discreto n_{bbk} es descorrelacionado y que las x_k^i ; *i*=1,...,*K,* son deterministas, la secuencia compleja υ_n también es gaussiana, descorrelacionada y centrada con variancia dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_\upsilon^2 &= E\{\|\upsilon_n\|^2\} = E\{\left[\sum_k n_{bbk} x_k^{*i}\right]\left[\sum_l n_{bbl} x_l^{*i}\right]^*\} \\ &= \sum_{k,l} E\{n_{bbk} n_{bbl}^*\} x_l^i x_k^{*i} = N_0/T_s \sum_k \|x_k^i\|^2 = NN_0/T_s \end{aligned} \tag{8.21}$$

La última igualdad surge de usar la expresión para la función de auto-correlación de n_{bbk} (8.17) y del hecho que, por (8.18), $\|x_k^i\|=1$; *i*=1,...,*K*.

Introducimos los desvíos, $\Delta\tau_n^i \triangleq \tau_u^i - \hat{\tau}_n^i$ también supuestos constantes en cada intervalo T_{in}. Para valores de Δf_n^i y $\Delta\tau_n^i$ alejados de cero, el término determinista de las correlaciones complejas indexadas por *n* en la (8.20) resultará muy pequeño comparado con el desvío estándar $\sqrt{NN_0/T_s}$ en la (8.21) por lo cual quedará subsumido en la secuencia aleatoria υ_n. En cambio, para $\Delta\tau_n^i \to 0$ y $\Delta f_n^i T_s \ll 1$, la expresión (8.20) admite la siguiente aproximación que resulta ser independiente de los valores absolutos $\hat{\tau}_n^i$ y $\hat{f}_{Dn}^i$ (ver: Kaplan/Hegarty (2006), Misra/Enge (2006), Parkinson/Spilker (1996)):

$$r_n^i(\hat{\tau}_n^i, \hat{f}_{Dn}^i, \hat{\phi}_n^i) \approx A^i N D_n^i R(\Delta\tau_n^i) \mathrm{sinc}(\Delta f_n^i T_{in}) \exp(-j\Delta\psi_n) + \upsilon_n \tag{8.22}$$

Donde se denota: $\Delta\psi_n = \delta\phi_n^i + \pi\Delta f_n^i T_{in}$, $\mathrm{sinc}(x) \triangleq \sin(\pi x)/\pi x$, en tanto que $R(\Delta\tau_n^i)$ representa la función de auto-correlación de la secuencia PRBS de tipo Gold. Esta

última posee una cúspide aguda para $\Delta\tau_n^i \to 0, R(\Delta\tau_n^i) \to 1$ y resulta prácticamente nula para $\Delta\tau_n^i \neq 0$. El módulo de la expresión (8.22) es conocido como la envolvente de la correlación y tiene su máximo cuando, simultáneamente, $\Delta f_n^i, \Delta\tau_n^i \to 0$.

Durante la adquisición de un satélite, el receptor evalúa en cada intervalo T_{in} el módulo $\left\| r_n^i(\hat{\tau}_n^i, \hat{f}_{Dn}^i) \right\|$ sobre una grilla del intervalo rectangular: $\left\{ \hat{\tau}_n^i \in [0,1023]\mu seg \right\} \times \left\{ \hat{f}_{D,n}^i \in [-10,10] KHz \right\}$. Notar que el módulo no depende del desvío de fase $\delta\phi_n^i$, por los que la adquisición del satélite no requiere conocer este parámetro. Los puntos de la grilla del primer intervalo lineal (para $\hat{\tau}_n^i$) están separados en $T_c/2$ [seg] en tanto que los del segundo (para $\hat{f}_{Dn}^i$), lo están en $1/(2T_{in})Hz$. Esto conforma un total de 2046 puntos de tiempo por $40.000 T_{in}$[mseg] puntos de frecuencia lo que hace un total de ~8x10^8 puntos de test. Los índices i que acusen un pico aislado de $\left\| r_n^i(\hat{\tau}_n^i, \hat{f}_{Dn}^i) \right\|$ superando un cierto umbral de detección revelarán la existencia del satélite i en el campo de visón directa, en tanto que su ubicación en el plano de búsqueda se corresponderá con los estimados $\hat{f}_{Dn}^i$ y $\hat{\tau}_n^i$ del satélite detectado (ver Fig. 8.6).

A mayor N menor es la variancia del ruido residual de $\left\| r_n^i(\hat{\tau}_n^i, \hat{f}_{Dn}^i) \right\|$ fuera del máximo y por lo tanto más pequeño el umbral de detección requerido, en consecuencia, menor será la probabilidad de una falsa detección. Sin embargo, esta ventaja es contrapesada por el hecho de que grandes valores de N implican una alta probabilidad de invalidar la hipótesis de que D_n^i permanezca constante en un dado intervalo. Encontrar uno o más satélites visibles puede durar varios minutos cuando el receptor desconoce su tiempo y posición, a esta circunstancia se la denomina "arranque en frío".

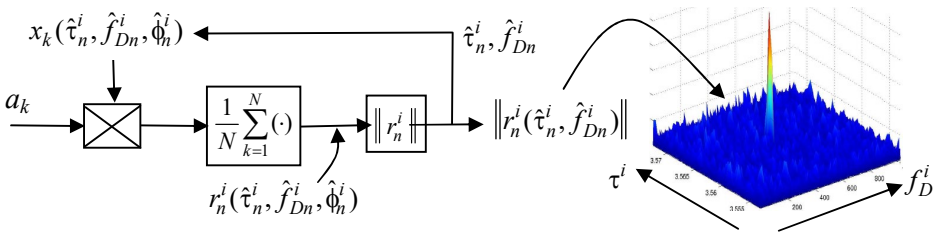


Figura 8.6: Esquema de lazo de búsqueda para la adquisición del satélite i.6

8.3.5 Rastreo de la señal y demodulación del tren de bits de datos

Una vez adquirido un satélite se inicia el proceso de sintonía de los parámetros y de seguimiento del código y de la portadora. Este proceso consiste en la determinación fina (con la mayor precisión posible) y rastreo en el tiempo del par ($\hat{\tau}_n^i \to \tau_u^i, \hat{f}_{Dn}^i \to f_D^i$) para cada satélite adquirido. Esto se realiza vía sendos lazos de sincronía denominados *Delay Lock Loop (DLL)* y *Phase Lock Loop* (*PLL*). El primero sincroniza el código del satélite con el generado por el receptor y el segundo, permite, simultáneamente, el seguimiento de la fase $\hat{\phi}_n^i \to \phi_u^i$ y de la frecuencia de la portadora (desvío Doppler

efectivo). El momento de inicio del seguimiento de la fase es denominado "*enganche*" o instante de *phase lock.*

Asegurados la sintonía y el rastreo en el tiempo de los valores instantáneos de los parámetros (τ_u^i, f_D^i), recién entonces es posible demodular el tren de pulsos de datos que permitirán leer el mensaje que envía cada satélite, pero, para esto, el rastreo de la señal debe estar asegurado durante toda la duración del mismo. Para valores pequeños de los desvíos $\Delta\tau_n^i \to 0, \Delta f_n^i \to 0$ la correlación (8.22) medida por el receptor resulta aproximable mediante la siguiente función compleja en la que interviene el bit de datos y el error en la estimación de la fase $\delta\phi_n^i \triangleq \phi_u^i - \hat{\phi}_n^i$ de acuerdo con:

$$r_n^i \approx A^i N D_n^i \exp(-j\delta\phi_n^i) + \upsilon_n = R_{Rn}^i + jR_{In}^i \tag{8.23}$$

La expresión (8.23) constituye la base de los lazos digitales de seguimiento de la fase (*Phase Lock Loop PLL*) cuyo principio de funcionamiento se esquematiza en la Fig. 8.7. La medida del desvío $\delta\phi_n^i$ es calculada con la ayuda de un discriminador en función de las partes real e imaginaria de la variable r_n^i, con esta medida se actualiza la estimación del ángulo $\hat{\phi}_n^i$ en el próximo intervalo con el cual usada para rotar al vector complejo $X_k^i(\hat{\tau}_n^i, \hat{f}_n^i)$ en un lazo que tiende a reducir $\delta\phi_n^i$. Como veremos, el seguimiento preciso de la fase ϕ_u^i es una función de gran importancia en la navegación de alta precisión, pero además, para valores pequeños de $\delta\phi_n^i$, el signo de la parte real de r_n^i coincide con el "valor" del bit de datos D_n^i, lo que permite decodificar el mensaje.

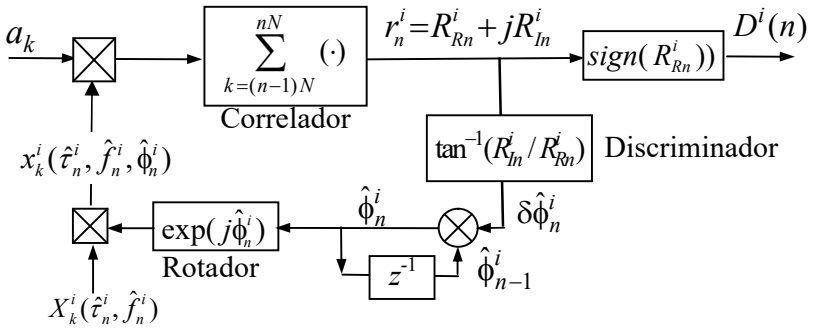


Figura 8.7: Lazo de Costas para el seguimiento de fase y demodulación de los bits de datos.

Finalmente, la Fig. 8.8 resume los procesos al interior del receptor GPS. En ella se muestra en forma esquemática el tratamiento en paralelo de cada canal de datos caracterizado por el código CDMA específico a cada satélite visible.

Las tecnologías introducidas en este párrafo son temas cruciales de la teoría y del diseño de los receptores GPS. Sin embargo, un tratamiento detallado de las mismas excede los objetivos del presente volumen, por esto recomendamos fuertemente al lector interesado consultar algunas de las excelentes obras que tratan el tema *in-extenso* tales como:

Kaplan/Hegarty (2006), Cap. 5; Misra/Enge (2011), Caps. 9 a 11 y Parkinson/Spilker (1996), Cap. 8.

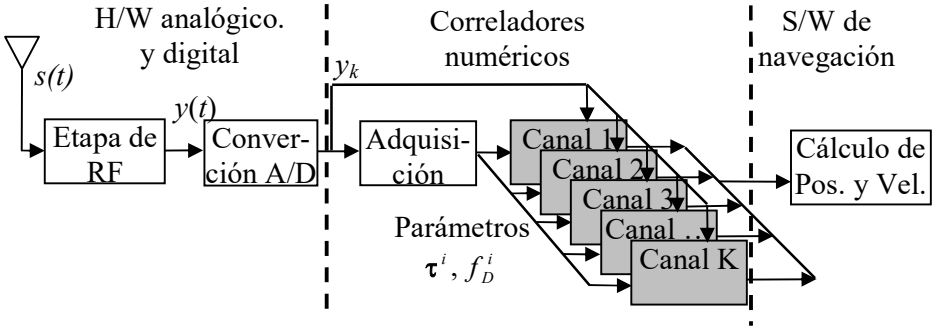


Figura 8.8: Esquema simplificado de un receptor GPS.

8.4 Contenido del mensaje GPS

Como ya se ha dicho, cada satélite del segmento espacial GPS trasmite datos que le son propios y datos globales de la constelación. El primer conjunto de datos contiene: a) los parámetros orbitales del satélite y sus derivadas temporales para permitir localizarlo en el instante de transmisión y b) una estimación del desvío del reloj abordo respecto del tiempo global GPS así como de su derivada temporal. Estos datos, requeridos para el cálculo de la posición y de la velocidad, denominados de navegación son actualizados cada 30seg, siendo ésta la tasa más alta de renovación de información en el mensaje. El segundo grupo de datos contiene información relativa al estado de la constelación en su conjunto y a las condiciones de propagación de las señales. Incluye los parámetros del modelo ionosférico*, la salud y estado de cada satélite, el número de la semana y el "almanaque". Este último es un conjunto de datos de efemérides de baja precisión de toda la constelación actualizados una vez por semana. El almanaque permite al receptor saber que satélites están visibles o cuando aparecerán sobre el horizonte con sólo adquirir la señal de uno cualquiera de ellos.

8.4.1 Estructura de la trama del mensaje GPS

La Fig. 8.8 describe la trama del mensaje transportado por la señal GPS. La misma esta organizada en grupos (*frames*) de 5 palabras (*subframes*) de 300 bits de longitud cada una. A 50bps la duración de cada palabra es de 6seg y la de un *frame* de 30seg. El mensaje completo toma 25 *frames* lo que totaliza una duración de 12,5min. Los primeros 3 *subframes* de cada *frame* contienen información específica del satélite (corrección de tiempo y de efemérides, ver Fig. 8.9) accesible al receptor cada 30seg. Los *subframes* 4 y 5 de cada *frame* contienen información que es común a todos los satélites y constituyen las páginas del mensaje que se completará en 25 *frames*. Estas páginas albergan los parámetros del modelo ionosférico, el almanaque y el estado de salud de la constelación. Los primeros dos módulos de cada palabra tienen un significado especial. El módulo TLM (*telemetry word)* contiene un patrón fijo de 8 bits de sincronía que indica el inicio de cada palabra. Cada módulo HOW (*hand-over word*) contiene el tiempo de inicio de la palabra siguiente en módulos de 6 seg según el reloj

*Modelo de Klobuchard (Parkinson/Spilker, 1996).

del satélite. Esta información es crucial para la navegación, ya que constituye la base de tiempo que usa el receptor para calcular el instante de emisión de la señal.

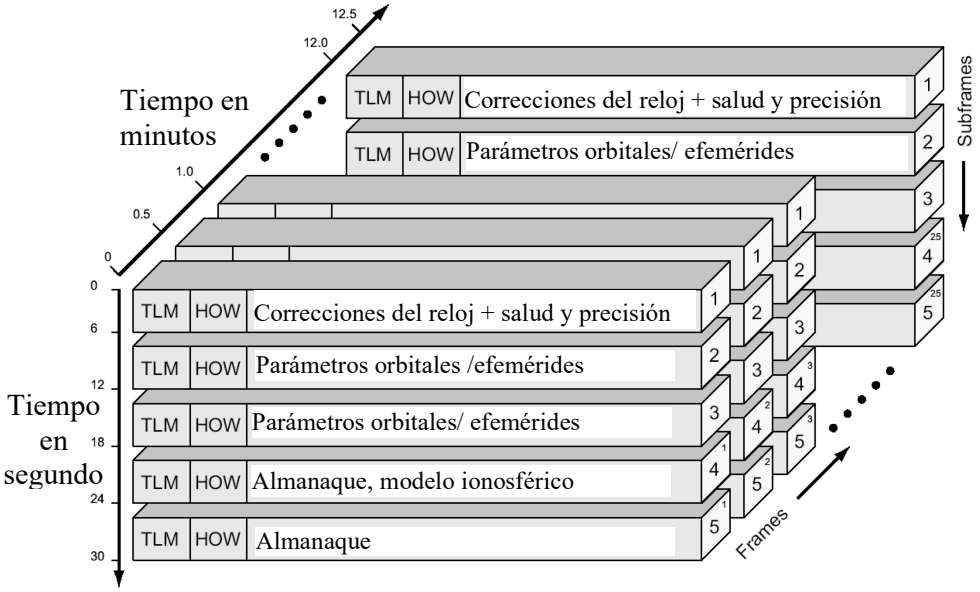


Figura 8.9: Estructura del mensaje GPS.

Capítulo 9
El Receptor GPS
Como Sensor Exoceptivo

Si bien un receptor de la constelación GPS (o en general GNSS) esta diseñado para determinar y proveer al usuario su posicionamiento y velocidad en terna ECEF, es conveniente estudiar cuidadosamente las variables primarias que efectivamente mide y sobre las cuales basa sus cálculos. La descripción precisa de estas medidas, designadas también como "*datos crudos*" u "*observables*", tiene un gran interés práctico dado que permiten: a) cuantificar las imprecisiones en el cálculo de las variables de navegación que entrega el dispositivo al usuario; b) discernir entre las condiciones de uso bajo las cuales estas medidas son mas sensibles a las fuentes de error; c) arbitrar procedimientos que hagan más eficiente el uso de las mismas y d) usarlas directamente en esquemas de navegación integrada fusionándolas con datos inerciales o procedentes de otros sensores exoceptivos. La última opción, considerada en el Capítulo 10, convierte al receptor GNSS en un instrumento exoceptivo más a bordo de un vehículo y presenta particular interés en el contexto de las tecnologías expuestas en este volumen.

Se modelan matemáticamente los observables disponibles en un receptor así como los errores que afectan distintamente a cada uno ellos y se evalúa la importancia relativa de estos errores dependiendo del uso que se haga de las medidas. Se discuten las diferencias significativas en lo que respecta a precisión y exactitud entre el observable *pseudo-rango,* obtenido a partir del lazo seguimiento del código PRBS de cada satélite, y los observables *Doppler* y de fase, medidos con la ayuda del lazo de seguimiento de la portadora. A pesar de la precisión con que es posible medir la fase, es inherente este observable un sesgo invariante pero de magnitud arbitrariamente grande llamado *ambigüedad de fase*.

Basadas en medidas adquiridas por más de un receptor, las técnicas llamadas diferenciales permiten compensar y aun suprimir ciertos errores correlacionados espacialmente. Con ellas se consiguen aumentos importantes en la precisión del posicionamiento tanto relativo como absoluto. Las mismas técnicas son usadas para formular nuevos observables diferenciales de fase con residuos centimétricos (y aún milimétricos) lo cual habilita la utilización de avanzados métodos numéricos para la determinación época por época de la ambigüedad de fase. Eso abre un enorme campo de aplicaciones de los receptores GPS a la navegación de muy alta precisión.

Ciertos receptores son capaces de procesar más de una portadora lo que aumenta la cantidad de observables y por tanto de información disponible en cada instante. La consecuencia es también una mayor precisión en las variables de navegación estimadas que de ellos se deriven. La existencia actualmente de más de una constelación GNSS operativa y los planes de habilitar nuevas en un futuro próximo, ha estimulado a muchos fabricantes a ofrecer al mercado receptores multi-constelación y multi-frecuencia. La difusión y popularización de estos dispositivos conllevará en muy corto plazo la disponibilidad de precisiones, confiabilidad, redundancia e integridad insospechadas hace tan sólo unos pocos años atrás. Algunas industrias como la de los vehículos

autónomos, la navegación aerocomercial, la industria espacial y los servicios personales serán fuertemente impactadas por esta evolución tecnológica.

9.1 Observables de un receptor GPS

Por cada satélite visible de la constelación GPS, un receptor puede realizar hasta tres mediciones directas llamadas *observables*. Ellas son: el *pseudo-rango,* basado en el código PRBS específico para cada satélite, la *fase Doppler (o de batido*) de la portadora y el *desvío Doppler* efectivo en frecuencia entre las portadoras de la señal en el espacio y la generada localmente. Como se recordará, este desvío es consecuencia, a la vez, de la velocidad radial relativa entre el receptor y el satélite y de las diferencias entre las derivas de los respectivos relojes.

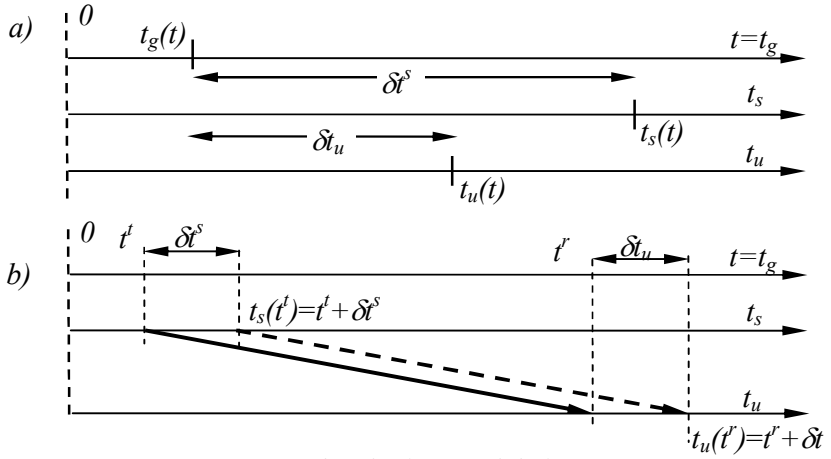


Figura 9.1: Escalas de tiempo del sistema GPS.

La formulación del modelo matemático de los tres observables requiere tener en cuenta la existencia de (al menos) 3 escalas de tiempo presentes en el problema, cada una de ellas asociadas a un reloj independiente (ver Fig, 9.1). Llamaremos: t_g al tiempo global de la constelación que, por ser el más preciso, lo equiparamos al tiempo absoluto t ($\equiv t_g$); $t_s(t)$ denota el tiempo que indica el reloj del satélite en el instante absoluto t, en tanto que, $t_u(t)$ es el tiempo indicado por el reloj del receptor (usuario) en el mismo tiempo absoluto (ver Fig. 9.1 a). Los desvíos instantáneos respecto del tiempo absoluto de los tiempos indicados por los relojes, respectivamente del satélite y del usuario se definen como:

$$\begin{aligned} \delta t^s(t) &\triangleq t_s(t) - t \\ \delta t_u(t) &\triangleq t_u(t) - t \end{aligned} \tag{9.1}$$

La fase de la señal que abandona la antena del satélite en el instante de transmisión absoluto t^t llega a la antena del receptor en el instante absoluto de recepción t^r. Sin embargo, el tiempo que el reloj del satélite estampó en el mensaje al momento de la transmisión es $t_s(t^t) = t^t + \delta t^s$, en tanto que, según el reloj del usuario, el instante de recepción es: $t_u(t^r) = t^r + \delta t_u$ (ver Fig. 9.1 b)). De este modo, en el mejor de los casos,

en lugar del tiempo "real" de propagación de la señal $\tau_u^s = t^r - t^t$, sólo será posible medir mediante los relojes involucrados el *pseudo-tiempo* de propagación dado por:

$$\hat{\tau}_u^s \triangleq t_u(t^r) - t_s(t^t) = \tau_u^s + \delta t_u(t^r) - \delta t^s(t^t) \tag{9.2}$$

Efectos atmosféricos

En los más de 20.000Km de su trayectoria a la Tierra la señal GPS atraviesa medios atmosféricos con diversos índices de refracción que afectan su fase y velocidad de propagación instantáneas. En algún punto entre los 1000 y 600Km de altura entra en la ionosfera y mucho más cerca, en los últimos 50Km, inicia su tránsito por la troposfera. Estas dos capas de la atmósfera son las que más afectan la propagación e inciden de modo tal en el tiempo total de propagación que resulta imprescindible tenerlas en cuenta en un modelo de las mediciones GPS. Los efectos de ambas capas son diferentes tanto cuantitativa como cualitativamente y por ende convendrá distinguirlos.

La ionosfera, considerada como un plasma iónico anisotrópico e inhomogéneo con densidad electrónica función del tiempo y del espacio, induce un efecto dispersivo sobre la radiación en banda L, es decir, una variación del índice de refracción con la longitud de onda. Así, al atravesar tal medio, las componentes frecuenciales de la señal dentro el ancho de banda base transportado por la portadora modulada se ven afectadas diferencialmente en sus velocidades y fases. El resultado es que la portadora viaja a la llamada *velocidad de fase* v_f, distinta a la de la envolvente de modulación, llamada *velocidad de grupo* v_g, con la cual se propaga la información montada sobre la portadora. Información ésta que, en el caso de la señal GPS corresponde en banda base a la del código PRBS de cada satélite. La relación teórica entre estas velocidades queda expresada mediante la siguiente fórmula que relaciona los correspondientes índices de refracción: n_f=c/v_f y n_g=c/v_g.*

$$n_g = n_f + f\frac{dn_f}{df} \tag{9.3}$$

Para un plasma ideal, n_f y n_g admiten los siguientes modelos aproximados:

$$n_f \approx 1 - \frac{40.3\eta_e}{f^2} \Rightarrow n_g \approx 1 + \frac{40.3\eta_e}{f^2} \tag{9.4}$$

Donde, η_e representa la densidad electrónica local del plasma y la segunda de las (9.4) se obtiene de la primera utilizando la (9.3). Claramente, de las (9.4) resulta un índice de refracción de fase menor que la unidad lo que implica una velocidad de fase superior a la velocidad de la luz en el vacío. Por otra parte, la velocidad de grupo resulta inferior a *c*, por lo cual, la recepción del código montado sobre la portadora se verá retrasada con respecto de una onda que viaje en el vacío en un lapso de tiempo dado por:

* Consultar Misra/Enge, 2006, subcap. 4.3 para una clara descripción de este efecto.

$$I_u^s(f) \triangleq \int_{satelite}^{usuario} \left(\frac{1}{v_g} - \frac{1}{c}\right) dl = \frac{1}{c} \int_{satelite}^{usuario} (1 - n_g) dl = \frac{40.3}{cf^2} \int_{satelite}^{usuario} \eta_e dl$$
$$= \frac{40.3}{cf^2} TEC_u^s = \frac{K_u^s}{cf^2} \tag{9.5}$$

Donde TEC_u^s (*total electron count*) es el n° total de electrones dentro de un "tubo" de $1m^2$ de sección transversal que contiene la trayectoria de la onda en la ionosfera y $K_u^s = 40.3 TEC_u^s$. El retraso I_u^s se corresponde con un aumento aparente de la distancia satélite-usuario que, en la dirección zenital, es del orden de los 2m a 10m. Un razonamiento análogo, usando ahora la 1ª de las (9.4), demuestra que la fase de la portadora se adelanta respecto de la fase de la misma señal en el vacío, resultando una reducción aparente del tiempo de viaje de la portadora en el mismo lapso I_u^s. Como veremos, este fenómeno se traduce en una diferencia significativa entre los modelos de las mediciones del pseudo-rango y de la fase. Como ya se dijo, el sistema GPS trasmite en el mensaje los parámetros del modelo *de Klobuchard* de la ionosfera usado para corregir el error ionosférico en el receptor. Cabe destacar sin embargo que dicho modelo es muy aproximado, por lo cual, luego de su aplicación subsisten errores que pueden llegar hasta el 40% del retraso ionosférico. El sistema GALILEO prevé usar un modelo mucho más preciso.

En sus últimos, aproximadamente, 50 Km, la señal atraviesa la troposfera, un medio esencialmente neutro cuyo índice de refracción en banda L es prácticamente invariante con la frecuencia, moderadamente estable con el tiempo y ligeramente superior a la unidad*. Esto se traduce en una reducción uniforme de la velocidad de propagación de las componentes frecuenciales de la banda pasante. El retardo *troposférico* T_u^s correspondiente se corresponde con un alargamiento aparente cT_u^s en la distancia satélite-usuario que oscila entre los 2,5m y 25m dependiendo de las condiciones atmosféricas y de la elevación del satélite sobre el horizonte.

Existe una variedad de modelos del retraso troposférico de la señal GPS que difieren en sus hipótesis y suposiciones básicas acerca de los perfiles estándar en altura de la temperatura y de la humedad a la latitud del lugar. Sin embargo, el sistema GPS no provee ninguna información sobre los parámetros de estos modelos por lo que, si fuera requerido, el usuario debe implementar su propio modelo con base en datos de la atmósfera local. Al igual que con el retraso/adelanto ionosférico, la oblicuidad de la línea de vista al satélite determina la longitud del camino dentro del medio y, por tanto, deberá ser tenida en cuenta en los modelos respectivos.

9.1.1 Observable de código o *pseudo-rango*

Utilizando, por un lado, el valor del instante de transmisión medido por el reloj del satélite "estampado" en la trama del mensaje emitido y, por el otro, el tiempo de recepción de la misma trama determinado por el reloj del receptor, este último determina su *pseudo-rango* ρ_u^s respecto del satélite multiplicándolo por la velocidad de la luz en el vacío *c* a la medida del pseudo-tiempo $\hat{\tau}_u^s$ indicado en la (9.2).

* Al nivel del mar el índice es n≃1.0003 y mucho más cercano a la unidad por encima de los 10Km.

$$\rho_u^s \triangleq c(t_u(t^r) - t_s(t^t)) + \text{"}error\ de\ medición\text{"} \tag{9.6}$$

La medida ρ_u^s la provee el lazo *Delay Lock Loop (DLL)*, introducido en el Capítulo anterior, encargado de sincronizar el código del satélite con el generado por el receptor. Por esta razón este observable es también denominado *observable de código*.

El error de medición del pseudo-rango en la (9.6) es consecuencia de errores en la medida del pseudo-tiempo $\hat{\tau}_u^s$ atribuibles esencialmente a dos causas de características aleatorias a saber: a) la relación señal/ruido en el receptor y b) las reflexiones de la señal en zonas aledañas a la antena superpuestas a la señal directa llamado efecto *multi-pasos*. Aunque con resultados cuantitativamente distintos los mismos efectos están presentes en el observable de la fase que trataremos en un próximo párrafo.

El ruido superpuesto a la señal induce errores de sincronía entre los flancos de los bits correspondientes, por un lado, al código PRBS de la señal en el espacio y por otro al del mismo código generado localmente en el receptor. Esto introduce un error, considerado aditivo y aleatorio, en la medida del pseudo-tiempo $\hat{\tau}_u^s$ que se acentúa para un baja relación señal/ruido. Como es sabido, sobre esta relación influye, entre otros, la altura del satélite sobre el horizonte. También incide en este error la duración del bit del código, por lo cual, la magnitud del mismo se verá reducida al aumentar el "*chip rate*" de la señal, lo que hace a la modulación con código P(Y) más inmune a este ruido que aquella modulada con el código C/A. Para los estándares actuales, el efecto de este error sobre el observable de código C/A resulta dado por: $\varepsilon_\rho^s \to \sigma_{\varepsilon\rho} \in (0.5m, 1m)$.

Las reflexiones de la señal en zonas aledañas a la antena, que inciden sobre ésta luego de recorrer caminos más largos que la señal en línea de vista directa, interfieren la señal en línea directa alargando en forma aleatoria el tiempo efectivo promedio del recorrido de la señal. Este efecto llamado "multi-pasos" depende de la topografía local, de las constantes dieléctricas de los objetos circundantes, del diseño de la antena y de la dirección de propagación. Su magnitud guarda relación con la distancia de propagación durante la duración de un bit de código. El desvío en metros resultante por este efecto se denota cM_u^s. En función de ambos errores, junto con la (9.2), la (9.6) se rescribe como:

$$\rho_u^s \triangleq c\tau_u^s + c(\delta t_u(t^r) - \delta t^s(t^t)) + cM_u^s + \varepsilon_\rho^s \tag{9.7}$$

El tiempo τ_u^s se corresponde con la distancia geométrica en línea recta $R_u^s(\mathbf{P}^s, \mathbf{P}_u) = \left\| \mathbf{P}^s - \mathbf{P}_u \right\|$ entre el satélite ubicado en $\mathbf{P}^s$ y el usuario en $\mathbf{P}_u$ * mediante:

$$\tau_u^s = R_u^s / c + I_u^s + T_u^s + H; \tag{9.8}$$

En la cual se destacan las componentes ionosférica y troposférica del retraso atmosférico así como el retraso electrónico *H*. Si bien es dado considerar retrasos

*Si no se indica otra cosa, las posiciones y velocidades en este capítulo están expresadas en terna ECEF, estándar en los GNSS.

electrónicos específicos para el *hardware* del satélite y el del receptor, dado que ambos son estructuralmente constantes cada uno puede considerarse incluido en el desfasaje de tiempo del reloj respectivo: δt_u y δt^s. Con las definiciones anteriores, el modelo del pseudo-rango se rescribe como:

$$\rho_u^s = R_u^s(\mathbf{P}^s, \mathbf{P}_u) + c(I_u^s + T_u^s) + c(\delta t_u(t^r) - \delta t^s(t^t)) + cM_u^s + \varepsilon_\rho^s \tag{9.9}$$

Sin embargo, de cada satélite, el receptor sólo conoce la posición $\hat{\mathbf{P}}^s = \left[\hat{X}^s\ \hat{Y}^s\ \hat{Z}^s\right]^T \neq \mathbf{P}^s$ cuyas coordenadas (en terna ECEF) son determinadas propagando los datos de la última efeméride disponible del satélite hasta el instante de transmisión de la señal. La diferencia entre $\hat{\mathbf{P}}^s$ y la posición real $\mathbf{P}^s$ induce un error E^s en el pseudo-rango llamado error de efemérides y definido mediante:

$$R_u^s(\mathbf{P}^s, \mathbf{P}_u) = \left\|\hat{\mathbf{P}}^s - \mathbf{P}_u\right\| + E^s = (\breve{\mathbf{r}}_u^s)^T(\hat{\mathbf{P}}^s - \mathbf{P}_u) + E^s \tag{9.10}$$

Donde se introdujo el versor de línea de vista al satélite: $\breve{\mathbf{r}}_u^s = (\hat{\mathbf{P}}^s - \mathbf{P}_u)/\left\|\hat{\mathbf{P}}^s - \mathbf{P}_u\right\|$. Teniendo en cuenta esto último, el modelo completo de la medición del pseudo-rango resulta finalmente:

$$\rho_u^s = \left\|\hat{\mathbf{P}}^s - \mathbf{P}_u\right\| + E^s + c(I_u^s + T_u^s) + c(\delta t_u(t^r) - \delta t_s(t^t)) + cM_u^s + \varepsilon_\rho^s \tag{9.11}$$

Cuando convenga y por brevedad, en lo que sigue denotaremos $\hat{R}_u^s \triangleq \left\|\hat{\mathbf{P}}^s - \mathbf{P}_u\right\|$. Por cada satélite visible, la (9.11) es una medida de la distancia radial del vehículo a la posición estimada del satélite. Como veremos más adelante, esto permite determinar la posición del vehículo en terna ECEF usando medidas de pseudo-rangos respecto de cuatro o más satélites de la constelación visible por el receptor.

9.1.2 Observable de *fase*

Para la formulación del modelo del observable de fase debe tenerse en cuenta que tanto en el satélite como en el receptor, la potadora de frecuencia nominal f_o es generada por un oscilador que al mismo tiempo funciona como reloj que mide el tiempo local. Así, si Φ^s y Φ_u son las fases en ciclos, respectivamente, de la portadora del satélite y de su réplica en el receptor y si $[t_u^o, t_u]$ y $[t_s^o, t_s]$ son dos intervalos de tiempo medidos, respectivamente, por el reloj del receptor y el del satélite, de la condición de *oscilador-reloj* para cada portadora resulta la siguiente propiedad de linealidad de la fase respecto del tiempo medido:

$$\begin{aligned} \Phi_u(t_u) - \Phi_u(t_u^o) &= f_o\,(t_u - t_u^o) \\ \Phi^s(t_s) - \Phi^s(t_s^o) &= f_o\,(t_s - t_s^o) \end{aligned} \tag{9.12}$$

La derivada de la fase respecto del tiempo medido por cada reloj-oscilador es, naturalmente, su frecuencia nominal:

$$\frac{d\Phi^s}{dt_s} = \frac{d\Phi_u}{dt_u} = f_o \tag{9.13}$$

Dado que un evento ocurrido en el instante absoluto t ocurre, según cada reloj, respectivamente en los instantes $t_u(t) = t + \delta t_u(t)$ y $t_s(t) = t + \delta t^s(t)$, la propiedad (9.12) implica además que:

$$\begin{aligned} \Phi_u(t_u) &= \Phi_u(t + \delta t_u) = \Phi_u(t) + f_o \delta t_u \\ \Phi^s(t_s) &= \Phi^s(t + \delta t^s) = \Phi^s(t) + f_o \delta t^s \end{aligned} \tag{9.14}$$

Derivando las anteriores respecto del tiempo absoluto t, se obtienen las frecuencias "absolutas" de los respectivos osciladores-relojes que naturalmente difieren de la nominal:

$$\begin{aligned} f_u(t) &\triangleq \frac{d\Phi_u}{dt} = \frac{d\Phi_u}{dt_u}\frac{dt_u}{dt} = f_o\,(1 + \frac{d\delta t_u}{dt}) \\ f_s(t) &\triangleq \frac{d\Phi^s}{dt} = \frac{d\Phi^s}{dt_s}\frac{dt_s}{dt} = f_o\,(1 + \frac{d\delta t^s}{dt}) \end{aligned} \tag{9.15}$$

De aquí surgen las siguientes relaciones entre la frecuencia nominal, las absolutas locales y las derivadas respecto del tiempo absoluto (o derivas) de los desvíos temporales de los relojes respectivos.

$$\begin{aligned} D_u(t) &\triangleq \frac{d\delta t_u}{dt} = \frac{f_u - f_o}{f_o} \\ D_s(t) &= \frac{d\delta t^s}{dt} = \frac{f_s - f_o}{f_o} \end{aligned} \tag{9.16}$$

Con base en las (9.12) definimos la *fase total* $\Phi_u^s(t_u^r)$ [ciclos] como la diferencia entre la fase de la portadora nominal replicada en el receptor en el instante de recepción t_u^r (tiempo del receptor) $\Phi_u(t_u^r)$ [ciclos] y la fase de la portadora en el satélite en el instante de transmisión t_s^t (tiempo del satélite) $\Phi^s(t_s^t)$ [ciclos].

$$\Phi_u^s(t_u^r) \triangleq \Phi_u(t_u^r) - \Phi^s(t_s^t) \;\; [ciclos] \tag{9.17}$$

Introduciendo los desvíos temporales (9.1) de los respectivos relojes y el tiempo de propagación $\tau_u^s(t^r) = t^r - t^t$, la fase total en el instante de recepción en tiempo del usuario se rescribe como:

$$\Phi_u^s(t_u^r) = \Phi_u(t^r + \delta t_u) - \Phi^s(t^r - \tau_u^s(t^r) + \delta t_u) \;\; [ciclos] \tag{9.18}$$

Usando las condiciones de *reloj-oscilador* (9.14) se tiene:

$$\Phi_u^s(t_u^r) = \delta\phi_u^s(t^r) + f_o\tau_u^s(t^r) + f_o(\delta t_u - \delta t^s) \ \ [ciclos] \tag{9.19}$$

Donde se introdujo la *diferencia de fase sincrónica* en el tiempo t^r definida como:

$$\delta\phi_u^s(t^r) \triangleq \Phi_u(t^r) - \Phi^s(t^r) \tag{9.20}$$

A continuación se rescriben las condiciones (9.12) aplicadas el intervalo $[t^o, t^r]$ con t^o el tiempo absoluto de inicio del enganche de fase:

$$\Phi_u(t^r) - \Phi_u(t^o) = f_o(t^r - t^o) = \Phi^s(t^r) - \Phi^s(t^o) \tag{9.21}$$

Combinando las relaciones (9.20) y (9.21) se obtiene para la fase sincrónica:

$$\delta\phi_u^s(t^o) = \Phi_u(t^o) - \Phi^s(t^o) = \Phi_u(t^r) - \Phi^s(t^r) = \delta\phi_u^s(t^r) \tag{9.22}$$

Lo que demuestra que la fase sincrónica se mantiene invariante en tanto se verifique la condición de enganche de la portadora.

En el instante de enganche t_u^o del lazo de seguimiento de fase PLL, la fase que indicará el discriminador del lazo es $\phi_u^{s*}(t_u^o) \triangleq \Phi_u^s(t_u^o)(\text{mod},1)$, es decir, solamente la fracción de ciclo (mantisa) de la fase total, la cual convendrá escribir como:

$$\phi_u^{s*}(t_u^o) \triangleq \Phi_u^s(t_u^o) - N_u^s(t_u^o) \leftarrow \textit{mantisa de la fase total inicial} \tag{9.23}$$

Donde $N_u^s(t_u^o)$, llamada la *ambigüedad entera,* es la parte entera de la fase total $\Phi_u^s(t_u^o)$.

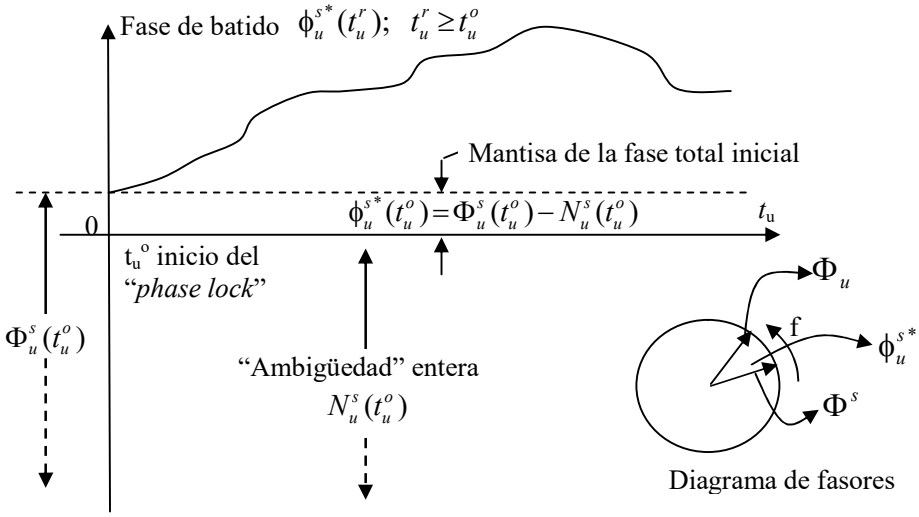


Figura 9.2: Evolución temporal de la fase de batido y diagrama de fasores.

A partir de t_u^o y en tanto el lazo PLL se mantenga enganchado, un diseño apropiado del receptor hace posible disponer de la medida de la fase relativa entre los fasores a partir de la condición inicial (9.23), es decir $\forall t_u^r \geq t_u^o$:

$$\phi_u^{s*}(t_u^r) \triangleq \phi_u^{s*}(t_u^o) + \Phi_u^s(t_u^r) - \Phi_u^s(t_u^o) = \Phi_u^s(t_u^r) - N_u^s(t_u^o) \tag{9.24}$$

El resultado es la fase *fase de batido* $\phi_u^{s*}(t_u^r)$ igual a la fase total instantánea $\Phi_u^s(t_u^r)$ descontada de la *ambigüedad entera* $N_u^s(t_u^o)$ constante e igual a su valor en el instante de enganche. Dicha fase, llamada también *fase Doppler* o *fase de portadora*, está representada pictóricamente en la Fig. 9.2.

Para asegurar el seguimiento continuo de la fase de batido, el receptor usa un contador interno que, según corresponda, se incrementa o decrementa en una unidad cada vez que la fase pasa por "0" (0 ó 2π en el diagrama de fasores de la Fig. 9.2). Así, $\phi_u^{s*}(t_u^r)$ se compone de una parte entera, almacenada en el contador, y una parte fraccionaria dada por la medición electrónica instantánea de la fase de batido (mod 2π). Al momento de interrumpirse la condición de enganche, la cuenta de ciclos enteros deja de tener validez. De reiniciarse el enganche, al nuevo período le corresponderá un nuevo valor N_u^s. Cuando una secuencia desenganche/re-enganche pasa inadvertida, el contador de ciclos enteros contendrá un valor erróneo durante el nuevo período de *phase-lock*, en este caso se habla de pérdida de ciclos o *cycle slip.*

Sustituyendo la (9.19) en la segunda de las (9.24), la fase de batido se reescribe en función del tiempo de tránsito como:

$$\begin{aligned}\phi_u^{s*}(t_u^r) &= f_o \tau_u^s(t^r) + f_o(\delta t_u - \delta t^s) + \delta\phi_u^s(t^o) - N_u^s(t_u^o) \\ &= f_o \tau_u^s(t^r) + f_o(\delta t_u - \delta t^s) + B_{\mathrm{u}}^s(t^o)\end{aligned} \tag{9.25}$$

Donde $B_{\mathrm{u}}^s(t^o) \triangleq \delta\phi_u^s(t^o) - N_u^s(t_u^o)$, llamada *ambigüedad real* o *sesgo de fase*, es constante en tanto no se interrumpa el enganche del receptor con la portadora del satélite. El término constante $\delta\phi_u^s(t^o)$ es conocido como *diferencia de fase sincrónica* o también como *ambigüedad fraccional.*

Finalmente, el modelo de la medida de $\phi_u^{s*}(t_u^r)$ resulta:

$$\phi_u^s(t_u^r) \triangleq \phi_u^{s*}(t_u^r) + [\text{efectos no modelados}] = \phi_u^{s*}(t_u^r) + f_o m_u^s + \varepsilon_\phi^s \tag{9.26}$$

Donde, similarmente al pseudo-rango, los efectos no modelados incluyen el error de seguimiento de la fase por parte del PLL ε_ϕ^s [ciclos], afectado directamente por la relación señal/ruido y modelable como un proceso aleatorio aditivo, más el asociado a las reflexiones espurias de la señal (error multipasos de portadora) denotado como $f_o m_u^s$ [ciclos]. En receptores de alta gama el primero es inferior al 1% de un ciclo de la portadora, lo que equivale a un error de distancia $\lambda\varepsilon_\phi^s \leq$ 1-2mm (rms). Por su parte, el

error por efecto multi-pasos $m_u^s\left[seg\right]$ es usualmente del orden del 10% de la longitud de onda (por tanto mucho menor que el correspondiente al código) y su valor en metros puede oscilar entre cm_u^s ~ 1-5cm (rms).

9.1.3 Relación entre la fase de batido y la distancia al satélite

Escalando la fase con la longitud de onda de la portadora λ y usando $c=\lambda f_o$, de las (9.25) y (9.26) resultan el modelo de la fase en metros y el de su correspondiente medición:

$$\begin{aligned} L_u^{s*}(t_u^r) &\triangleq \lambda\phi_u^{s*}(t_u^r) = c\tau_u^s(t^r) + c(\delta t_u - \delta t^s) + \lambda B_u^s(t^o) \\ L_u^s(t_u^r) &= \lambda\phi_u^s(t_u^r) = L_u^{s*}(t_u^r) + cm_u^s + \lambda\varepsilon_\phi^s \end{aligned} \tag{9.27}$$

De acuerdo con las Ecs. (9.8) y (9.10), el término del tiempo de propagación en (9.27) se escribe como:

$$c\tau_u^s = R_u^s(\mathbf{P}^s, \mathbf{P}_u) + cA_u^s = \hat{R}_u^s + E^s + c(T_u^s - I_u^s) \tag{9.28}$$

Como se mencionó anteriormente, el carácter dispersivo de la ionosfera induce un adelanto en la fase de la portadora (que viaja a la velocidad de fase) igual en magnitud pero de signo opuesto al retraso inducido en el código (que viaja a la velocidad de grupo). Por su parte la troposfera afecta de igual modo a ambas velocidades.

Introduciendo la (9.28) en las (9.27) se obtienen los modelos del observable y su medida en tanto que funciones lineales de la distancia $\hat{R}_u^s$.

$$\begin{aligned} L_u^{s*}(t_u^r) &= \hat{R}_u^s + E^s + c(T_u^s - I_u^s) + c(\delta t_u - \delta t^s) + \lambda\, B_u^s(t^o) \\ L_u^s(t_u^r) &= \hat{R}_u^s + E^s + c(T_u^s - I_u^s) + c(\delta t_u - \delta t^s) + \lambda\, B_u^s(t^o) + cm_u^s + \lambda\varepsilon_\phi^s \end{aligned} \tag{9.29}$$

9.1.4 Comparación entre los observables de código y fase

Los errores residuales de las mediciones con código y fase tienen 3 orígenes que conviene distinguir: a) el segmento espacial, b) el medio de propagación y c) el receptor. A continuación resumimos valores típicos medios cuadráticos (rms) de estos errores para un receptor en el estándar actual y para la portadora L1 (1575,42Mhz):

- Segmento espacial: σ_{se}

  Error del reloj del satélite: $c\delta t^i \rightarrow \sigma_{\delta t_i} \sim 2m$

  Error de efemérides: $E_u^i \rightarrow \sigma_{ef} \sim 2m$

  $\sigma_{se} = \sqrt{\sigma_{ef}^2 + \sigma_{\delta t_i}^2} \sim 3m$

- Propagación: σ_p

  Efecto ionosférico: retraso en código y adelanto en fase

  Dirección zenital: $cI_u^i \rightarrow \sigma_{iono} \in (2m, 10m)$:

  Factor de oblicuidad: FO=1-3→90°-5°

  Efecto troposférico: retraso tanto en código como en fase

Dirección zenital: $cT_u^i \rightarrow \sigma_T \in (2m, 3m)$:

Factor de oblicuidad: FO=1-10→90°-5°.

- Recepción: σ_{re}

  Ruído de medida:

  Código: $\varepsilon_\rho^i \rightarrow \sigma_{\varepsilon\rho} \in (0.5m, 1m)$; Fase: $\lambda\varepsilon_\phi^i \rightarrow \sigma_{\varepsilon\phi} \in (1mm, 2mm)$

  Error multi-pasos (ambiente libre):

  Código $cM_u^i \rightarrow \sigma_M \in (1m, 5m)$; Fase: $cm_u^i \rightarrow \sigma_m \in (1cm, 5cm)$

Como los valores rms de los errores de propagación son estimados sobre la vertical local, el factor de oblicuidad (FO) es un multiplicador que tiene en cuenta el aumento con el ángulo de incidencia de la longitud del camino en la capa atmosférica correspondiente.

Como se advierte al comparar las (9.11) y (9.29), los modelos de ambos observables poseen una estructura simular y tienen en común los términos E^s, T_u^s, I_u^s, δt_u y δt^s. Difieren, sin embargo, en tres aspectos esenciales, a saber: en el signo de I_u^s, en la presencia de la ambigüedad real de fase B_u^s y en la magnitud de los errores de recepción. Respecto de estos últimos, el error en la medición del pseudo-rango es hasta 2 órdenes de magnitud superior al correspondiente a la medición de la fase. Sin embargo, a pesar de la gran precisión de esta última medida, su uso como observable de la distancia satélite/receptor se ve limitado por la ambigüedad B_u^s que, de ningún modo, podría considerarse comparable al resto de los errores dado que su valor puede ser arbitrariamente grande. Por esta razón, los métodos que utilizan la medida de fase para el posicionamiento del receptor deben indefectiblemente ser capaces de estimar o determinar esta ambigüedad. Más adelante veremos que en principio es posible en ciertos casos determinar la ambigüedad usando diferencialmente medidas de fase provistas por otros receptores cercanos. En el próximo Capítulo se mostrará como también es posible estimar las ambigüedades mediante un esquema de navegación integrada con un filtro de fusión de datos basado en el modelo cinemático del vehículo y datos provistos por otros instrumentos de navegación a bordo.

9.1.5 Observable *Doppler*, relación con la velocidad radial relativa

Como se vio en el Capítulo anterior, la determinación del desvío Doppler efectivo (Ec. **(8.13)**) es un subproducto natural del proceso de adquisición y seguimiento de la portadora de cada satélite por parte del receptor. Desde el punto de vista del receptor, dicho desvío se corresponde con la derivada de la fase total entre el receptor y el satélite respecto del tiempo del receptor. Así, teniendo en cuenta la invariancia de la ambigüedad entera (ver Ec. (9.24), dicha derivada temporal coincide con la derivada temporal de la fase de batido:

$$f_D^s = \frac{d}{dt_u}\Phi_u^s(t_u^r) = \frac{d}{dt_u}\phi_u^{s*}(t_u^r) \tag{9.30}$$

Usando la definición (9.27) y derivando la primera de las (9.29) luego de sustituir donde corresponda las Ecs. (9.16), es fácil verificar a partir de la Ec. (9.30) que:

$$\begin{aligned}\dot{L}_u^{s*}(t_u^r) &= \lambda \frac{d}{dt_u}\phi_u^{s*}(t_u^r) = \lambda f_D^s = \frac{d}{dt}\left\|\hat{\mathbf{P}}^s - \mathbf{P}_u\right\| + \dot{E}^s + c(\dot{T}_u^s - \dot{I}_u^s) + c(D_u - D_s) \\ &= (\breve{\mathbf{r}}_u^s)^T(\dot{\hat{\mathbf{P}}}^s - \dot{\mathbf{P}}_u) + \dot{E}^s + c(\dot{T}_u^s - \dot{I}_u^s) + c(D_u - D_s)\end{aligned} \tag{9.31}$$

Donde, debido a la gran distancia usuario satélite, se supuso que el versor de la línea de vista $\breve{\mathbf{r}}_u^s$ al satélite s varía muy lentamente con lo cual $\dot{\breve{\mathbf{r}}}_u^s \approx 0$. Como en general los cambios en E^s, T_u^s y I_u^s son muy lentos, sus derivadas temporales también pueden considerarse despreciables o al menos asimilables al error residual de la medida de f_D^s. De este modo, definiendo los vectores velocidad del satélite (calculado con datos de efemérides) y del receptor como $\hat{\mathbf{V}}^s = \dot{\hat{\mathbf{P}}}^s$ y $\mathbf{V}_u = \dot{\mathbf{P}}_u$, el modelo de la medición del observable Doppler (9.31) (que por razones históricas es también denominado "*delta pseudo-rango*") denotado $\dot{\rho}_u^s$, se escribe:

$$\dot{\rho}_u^s = \lambda \hat{f}_D^s = \lambda f_D^s + \lambda \varepsilon_{\dot{\phi}}^s = (\breve{\mathbf{r}}_u^s)^T(\hat{\mathbf{V}}^s - \mathbf{V}_u) + cD_u + \varepsilon_{\dot{\rho}}^s \tag{9.32}$$

Donde, $\hat{f}_D^s$ es la medida del desvío Doppler al satélite respectivo determinada por el receptor; $\varepsilon_{\dot{\rho}}^s \triangleq \lambda \varepsilon_{\dot{\phi}}^s$ incluye: los errores de medida, las derivadas temporales $\dot{E}^s$, $\dot{T}_u^s$ y $\dot{I}_u^s$, el desconocimiento o inestabilidad de la deriva del reloj satelital* y las variaciones del efecto de las reflexiones múltiples sobre la fase. Para vehículos en movimiento este último efecto podría tener carácter aleatorio. En la práctica el error residual $\varepsilon_{\dot{\phi}}^s$ puede considerarse no sesgado con un valor rms de unos pocos cm/seg (de 3 a 8 cm/seg para la portadora L1), lo que da a esta medición una gran precisión sobre todo si, junto con la velocidad $\mathbf{V}_u$, se estima el sesgo cD_u.

Los datos de la efeméride del satélite son usados para calcular la velocidad $\hat{\mathbf{V}}^s$ en tanto que el versor $\breve{\mathbf{r}}_u^s$ puede ser calculado a partir de la posición del usuario estimada, a partir de las medidas de pseudo-rango. De este modo, la (9.32) es una medida de la velocidad radial relativa vehículo-satélite (proyección de la velocidad relativa sobre el radio vector). Si bien hay un efecto del error de posicionamiento sobre el versor al satélite $\breve{\mathbf{r}}_u^s$ este error resulta despreciable para las distancias nominales de los satélites.

9.2 Posicionamiento con GPS: soluciones y precisiones

Los receptores GPS tienen como prestación usual un canal de salida con el cual hacen accesibles los observables medidos y el mensaje de navegación GPS. Esto permite a un usuario disponer de ellos como insumo de un sistema de navegación de diseño propio. En los párrafos restantes de este Capítulo estudiaremos de qué modo pueden ser usados estos observables para determinar variables de navegación, absolutas o relativas, tales como posición, velocidad y orientación. Veremos que la precisión en la determinación de las variables de navegación dependerá de cuales observables se utilicen, de cuántos de ellos estén disponibles, si lo están simultáneamente o en épocas distintas y de que hipótesis simplificadoras se usen para formular los respectivos modelos matemáticos.

*Del orden de 10^{-12} actualmente con expectativas de rápida mejora a mediano plazo.

9.2.1 Problema general del posicionamiento GNSS

En este párrafo planteamos el problema más general de navegación concebible basado en observables GNSS. El objetivo es mostrar cuales son las limitaciones inherentes a esta tecnología, cuando será posible paliar algunas de ellas y en todo caso poner en evidencia las relaciones de compromiso que habrá que "negociar" entre simplicidad y precisión.

El caso más general consiste en suponer disponibles los observables de código y fase en un número arbitrario de r receptores espacialmente distribuidos que comparten la visibilidad de s satélites emitiendo señal en f frecuencias y con datos adquiridos simultáneamente en q épocas distintas. Los observables son indexados, respectivamente por los índices: j=1,…r; l=1,…f; i=1,…s; t=1,…q.

A partir de las (9.11) y (9.29) se formulan las siguientes relaciones para los 2$rfsq$ observables disponibles:

$$\begin{aligned}\rho^i_{j,l}(t) &= \hat{R}^i_j(t)+E^i_j(t)+c(T^i_j(t)+I^i_{j,l}(t))+c(\delta t_j-\delta t^i)+cM^i_{j,l}(t)+\varepsilon^i_{\rho,j,l}\\ L^i_{j,l}(t) &= \hat{R}^i_j(t)+E^i_j(t)+c(T^i_j(t)-I^i_{j,l}(t))+c(\delta t_j-\delta t^i)+\lambda_l B^i_{j,l}+cm^i_{j,l}(t)+\lambda_l\varepsilon^i_{\phi,j,l}\end{aligned} \tag{9.33}$$

Donde denotamos $\hat{R}^i_j(t)=dist(\hat{\mathbf{P}}^i,\mathbf{P}_j(t))$ y $B^i_{j,l}=\delta\phi^i_{j,l}(t^o)-N^i_{j,l}(t^o)$ a la ambigüedad real independiente del tiempo (a partir del correspondiente instante de enganche). El resto de las variables se reconocen fácilmente a partir de las expresiones que las definen más arriba. Si se pretende determinar simultáneamente las posiciones del usuario $\mathbf{P}_j(t)$ a partir del sistema de ecuaciones (9.33) con la máxima precisión posible es necesario poder determinar todas estas variables con excepción de los inevitables errores de medida que determinan los residuos más pequeños posible, a saber: $\xi^i_{\rho,j,l}\triangleq cM^i_{\rho,j,l}+\varepsilon^i_{\rho,j,l}$ para el observable de código y $\xi^i_{\phi,j,l}\triangleq cm^i_{\phi,j,l}+\lambda_l\varepsilon^i_{\phi,j,l}$ para el observable Doppler. Para abordar esto definimos las 2(2$rfsq$) variables "agregadas":

$$\begin{aligned}\chi^i_{\phi,j,l}(t) &\triangleq E^i_j(t)+cT^i_j(t)-cI^i_{j,l}(t)+c(\delta t_j-\delta t^i)+B^i_{j,l};\\ \chi^i_{\rho,j,l}(t) &\triangleq E^i_j(t)+cT^i_j(t)+cI^i_{j,l}(t)+c(\delta t_j-\delta t^i)\end{aligned} \tag{9.34}$$

Sumadas éstas a las 3rq coordenadas desconocidas de las posiciones involucradas, se tiene un sistema de ecuaciones incompatible, lo que no permite determinar una solución por mínimos cuadrados cualesquiera sean $j\geq 1, f\geq 1, s\geq 1, q\geq 1$. Por lo tanto, para abordar el problema del posicionamiento será necesario ya sea: a) agregar nuevas hipótesis; b) aumentar la estructura del problema, c) agregar información al problema (p.e. modelos matemáticos de algunas incógnitas) ó d) sacrificar la precisión vía el incremento del nivel de los residuos. En los próximos párrafos nos abocaremos a describir algunos procedimientos usuales en este sentido.

9.2.2 Servicio estándar de posicionamiento (SPS)

Todo receptor GPS dispone normalmente de una unidad de cómputo que procesa numéricamente los observables de código y Doppler y entrega como salida la posición, velocidad y el tiempo GPS del receptor. En éste y el próximo párrafo describimos dos procedimientos estándar que suelen venir ya implementados en el receptor.

Empezamos por analizar el servicio de posicionamiento más clásico basado en los observables de código y Doppler provistos por un receptor GPS en una única época y con una única frecuencia. En tanto que caso particular para $r=f=q=1$ del más general formulado en el párrafo anterior, la provisión de este servicio adolece de las inconsistencias planteadas, por lo cual, se descarta que el mismo ofrezca la máxima precisión posible que sólo podría lograrse con los residuos óptimos.

El servicio SPS usa los observables (9.11) y (9.32) cuyos modelos, para cada satélite *i,* son:

$$\begin{aligned} \rho_u^i &= \hat{R}_u^i + c\delta t_u + sp_u^i + cM_u^i + \varepsilon_{\rho,u}^i;\ i=1,\ldots s \\ \dot{\rho}_u^i &= (\breve{\mathbf{r}}_u^i)^T(\hat{\mathbf{V}}^i - \mathbf{V}_u) + cD_u + \varepsilon_{\dot{\rho}}^i;\ i=1,\ldots s \end{aligned} \tag{9.35}$$

El término sp_u^i, llamado "*error espacial y de propagación",* incluye los errores residuales no compensados provenientes del segmento espacial (desvío del reloj del satélite y error de efemérides) y de la propagación en la atmósfera, a saber:

$$sp_u^i \triangleq E_u^i + cT_u^i + cI_u^i - c\delta t^i \tag{9.36}$$

Determinación de la posición del receptor

Para la determinación de la posición del receptor, el servicio SPS establece como residuos las magnitudes:

$$\xi_u^i = sp_u^i + cM_u^i + \varepsilon_{\rho,u}^i;\ i=1,\ldots s \tag{9.37}$$

El sesgo del reloj del receptor se excluye *ex profeso* del residuo, de otro modo, y vista su magnitud en un receptor comercial, el deterioro de la precisión sería inaceptable. Sin embargo, éste incluye tanto los errores de propagación (T_u^i, I_u^i) como los del segmento espacial ($E_u^i, \delta t^i$). La inclusión de estas magnitudes en los residuos va a limitar fuertemente la precisión del SPS. Para corregir estos efectos el receptor usa sin embargo los datos contenidos en el mensaje de la señal GPS determinados por el segmento terreno y subidos a la constelación por las estaciones terrenas de enlace. De estos datos extrae los parámetros de la evolución de las efemérides, las correcciones y su evolución de los relojes abordo y los parámetros del modelo Klobushar que permiten estimar el retraso ionosférico. Cabe señalar que la precisión de estas correcciones se degrada con la antigüedad de dichos parámetros. El mensaje GPS no ofrece información sobre el tránsito troposférico, sin embargo, en principio, el receptor podría tener incorporado un modelo alimentado por datos meteorológicos locales que le permitan limitar el error del retardo a unos pocos centímetros.

La tabla de presupuesto de errores del Párrafo 9.1.1 da el orden de magnitud de los residuos luego de posibles correcciones efectuadas mediante datos del mensaje. Suponiendo independientes cada una de estas fuentes de error se define el desvío estándar del e*rror equivalente para el usuario URE (User equivalent Range Error)* σ_{ure} mediante:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{sp}=[\sigma_{se}^2+\sigma_T^2+\sigma_{iono}^2]^{1/2}\sim 5-11m\\ \sigma_{re}=[\sigma_M^2+\sigma_{\varepsilon\rho}^2]^{1/2}\sim 1-5m\end{array}\right\}\Rightarrow \sigma_\xi=\sigma_{ure}=[\sigma_{sp}^2+\sigma_{re}^2]^{1/2}\sim 5-12m \tag{9.38}$$

De lo anterior y suponiendo una distribución gaussiana de los errores, la banda de error en el 98% de los casos está entre los 10m y 25m ($2\sigma_{ure}$).

Con los residuos ξ_u^i definidos por la (9.37), los s observables de la primera Ec. (9.35) constituyen un sistema de s ecuaciones con 3+1 incógnitas que resulta compatible si $s\geq 4$.

Para la posición y el desvío del reloj genéricos: $\mathbf{P}_u=\left[x_u,y_u,z_u\right]^T$ y δt_u definimos las funciones $\tilde{\rho}_{\mathrm{u}}^i(\mathbf{P}_u,c\delta t_u)=(\breve{\mathbf{r}}_u)^T(\hat{\mathbf{P}}^i-\mathbf{P}_u)+c\delta t_u;\ i=1,...,s$. Denotamos $\mathbf{P}_u^*,\delta t_u^*$ al par: posición de la antena del usuario en terna ECEF y desvío de su reloj, las medidas dadas por la primera de las (9.35) se escriben entonces como:

$$\rho_u^i(t)=\tilde{\rho}_{\mathrm{u}}^i(\mathbf{P}_u^*,c\delta t_u^*)+\xi_u^i;\quad i=1,...,s \tag{9.39}$$

Con el fin de escribir este conjunto de ecuaciones en forma compacta, agrupamos los residuos, las medidas y los valores de $\tilde{\rho}_u^i(\mathbf{P}_u^*,c\delta t_u^*)$ en los vectores.

$$\boldsymbol{\xi}_u^T\triangleq\left[\xi_{\mathrm{u}}^1\ \ \xi_{\mathrm{u}}^2\ \ \xi_{\mathrm{u}}^3\ \ ...\right];\ \ \boldsymbol{\rho}_u^T\triangleq\left[\rho_{\mathrm{u}}^1\ \ \rho_{\mathrm{u}}^2\ \ \rho_{\mathrm{u}}^3\ \ ...\right];\ \ \tilde{\boldsymbol{\rho}}_u(\mathbf{P}_u^*,c\delta t_u^*)\triangleq\left[\tilde{\rho}_{\mathrm{u}}^1\ \ \tilde{\rho}_{\mathrm{u}}^2\ \ \tilde{\rho}_{\mathrm{u}}^3\ \ ...\right] \tag{9.40}$$

Con esta notación el vector de las medidas se re-escribe como:

$$\boldsymbol{\rho}_u=\tilde{\boldsymbol{\rho}}_u(\mathbf{P}_u^*,c\delta t_u^*)+\boldsymbol{\xi}_u\in\mathbb{R}^s \tag{9.41}$$

Dadas las medidas $\boldsymbol{\rho}_u$, el receptor determina, mediante un método iterativo de tipo de Newton-Raphson, la solución $(\hat{\mathbf{P}}_u,c\hat{\delta}t_u)$ que minimiza el siguiente criterio cuadrático en cada época *t:*

$$\begin{array}{l}H(\mathbf{P}_u,c\delta t_u;\boldsymbol{\rho}_u)\triangleq\left\|\tilde{\boldsymbol{\rho}}_u(\mathbf{P}_u,c\delta t_u)-\boldsymbol{\rho}_u\right\|^2\\ \rightarrow(\hat{\mathbf{P}}_u,c\hat{\delta}t_u)=\underset{\mathbf{P}_u,c\delta t_u}{\arg\min}\{H(\mathbf{P}_u,c\delta t_u;\boldsymbol{\rho}_u)\}\end{array} \tag{9.42}$$

Para el par genérico $(\mathbf{P}_u,c\delta t_u)$ definimos las desviaciones $\delta\mathbf{P}_u\triangleq\mathbf{P}_u-\mathbf{P}_u^*$, $\delta c\delta t_u\triangleq c\delta t_u-c\delta t_u^*$ y la distancia $\delta s=(\left\|\delta\mathbf{P}_u\right\|^2+\left|\delta c\delta t_u\right|^2)^{1/2}$, luego introducimos la familia de vecindades del punto $(\mathbf{P}_u^*,c\delta t_u^*)$ indexadas por $\varepsilon>0$: $V_\varepsilon\equiv\{(\mathbf{P}_u,c\delta t_u);\delta s<\varepsilon\}$. Para ε es suficientemente pequeño y si el par $(\mathbf{P}_u,c\delta t_u)\in V_\varepsilon$, se tiene:

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_u(\mathbf{P}_u,c\delta t_u)=\tilde{\boldsymbol{\rho}}_u(\mathbf{P}_u^*,\delta ct_u^*)+\mathbf{J}\begin{bmatrix}\delta\mathbf{P}_u\\ c\delta\delta t_u\end{bmatrix}+o(\varepsilon) \tag{9.43}$$

Con $\mathbf{J}$ matriz jacobiana de la función $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_u(\mathbf{P}_u, c\delta t_u)$ respecto de las incógnitas $(x_u, y_u, z_u, c\delta t_u)$ evaluado en $(\mathbf{P}_u, c\delta t_u) \approx (\mathbf{P}_u^*, c\delta t_u^*)$ cuya *i*-ésima fila resulta:

$$\left.\frac{\partial \tilde{\rho}_u^i}{\partial x_u \partial y_u \partial z_u \partial c\delta t_u}\right|_{(\mathbf{P}_u, \delta t_u)} = \left[(-\breve{\mathbf{r}}_u^i)^T \quad 1 \right] \tag{9.44}$$

Siendo $\breve{\mathbf{r}}_u^i$ el versor de la línea de vista dirigida desde la posición genérica $\mathbf{P}_u$ elegida al satélite *i*. $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{s\times 4}$ resulta:

$$\mathbf{J} \triangleq \left.\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}_u(\mathbf{P}_u, \delta t_u)}{\partial (x_u y_u z_u c\delta t_u)}\right|_{(\mathbf{P}_u, c\delta t_u)} = \begin{bmatrix} (-\breve{\mathbf{r}}_u^1)^T \,|1 \\ (-\breve{\mathbf{r}}_u^2)^T \,|1 \\ \dots \\ (-\breve{\mathbf{r}}_u^s)^T \,|1 \end{bmatrix} \tag{9.45}$$

De este modo, cerca de la convergencia del algoritmo de Newton-Raphson, el criterio (9.42) deviene el del problema lineal cuadrático clásico que resulta de sustituir las (9.41) y (9.43) en la (9.42) y cuya solución en función de los residuos para $s \geq 4$ es:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_u \\ \hline c\delta\hat{t}_u \end{bmatrix} = \underset{\mathbf{P}_u, c\delta t_u}{\arg\min} \left\| \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u - \mathbf{P}_u^* \\ \hline c\delta t_u - c\delta t_u^* \end{bmatrix} - \boldsymbol{\xi}_u \right\|^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u^* \\ \hline c\delta t_u^* \end{bmatrix} + (\mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}^T\boldsymbol{\xi}_u \tag{9.46}$$

Donde la matriz $\mathbf{J}$ es evaluada en un punto cercano a la convergencia del algoritmo NT $(\hat{\mathbf{P}}_u, c\delta\hat{t}_u)$.

Como se ve de la anterior, la incidencia de los residuos sobre el error de posicionamiento queda determinada por la pseudo-inversa a la izquierda de la matriz $\mathbf{J}$ que, vista su definición, es función exclusivamente de la geometría de la constelación visible por el usuario (no depende de las distancias). En particular, cuando las líneas de vista de los satélites se ubican próximas a un único plano (conteniendo al usuario), $\mathbf{J}$ tiende a ser deficiente en rango (columnas linealmente dependientes) y los errores de posicionamiento tienden a infinito. Sin embargo, el diseño de las órbitas de la constelación es tal que esta posibilidad está excluida para casi cualquier punto sobre la Tierra desde el cual resulten visibles 4 o más satélites.

Precisión de la posición

Siendo $\boldsymbol{\xi}_u$ un vector aleatorio en cada época *t*, la solución (9.46) también lo es, en tanto que su valor esperado y matriz de covariancia resultan:

$$\begin{aligned} E\left\{ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_u \\ \hline c\delta\hat{t}_u \end{bmatrix} \right\} &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u^* \\ \hline c\delta t_u^* \end{bmatrix} + \underbrace{(\mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}^T E\{\boldsymbol{\xi}_u\}}_{\textit{Sesgo de la estimación}} \\ \mathbf{Q}_{P_u, \delta t_u} &\triangleq \operatorname{cov}\left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_u \\ \hline c\delta\hat{t}_u \end{bmatrix} \right) = (\mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}^{*T}\operatorname{cov}(\boldsymbol{\xi}_u)\mathbf{J}(\mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1} \in \mathbb{R}^{4x4} \end{aligned} \tag{9.47}$$

De donde surge que si los errores de medida ξ_u^i son sesgados, la estimación de la posición también lo será. A pesar de esto, por convención, los estándares de precisión se definen suponiendo residuos no sesgados, idénticamente distribuidos y de variancia constante σ_u^2. Bajo estas suposiciones, de la (9.47), resulta la covariancia del estimador en coordenadas ECEF:

$$\mathbf{Q}_{x,y,z,\delta t}^e = \sigma_u^2 (J^T J)^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{Q}_{x,y,z}^e & & \sigma_{xt} \\ & & & \sigma_{yt} \\ & & & \sigma_{zt} \\ \hline \sigma_{xt} & \sigma_{yt} & \sigma_{zt} & \sigma_t^2 \end{array}\right]^e \tag{9.48}$$

Donde $\mathbf{Q}_{x,y,z}^e$ denota la covariancia espacial en coordenadas ECEF definida como:

$$\mathbf{Q}_{x,y,z}^e = E\{\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \end{bmatrix}^e\} \tag{9.49}$$

Para expresar la covariancia de los errores en coordenadas LGV-ENU usamos la MCD $\mathbf{C}_e^g$ evaluada en la posición del receptor. El error de posición y su matriz de covariancia son re-expresados de acuerdo con:

$$\begin{bmatrix} \delta E \\ \delta N \\ \delta U \end{bmatrix}^g = \mathbf{C}_e^g \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}^e ; \ \mathbf{Q}_{x,y,z}^g = \mathbf{C}_e^g \mathbf{Q}_{x,y,z}^e \mathbf{C}_g^e = \begin{bmatrix} \sigma_e^2 & \sigma_{en} & \sigma_{eu} \\ \sigma_{en} & \sigma_n^2 & \sigma_{nu} \\ \sigma_{eu} & \sigma_{nu} & \sigma_u^2 \end{bmatrix} \tag{9.50}$$

A partir de las anteriores se definen las distintas versiones de la llamada *dilución de la precisión* (DOP) usadas en la práctica para expresar la calidad del posicionamiento:

$$\begin{aligned} &VDOP\,(vertical) = \sigma_u; \\ &TDOP\,(temporal) = \sigma_t; \\ &HDOP\,(horizontal) = \sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_n^2}; \\ &PDOP\,(posición) = \sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_n^2 + \sigma_u^2}; \\ &DOP\,(geométrica) = \sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_n^2 + \sigma_u^2 + \sigma_t^2}; \end{aligned}$$

Cada una de ellas representa el factor de incidencia de la geometría de la constelación visible sobre el correspondiente DOP. Una buena distribución de los satélites en el espacio se traduce en bajos valores de DOP, valores HDOP y VDOP <5 son considerados aceptables.

Determinación de la velocidad del receptor

A partir del observable Doppler (9.32) definimos las siguientes funciones de las medidas $\widehat{f}_D^i$, i=1,...s, de las efemérides de los satélites visibles (con las que se calculan las velocidades $\hat{\mathbf{V}}^i$) y del versor $\breve{\mathbf{r}}_u^i$ calculado con la estimación de la posición:

$$\upsilon^i \triangleq \lambda \hat{f}_D^i - (\breve{\mathbf{r}}_u^i)^T \hat{\mathbf{V}}^i = -(\breve{\mathbf{r}}_u^i)^T \mathbf{V}_u + cD_u + \varepsilon_{\dot{\rho}}^i; \quad i = 1,...,s \tag{9.51}$$

Usando la definición de $\mathbf{J}$ (9.45) las ecuaciones anteriores se rescriben matricialmente como:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \begin{bmatrix} \upsilon^1 \\ \upsilon^2 \\ \vdots \\ \upsilon^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\breve{\mathbf{r}}_u^1)^T \,|1 \\ (-\breve{\mathbf{r}}_u^2)^T \,|1 \\ \vdots \\ (-\breve{\mathbf{r}}_u^s)^T \,|1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_u \\ \hline cD_u \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\dot{\rho}} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_u \\ \hline cD_u \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\dot{\rho}} \tag{9.52}$$

En la cual $\boldsymbol{\varepsilon}_{\dot{\rho}} \triangleq \left[\varepsilon_{\dot{\rho}}^1 \ \cdots \ \varepsilon_{\dot{\rho}}^s \right]^T \in \mathbb{R}^s$. Como se advertirá, a diferencia del posicionamiento, el problema de la estimación de la velocidad resulta en sí mismo una minimización cuadrática lineal cuya solución en coordenadas ECEF para $\hat{\mathbf{V}}_u$ y $\hat{D}_u$ se obtiene a partir de la (9.52) mediante:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_u \\ \hline c\hat{D}_u \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\upsilon} \tag{9.53}$$

Precisión de la velocidad

Análogamente a las (9.47) el valor esperado y la matriz de covariancia de la estimación de la velocidad junto con las (9.52) y (9.53) resultan:

$$E\left\{ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_u \\ \hline c\hat{D}_u \end{bmatrix} \right\} = E\{(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\upsilon}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_u \\ \hline cD_u \end{bmatrix} + \underbrace{(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T E\{\boldsymbol{\varepsilon}_{\dot{\rho}}\}}_{\textit{Sesgo de la estimación}} \tag{9.54}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}_{\mathbf{v}_u, D_u} \triangleq \operatorname{cov}\left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_u \\ \hline \hat{D}_u \end{bmatrix} \right) = (\mathbf{J}^{*T} \mathbf{J}^*)^{-1} \mathbf{J}^{*T} \operatorname{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\dot{\rho}}) \mathbf{J}^* (\mathbf{J}^{*T} \mathbf{J}^*)^{-1} \in \mathbb{R}^{4x4} \\ &\operatorname{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\dot{\rho}}) \approx \left(\sigma_{\dot{\rho}}\right)^2 \mathbf{I}; \quad \sigma_{\dot{\rho}} \approx 0{,}03 \text{ - } 0{,}08 \text{ m/seg,} \end{aligned} \tag{9.55}$$

Es muy importante resaltar una diferencia significativa de las (9.54) respecto de las (9.47) y es que en estas últimas no intervienen los errores espaciales ni de propagación con lo cual el error Doppler residual $\boldsymbol{\varepsilon}_{\dot{\rho}}$ en muchos casos puede considerarse insesgado y por tanto también la estimación de la velocidad. Tal como para la posición, la covariancia del error de estimación de la velocidad, dada por la (9.55), depende de la geometría de la constelación visible por lo que resultan válidos los mismos coeficientes de dilución de precisión introducidos precedentemente.

9.2.3 Servicio de posicionamiento preciso (PPS)

Veremos en esta sección los beneficios de disponer de dos portadoras simultáneamente. Naturalmente, esto requiere receptores capaces de operar con modulación CDMA en dos portadoras distintas. El servicio PPS del sistema GPS utiliza el código P(Y) modulado en ambas portadoras L1 y L2. Un usuario con un receptor dual puede seguir

el código C/A en L1 y el P(Y) en L2 siempre que éste último no esté encriptado, de otro modo sólo podrán hacerlo usuarios autorizados. Si bien estas restricciones parecen limitar el interés práctico de los servicios con portadora múltiple, la realidad es que en un futuro próximo se espera un acceso generalizado a frecuencias alternativas a la L1 y la L2. Es un hecho, en efecto, que a partir de la modernización del sistema GPS iniciada en 2005 ya está operativa en muchos satélites de nueva generación la señal civil L2C sobre la portadora L2. Además, y como se mencionó en el Capítulo anterior, es objetivo de la nueva serie emitir código en al menos 3 portadoras diferentes, a saber: L1, L2 y L5 (1176.45 MHz).

El servicio PPS consiste en la adquisición de la posición con observables de un único receptor, en una única época pero con canales de código en dos frecuencias distintas: f_1 y f_2. En términos del problema general planteado en el Párrafo 9.2.1, en este caso se tiene que r=q=1 y f=2, de modo que para cada época t se disponen de 2s observables:

$$\begin{aligned} \rho^i_{u,l} &= \hat{R}^i_u + c\delta t_u + K^i_u / f_l^2 + \xi^i_{u,l};\ l=1,2;\ i=1,..,s \\ \xi^i_{u,l} &= E^i_u + cT^i_u - c\delta t^i + cM^i_{u,l} + \varepsilon^i_{\rho,u,l};\ l=1,2\ ;\ i=1,..,s \end{aligned} \tag{9.56}$$

Aunque las inconsistencias planteadas en el Párrafo 9.2.1 subsistan, claramente, este servicio dispone de mayor información respecto del caso anterior, razón por la cual, es de esperar que ofrezca una perfomance mejor que el SPS.

Notar que ahora los residuos no contienen los retardos ionosféricos cI^i_u que suelen ser los términos dominantes y altamente variables de los residuos en el caso SPS. En cambio, dichos términos son tenidos explícitamente en cuenta en el observable (9.56) incorporando en el mismo el modelo (9.5) función de la frecuencia portadora. Dado que ahora se disponen de 2s ecuaciones, es posible incluir las s constantes desconocidas K^i_u en el grupo de incógnitas a estimar, lo que resulta en un problema de (4+s) incógnitas con 2s ecuaciones que podrá resolverse con al menos s=4 satélites visibles.

Teniendo en cuenta el presupuesto de errores consignado en el Párrafo 9.1.4 después de usar las correcciones estándar provistas en el mensaje, la magnitud de los residuos resultantes resulta:

$$\begin{aligned} &\sigma_{sp} \approx [\sigma^2_{ef} + \sigma^2_T + \sigma^2_{\delta ti}]^{1/2} \approx 3-4mts.;\ \ \sigma_M \approx 1-5mts.;\ \sigma_{\varepsilon\rho} \approx 1mts. \Rightarrow \\ &\sigma_{\xi} \approx [\sigma^2_{sp} + \sigma^2_M + \sigma^2_{\varepsilon\rho}]^{1/2} \simeq 3-6,5mts. \end{aligned} \tag{9.57}$$

Lo que implica una banda de error en el 98% de los casos de entre 6 y 13m (2σ) mejorando sensiblemente la del servicio SPS.

9.3 Técnicas de código diferencial (DGPS)

Como se vio en los párrafos anteriores los servicios SPS y PPS abordan el problema de la inconsistencia general del posicionamiento absoluto mediante el trámite de degradar los residuos de los observables GPS incluyendo en ellos magnitudes no observables o no estimables. En el caso PPS, la inclusión de mayor información hace posible "descargar" parcialmente los residuos y gracias a esto se logra mayor precisión que en el caso SPS. Las técnicas de posicionamiento diferencial buscan también disminuir la

magnitud de los residuos agregando información procedente de al menos un receptor suplementario. El problema básico consiste en 2 receptores, una frecuencia y 1 época. Cuando uno de los receptores se suponga ubicado en una posición conocida se hablará de DGPS absoluto. En caso de que ninguno de los dos esté geo-localizado el problema se limitará al posicionamiento relativo entre ambos.

9.3.1 DGPS absoluto con observable de código

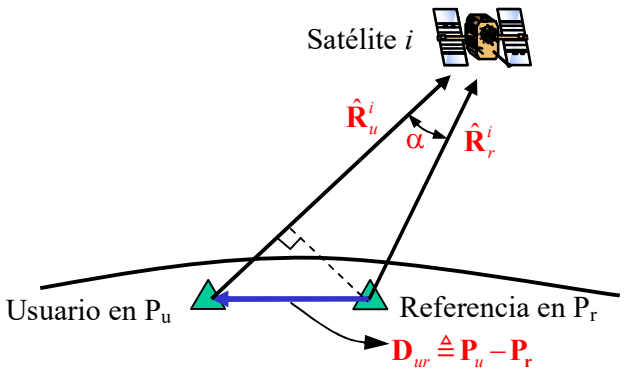


Figura 9.3: Posicionamiento diferencial con dos receptores.

Consideramos el problema del posicionamiento con observables de código en una sola frecuencia tanto en el receptor del usuario como en otra estación de referencia de posición conocida (ver Fig. 9.3) cita en las inmediaciones. En términos del problema general, este caso se corresponde con: q=f=1; r=2 (j=u, r).

Retomando la primera de las (9.35) y la (9.36), escribimos el sistema de 2s ecuaciones con 2s+5 incógnitas: las 2s sp_j^i, las coordenadas del vector línea de base $\mathbf{D}_{ur}$ y los desvíos de reloj δt_u y δt_r.

$$\begin{aligned} \rho_j^i &= \hat{R}_j^i + c\delta t_j + sp_j^i + cM_j^i + \varepsilon_{\rho,j}^i;\ i=1,\ldots s;\ j=u,r \\ sp_j^i &\triangleq E_j^i + cT_j^i + cI_j^i - c\delta t^i;\ i=1,\ldots s;\ j=u,r \end{aligned} \tag{9.58}$$

Así planteado, el sistema resulta inconsistente con los residuos mínimos.

Las técnicas de posicionamiento diferencial usan la alta correlación espacio-temporal de los errores $E_j^i, cT_j^i, cI_j^i, c\delta t^i$ que componen cada término sp_j^i. En efecto, Kaplan (2006), Cap. 8, muestra que para $\|\mathbf{D}_{ur}\| \le 50Km$ es posible asegurar $E_{ur}^i \approx cI_{ur}^i \le 1cm$ *. El error troposférico es dependiente de las condiciones medioambientales variantes con el tiempo (humedad ambiente, temperatura etc.) y sensible a la diferencia en altura (P.e.: para $\delta h = 1Km$, $cT_{ur}^i \approx 1,6m$). De este modo, para cada satélite i común al campo visual de ambos, podrá suponerse que $sp_u^i \approx sp_r^i$, a menos de errores métricos y en casos centimétricos para δh suficientemente pequeños. Esto agrega suficiente estructura como para abordar el mismo problema de 2s ecuaciones pero ahora con s+5 incógnitas,

*Se usará la notación $[\ ]_{ur}$=$[\ ]_u$-$[\ ]_r$ para denotar diferencias entre las variables correspondientes.

y por tanto consistente para un número de satélites $s \geq 5$ y residuos métricos $\xi^i_{\rho,j} \triangleq cM^i_j + \varepsilon^i_{\rho,j} + \delta sp^i_j \;\; i = 1,...5; j = u, r$ tales que:

$$\sigma_{\xi\rho} \sim \sqrt{\sigma^2_{\varepsilon\rho} + \sigma^2_M} \in (1m, 5m) \tag{9.59}$$

Lo que implica una banda de error en el 98% de los casos de entre 2m y 10m (2σ) mejorando en promedio al servicio SPS.

Bajo estas condiciones, un algoritmo de optimización similar al SPS, permite estimar, además de la posición $\mathbf{D}_{ur}$ respecto de la referencia conocida $\mathbf{P}_r$ (y por tanto la posición absoluta $\mathbf{P}_u$), los desvíos temporales δt_u y δt_r. Con lo cual también se obtendría el tiempo del usuario con la precisión máxima alcanzable dada por la (9.59). Más aún, desde un punto de vista práctico importa el hecho de que el procedimiento evita tener que pre-corregir los parámetros ligados a la propagación y al segmento espacial dado que estos errores son aproximadamente comunes a ambos receptores.

Servicio DGPS de área local (LA-DGPS) de posicionamiento absoluto

El procedimiento DGPS absoluto descrito en el párrafo anterior, necesita concentrar en un punto las medidas adquiridas por la estación de referencia y por el usuario en cada época. Esto requiere de un enlace de comunicación dedicado entre la primera y el segundo. En la práctica, los servicios de posicionamiento preciso, llamados DGPS de área local (o *Local-area DGPS),* disponen de estaciones de referencia distribuidas en un area determinada desde donde emiten por UHF/VHF sus correcciones de pseudo-rango locales $e^i_{\rho,r}, i = 1,...s$ obtenidos a partir de sus posiciones conocidas. Dichos errores se definen como sigue para todos los satélites visibles.

$$\begin{aligned} \rho^i_r &= \hat{R}^i_r + sp^i_r + c\delta t_r + \xi^i_r; \\ e^i_{\rho,r} &\triangleq \hat{R}^i_r - \rho^i_r = -(sp^i_r + c\delta t_r + \xi^i_r) \end{aligned} \tag{9.60}$$

Aquí, $\hat{R}^i_r$ es la distancia entre la posición conocida de la referencia $\mathbf{P}_r$ y la evaluada para el satélite i a partir de la efemérides (ambas en ECEF). Cualquier usuario del servicio en las inmediaciones de una referencia tal que $\|\mathbf{D}_{ur}\| < 50Km$, usa los valores $e^i_{\rho,r}$ recibidos etiquetados con la época correspondiente para formar los pseudo-rangos corregidos definidos como sigue, para $i = 1,...s$:

$$\begin{aligned} \rho^i_{u,c} &\triangleq \rho^i_u + e^i_{\rho,r} \\ &= \hat{R}^i_u + sp^i_u + c\delta t_u + cM^i_u + \varepsilon^i_{\rho,u} - (sp^i_r + c\delta t_r + cM^i_r + \varepsilon^i_{\rho,r}) \\ &= \hat{R}^i_u + c\delta t_{ur} + sp^i_{ur} + cM^i_{ur} + \varepsilon^i_{\rho,ur} \end{aligned} \tag{9.61}$$

y con residuos métricos: $\xi^i_{\rho,ur} \approx sp^i_{ur} + cM^i_{ur} + \varepsilon^i_{\rho,ur}$. Las ecuaciones (9.61) permiten determinar (mediante algún algoritmo de optimización) estimaciones de las coordenadas ECEF de $\mathbf{D}_{ur}$ y de la diferencia de tiempos δt_{ur}. Notar respecto del procedimiento anterior que ahora no se determinan independientemente los tiempos δt_u y δt_r. Cabe

señalar, que los términos asociados a los errores de medida $e^i_{\rho ur} = cM^i_{ur} + \varepsilon^i_{\rho,ur}$ provienen de la resta de errores independientes, con lo cual, cuando ambos sean similares la magnitud resultante se verá amplificada por un factor $\sqrt{2}$.

$$e^i_{\rho ur} \rightarrow \sigma_{\rho ur} \approx 1.41\sigma_{\rho u} \in 1.41(1m, 5m) = (1.41m, 7m) \tag{9.62}$$

Sin embargo esto no debe verse como una desventaja respecto del procedimiento anterior, toda vez que las estaciones de referencia usan receptores fijos de alta calidad con antenas inmunes a los efectos multi-pasos lo cual para un usuario comercial implica que $e^i_{\rho ur} \approx e^i_{\rho u}$ y por tanto $\sigma_{\rho ur} \approx \sigma_{\rho u}$. Como además sus relojes de alta estabilidad son permanentemente sincronizados con el tiempo GPS, $\delta t_{ur} \approx \delta t_u$, así, el servicio transfiere tiempo preciso a sus usuarios. Otra ventaja es que habiendo sólo 4 incógnitas, la solución es compatible con 4 satélites y, en caso que s>4 la información suplementaria tiende a reducir aun más el error de estimación final.

En conclusión, una LA-DGPS puede ofrecer a sus usuarios en zona bandas de errores de posicionamiento del orden (1m-5m) en el 98% (2σ) de los casos.

Pr último, puesto que la precision del sistema se debe en gran parte a la supresion de errores en modo común, asegurar sp^i_{ur} sub-métricos, requiere que tanto referencias como usuarios corrigen de modo acorde por atmósfera y efemérides o bien ninguno de los dos lo hagan.

9.3.2 DGPS relativo con observable de código

A diferencia del posicionamiento absoluto, el DGPS relativo sólo se plantea conocer el vector "brazo de palanca" $\mathbf{D}_{ur}$ (ver Fig. 9.3) entre dos usuarios con sendos receptores a bordo. Tal como en el DGPS absoluto, un enlace de datos entre ambos receptores permite que cada uno disponga de los observables de código de ambos y por tanto, en él calcular los nuevos observables diferenciales para $i = 1,...s$ (ver Ecs. (9.58)):

$$\rho^i_{ur} \triangleq \rho^i_u - \rho^i_r = \hat{R}^i_{ur} + sp^i_{ur} + c\delta t_{ur} + cM^i_{ur} + \varepsilon^i_{\rho,ur} \tag{9.63}$$

Donde, $\hat{R}^i_{ur} \triangleq \hat{R}^i_u - \hat{R}^i_r$ (ver Fig. 9.3) denota la diferencia entre sus distancias (*rangos*) al satélite *i*. Para expresar estas diferencias en función de la línea de base $\mathbf{D}_{ur}$ evaluamos primeramente el producto escalar:

$$\langle \hat{\mathbf{R}}^i_r + \hat{\mathbf{R}}^i_u, \hat{\mathbf{R}}^i_r - \hat{\mathbf{R}}^i_u \rangle = (\hat{R}^i_r)^2 - (\hat{R}^i_u)^2 = (\hat{R}^i_r - \hat{R}^i_u)(\hat{R}^i_u + \hat{R}^i_r) \tag{9.64}$$

A partir de la geometría del problema y considerando la Fig. 9.3, es fácil reconocer que $\mathbf{D}_{ur} = \mathbf{P}_u - \mathbf{P}_r = \hat{\mathbf{R}}^i_r - \hat{\mathbf{R}}^i_u$. Usando esta expresión en la Ec. (9.64) se obtiene:

$$\hat{R}^i_u - \hat{R}^i_r = \hat{R}^i_{ur} = -\langle \hat{\mathbf{R}}^i_r + \hat{\mathbf{R}}^i_u, \mathbf{D}_{ur} \rangle / (\hat{R}^i_r + \hat{R}^i_u) \tag{9.65}$$

El resultado es que, $\hat{R}^i_{ur}$ depende tanto de $\mathbf{D}_{ur}$, como de posiciones desconocidas $\mathbf{P}_r(\hat{\mathbf{R}}^i_r)$ y $\mathbf{P}_u(\hat{\mathbf{R}}^i_u)$, con lo cual, se tienen ahora 6 incógnitas espaciales en lugar de las 3 del caso absoluto. Una manera de abordar el problema sería transformarlo en dos problemas SPS con lo cual no se gana precisión si no que se pierde dado que $\mathbf{D}_{ur}$ se obtiene mediante la resta de magnitudes inciertas y, como vimos, esto implica en promedio un aumento del 41% en el error rms.

Para ganar precisión una vez más agregaremos estructura al problema imponiendo que $\|\mathbf{D}_{ur}\|$ sea lo suficientemente pequeño como para poder suponer casi paralelas a $\hat{\mathbf{R}}^i_r$ y $\hat{\mathbf{R}}^i_u$ ($\alpha \to 0$ en la Fig. 9.3). Es fácil ver que bajo esta condición la (9.65) admite la aproximación:

$$\hat{R}^i_{ur} = -\langle \hat{\mathbf{R}}^i_r + \hat{\mathbf{R}}^i_u, \mathbf{D}_{ur} \rangle / (\hat{R}^i_r + \hat{R}^i_u) \approx -\langle \breve{\hat{\mathbf{R}}}^i_u, \mathbf{D}_{ur} \rangle \tag{9.66}$$

Donde $\breve{\hat{\mathbf{R}}}^i_u$ expresa al versor de línea de vista desde la posición real del usuario a la posición calculada del satélite. Pero como $\hat{\mathbf{R}}^i_u$ es desconocido, substituimos este vector por su valor calculado por el receptor del usuario en modo SPS que denotamos $\tilde{\mathbf{R}}^i_u$ e introducimos el *residuo geométrico*:

$$\partial R^i_{ur} \triangleq \hat{R}^i_{ur} - (-\langle \breve{\tilde{\mathbf{R}}}^i_{\boldsymbol{u}}, \mathbf{D}_{ur} \rangle) = \hat{R}^i_{ur} + \langle \breve{\tilde{\mathbf{R}}}^i_{\boldsymbol{u}}, \mathbf{D}_{ur} \rangle \tag{9.67}$$

De la Fig. 9.3, se advierte que $\hat{R}^i_u = \hat{R}^i_r \cos(\alpha) - \langle \breve{\hat{\mathbf{R}}}^i_u, \mathbf{D}_{ur} \rangle$, con lo cual se tiene:

$$\left|\partial R^i_{ur}\right| = \left|\hat{R}^i_u - \hat{R}^i_r + \langle \breve{\tilde{\mathbf{R}}}^i_{\boldsymbol{u}}, \mathbf{D}_{ur} \rangle\right| \le \left|\hat{R}^i_r (1 - \cos(\alpha))\right| + \left|\langle \breve{\tilde{\mathbf{R}}}^i_u - \breve{\hat{\mathbf{R}}}^i_u, \mathbf{D}_{ur} \rangle\right| \tag{9.68}$$

Para α suficientemente pequeño $1 - \cos(\alpha) \approx \alpha^2/2$ y $\tan(\alpha) \approx \alpha \le |\mathbf{D}_{ur}| / \hat{R}^i_r$ con lo cual $\left|\hat{R}^i_r (1 - \cos(\alpha))\right| \approx \hat{R}^i_r \alpha^2/2 \le |\mathbf{D}_{ur}|^2 / 2\hat{R}^i_r$. Por otro lado, teniendo en cuenta que la estimación SPS de la posición del usuario asegura un error acotado: $\left\|\mathbf{P}_u - \hat{\mathbf{P}}_u\right\| = \left\|\hat{\mathbf{R}}^i_u - \tilde{\mathbf{R}}^i_u\right\| < 100m$ y que para una referencia cercana a la superficie terrestre $\hat{R}^i_r \approx 2\text{x}10^7 m$, es posible demostrar que, para valores $\|\mathbf{D}_{ur}\| < 9Km$ resulta $\left|\langle \breve{\tilde{\mathbf{R}}}^i_u - \breve{\hat{\mathbf{R}}}^i_u, \mathbf{D}_{ur} \rangle\right| < 5cm$, con lo cual:

$$|\mathbf{D}_{ur}| < 9Km \Rightarrow \partial R^i_{ur} \approx \hat{R}^i_r \alpha^2/2 < 2m \Rightarrow \textit{métrico} \tag{9.69}$$

Para líneas de base aún más cortas un razonamiento similar permite demostrar que

$$|\mathbf{D}_{ur}| < 700m \Rightarrow \partial R^i_{ur} < 0{,}5cm \Rightarrow \textit{sub-centimétrico} \tag{9.70}$$

Como veremos, esta última condición resulta de gran utilidad para el posicionamiento relativo de precisión basado en observables de fase.

Lo anterior nos permite usar, para la Ec. (9.66), la siguiente expresión lineal en la distancia relativa:

$$\hat{R}^i_{ur} = -\langle \breve{\tilde{\mathbf{R}}}^i_{\boldsymbol{u}}, \mathbf{D}_{ur} \rangle + \partial R^i_{ur} \tag{9.71}$$

con residuo métrico (o milimétrico según el caso) que no requiere conocer la posición de referencia. Sólo se necesita de la determinación SPS de la posición del usuario. De acuerdo con esto, los observables diferenciales (9.63) se re-escriben como:

$$\begin{aligned} \rho^i_{ur} &= \hat{R}^i_{ur} + c\delta t_{ur} + sp^i_{ur} + cM^i_{ur} + \varepsilon^i_{\rho,ur} \\ &= -(\breve{\tilde{\mathbf{R}}}^i_u)^T \mathbf{D}_{ur} + c\delta t_{ur} + \xi^i_{ur} \end{aligned} \tag{9.72}$$

La determinación del vector $\mathbf{D}_{ur}$ resulta así solución del problema clásico de mínimos cuadrados lineales cuya precisión queda determinada por los residuos $\xi^i_{ur} \triangleq \partial R^i_{ur} + sp^i_{ur} + cM^i_{ur} + \varepsilon^i_{\rho ur} = \xi^i_{\rho ur} + \partial R^i_{ur}$ correspondientes a la suma de los residuos del caso DGPS absoluto más el residuo geométrico con desvío estándar:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\xi_{\rho ur}} \simeq (2\ a\ 7m); \quad \sigma_{\partial R} \approx 0\ a\ 2m \\ &\Rightarrow \sigma_{\xi ur} = \sqrt{\sigma^2_{\xi\rho ur} + \sigma^2_{\partial R}} \approx (3\ a\ \ 7{,}5m) \end{aligned} \tag{9.73}$$

9.4 Técnicas de posicionamiento relativo con fase diferencial

De la discusión sobre el observable de fase realizada en los Párrafos 9.1.2 a 9.1.4 de este Capítulo, se advierte su potencial para proporcionar posicionamiento de muy alta precisión. En efecto, sus errores de medida (residuos mínimos) son en general centimétricos y aún milimétricos toda vez que sea posible disponer de antenas inmunes al efecto multi-pasos. Sin embargo, esta potencialmente alta precisión se ve limitada por dos características de dicho observable. La primera es la existencia de la ambigüedad cuya magnitud, como se vio, puede ser arbitrariamente grande. Se dice, por esta razón, que "el observable de fase es extremadamente preciso pero extremadamente inexacto". La segunda característica, compartida con el (menos preciso) observable de código, consiste en la presencia de los sesgos desconocidos y lentamente variantes: $E^i_u, cT^i_u, cI^i_u, c\delta t^i$. Contrariamente a las ambigüedades, estos sesgos tienen cotas superiores métricas, sin embargo, como son mucho más grandes que la longitud de onda λ y operan aditivamente a los errores de medida $(\lambda\varepsilon^i_\phi, cm^i_u)$, invalidan toda pretensión de precisión sub-centimétrica a partir del uso de este observable. Para lograr la alta precisión buscada es necesario entonces, o bien estimar con precisión centimétrica (y si posible milimétrica) dichos sesgos, usualmente llamados en este contexto "variables indeseadas", o bien crear de alguna manera nuevos observables diferenciales que sean independientes de ellos. Recién cuando esto último sea resuelto, será posible abordar el problema de determinar o estimar las ambigüedades con la exactitud requerida.

Las técnicas de fase diferencial (al igual que las de código diferencial) aprovechan la fuerte correlación espacio-temporal de los sesgos mencionados arriba para estimarlos o bien suprimirlos como perturbación en modo común mediante esquemas multi-receptor y/o multi-épocas

En este párrafo nos concentramos en describir observables diferenciales que dan cuenta de las variables indeseadas y por ende permiten formular apropiadamente el problema de la determinación de las ambigüedades.

9.4.1 Diferencias simples espaciales de fase

Retomamos el observable de fase (Ecs. (9.29)) con la ambigüedad real expresada como suma de las ambigüedades fraccional y entera: $B_j^i = \delta\phi_j^i - N_j^i$, para $i = 1,...,s$ (n° de satélites visibles comunes) y $j = u, r$,

$$L_j^i = \hat{R}_j^i + E^i + c(T_j^i - I_j^i) + c(\delta t_j - \delta t^i) + \lambda(\delta\phi_j^i - N_j^i) + cm_j^i + \lambda\varepsilon_\phi^i \tag{9.74}$$

Definimos el nuevo observable llamado diferencia de fase espacial simple entre usuario y referencia para cada satélite $i = 1,...,s$ visible desde ambos receptores:

$$L_{ur}^i(t) \triangleq L_u^i(t) - L_r^i(t) = \hat{R}_{ur}^i + E_{ur}^i + c(T_{ur}^i - I_{ur}^i) + c\delta t_{ur} + \lambda(\phi_{ur} - N_{ur}^i) + cm_{ur}^i + \lambda\varepsilon_{\phi ur}^i \tag{9.75}$$

donde se introdujo la diferencia entre fases sincrónicas:

$$\phi_{ur} \triangleq \delta\phi_u^i - \delta\phi_r^i = \Phi_u(t_o) - \Phi^i(t_o) - (\Phi_r(t_o) - \Phi^i(t_o)) = \Phi_u(t_o) - \Phi_r(t_o) \tag{9.76}$$

Como se advierte, esta última sólo depende de la diferencia entre las fases de los osciladores locales en el instante de enganche común y por tanto es independiente de *i*.

De la (9.75), notamos que las variables indeseadas que dependen exclusivamente de *i* fueron suprimidas con la diferencia espacial. Más específicamente, el nuevo observable no depende de los sesgos de los relojes satelitales ni de sus fases iniciales: $\Phi^i(t_o)$.

Para una línea de base corta: $|\mathbf{D}_{ur}| < 700m$, de acuerdo con la (9.71), $\hat{R}_{ur}^i$ podrá escribirse como función lineal en $\mathbf{D}_{ur}$ con residuo geométrico sub-centimétrico. Si a esto agregamos la suposición de que las diferencias entre errores troposféricos a tal distancia relativa puedan ser debidamente canceladas (tal vez usando algún modelo atmosférico local), la alta correlación espacial entre los sesgos ionosféricos y espaciales permitirá suponer al término $sp_{ur}^i = E_{ur}^i + c(T_{ur}^i - I_{ur}^i)$ al menos centimétrico y por ende incluirlo en los residuos. Bajo estas condiciones formulamos el:

Primer problema de resolución de ambigüedades enteras:

Sea el siguiente modelo del observable (9.75) con residuos centimétricos $\xi_{ur}^i \triangleq \partial R_{ur}^i + sp_{ur}^i + cm_{ur}^i + \lambda\varepsilon_{ur,\phi}^i$; $i = 1,...,s$:

$$L_{ur}^{i}(t) = -\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{i\,T}\mathbf{D}_{ur} + c\delta t_{ur} + \lambda\,(\phi_{ur} - N_{ur}^{i}) + \xi_{ur}^{i} \tag{9.77}$$

Introducimos la incógnita real: $\chi_{ur} \triangleq c\delta t_{ur} + \lambda(\phi_{ur} - N_{ur}^{1})$ y las incógnitas enteras: $N_{ur}^{il} \triangleq N_{ur}^{i} - N_{ur}^{l}$, $i = 1,...,s$, todas constantes en tanto *u* y *r* compartan los mismos satélites en vista y conserven el enganche de fase. Sumando y restando χ_{ur} a cada ecuación del sistema (9.77) y luego rescribiendo a éstas matricialmente se obtiene:

$$\mathbf{L}_{ur}^{s} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{1,T} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{s,T} & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{G}} \begin{bmatrix} D_{urx} \\ D_{ury} \\ D_{urz} \\ \chi_{ur} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ N_{ur}^{21} \\ \vdots \\ N_{ur}^{s1} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\xi}_{ur}^{s} \tag{9.78}$$

Donde se usaron las definiciones de los vectores de diferencias simples $\mathbf{L}_{ur}^{s} \triangleq \begin{bmatrix} L_{ur}^{1} & \cdots & L_{ur}^{s} \end{bmatrix}^{T} \in \mathbb{R}^{s}$ y de residuos $\boldsymbol{\xi}_{ur}^{s} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_{ur}^{1} & \cdots & \xi_{ur}^{s} \end{bmatrix}^{T} \in \mathbb{R}^{s}$.

El problema se reduce a resolver un sistema lineal de *s* ecuaciones con 4 incógnitas reales, *s*-1 incógnitas enteras y residuos centimétricos. Claramente, si todas las incógnitas fueran consideradas reales, el sistema sería incompatible, de hecho podría demostrarse que existe todo un sub-espacio lineal de dimensión 4 de soluciones posibles al problema de mínimos cuadrados formulado en base a la (9.78).

En cambio, conocidas las ambigüedades enteras (invariantes), la solución de mínimos cuadrados del sistema (9.78) permite estimar instante a instante las componentes ECEF del vector distancia relativa $\mathbf{D}_{ur}(t)$ con residuos centimétricos durante el tiempo en que ambos receptores compartan 4 o más satélites en vista. Nuevamente, la geometría de la constelación visible, representada por las filas de la matriz **G**, influirá decisivamente sobre la precisión final de las incógnitas reales.

Sin embargo, deberá tenerse en cuenta que ni bien se modifique la constelación visible común, será necesario recalcular dichos enteros. Los procedimientos, con las provisiones necesarias que permitan seguir con precisión la línea de base entre dos móviles, son conocidos en la literatura como *real time kinematics* (RTK).

La clave de los nuevos observables bajo la condición de línea de base corta es que éstos reducen los errores del segmento espacial y de propagación a magnitudes centimétricas. Esta condición es crucial para la convergencia de los métodos numéricos de determinación de las ambigüedades enteras (que finalmente se traducen en errores múltiplos de la longitud de onda) necesarios para lograr la alta precisión deseada. Sin embargo, la presencia de la incógnita real arbitrariamente grande χ_{ur} se traduce en una dificultad numérica considerable para resolver simultáneamente las ambigüedades enteras y las coordenadas de la línea de base. Por esta razón, si bien existen esquemas de posicionamiento relativo precisos basados en diferencias simples entre receptores, las diferencias espacio-satelitales descriptas en el párrafo siguientes son las preferidas para este fin dado que suprimen toda incógnita real excepto las coordenadas buscadas.

9.4.2 Diferencias dobles espacio-satelitales de fase

El observable diferencial simple (9.77):

$$L_{ur}^{i}(t) = -\langle \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{i}, \mathbf{D}_{ur} \rangle + (c\delta t_{ur} + \lambda\,\phi_{ur}) - \lambda N_{ur}^{i} + \xi_{ur}^{i};\ i = 1,\ldots,s \tag{9.79}$$

posee como "variables indeseadas" remanentes el sesgo relativo entre los relojes de los receptores $c\delta t_{ur}$ y las diferencias entre su fases sincrónicas $\lambda\,\phi_{ur}$. Interesa destacar que ambos son independientes de *i,* de este modo, eligiendo como referencia (por ejemplo) al satélite 1 (ver Fig. 9.4) es posible establecer los siguientes (*s*-1) diferencias dobles espacio satelitales:

$$L_{ur}^{i1} \triangleq L_{ur}^{i} - L_{ur}^{1} \approx -(\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{i} - \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{1})^{T}\mathbf{D}_{ur} - \lambda N_{ur}^{i1} + \xi_{ur}^{i1};\ i = 1,\ldots,s-1 \tag{9.80}$$

En tano que observables independientes de todas las variables indeseadas excepción hecha de las nuevas ambigüedades enteras. Sus residuos centimétricos quedan dados por:

$$\xi_{ur}^{i1} \triangleq \partial R_{ur}^{i1} + sp_{ur}^{i1} + cm_{ur}^{i1} + \lambda\varepsilon_{ur,\phi}^{i1};\ i = 1,\ldots,s-1 \tag{9.81}$$

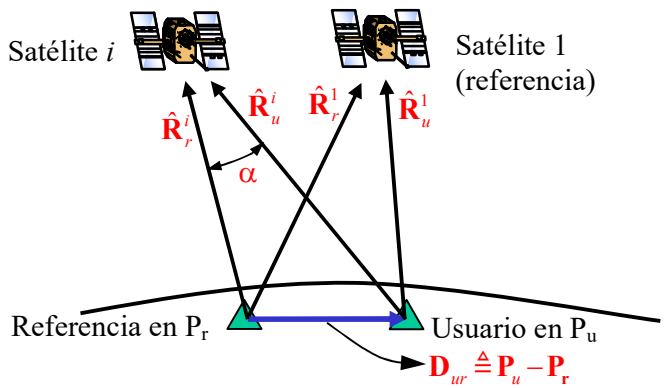


Figura 9.4: Diferencias dobles espacio-satelitales.

Segundo problema de resolución de ambigüedades enteras

Usando las definiciones de los vectores de diferencias y residuos dobles: $\mathbf{L}_{ur}^{d} \triangleq \left[L_{ur}^{21} \ \cdots \ L_{ur}^{s1} \right]^{T} \in \mathbb{R}^{s-1}$ y $\boldsymbol{\xi}_{ur}^{s} \triangleq \left[\xi_{ur}^{21} \ \cdots \ \xi_{ur}^{s1} \right]^{T} \in \mathbb{R}^{s-1}$, el sistema de ecuaciones (9.80) se rescribe matricialmente como:

$$\mathbf{L}_{ur}^{d} = \overbrace{\begin{bmatrix} -(\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{2} - \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{1})^{T} \\ \vdots \\ -(\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{s} - \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{1})^{T} \end{bmatrix}}^{\mathbf{G}} \begin{bmatrix} D_{urx} \\ D_{ury} \\ D_{urz} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} N_{ur}^{21} \\ \vdots \\ N_{ur}^{s1} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\xi}_{ur}^{d} \tag{9.82}$$

A diferencia del caso anterior el problema consiste en resolver un sistema lineal con sólo 3 incógnitas reales y *s*-1 incógnitas enteras. Esta última formulación es la más usada por los algoritmos que resuelven, a la vez las incógnitas reales y las ambigüedades enteras. La razón es que el problema es más simple, requiriere menos tiempo de cómputo y la solución resulta más precisa.

El condicionamiento de la matriz $G \in \mathbb{R}^{(s-1)x3}$ determinará fuertemente el DOP final de las estimaciones y esta vez será función no sólo de la geometría de la constelación común a ambos receptores, sino además de la selección del satélite de referencia. La recomendación usual es que éste último esté lo más cercano posible a la posición zenital.

9.4.3 Determinación de las ambigüedades enteras época por época.

Dividiendo la ecuación en metros (9.82) por la longitud de onda λ, se obtiene la ecuación en unidades de ciclos:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{FD}(t) + \mathbf{N} + \boldsymbol{\xi}(t) \tag{9.83}$$

que constituye el modelo más usado para el posicionamiento relativo de precisión basado en medidas diferenciales de la fase de portadora, entre dos receptores. En él se usaron las definiciones obvias para $\mathbf{N} \in \mathbb{Z}^m$ y $\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{\Phi}(t) = \lambda^{-1}\mathbf{L}_{ur}^d(t) \in \mathbb{R}^m$ junto con $\mathbf{F} = \lambda^{-1}\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m\text{x}3}$ siendo $m = s-1$. Por las razones que veremos, en el modelo se explicita la época *t* de las medidas y residuos. En rigor, la matriz **F** también varía con el tiempo debido a los desplazamientos de los satélites en su orbita y a movimientos absolutos o relativos de ambos receptores a bordo de sendos móviles. Sin embargo, como **F** depende de la geometría de la constelación común y no de magnitudes absolutas, sus elementos son lentamente variables. En cuanto al vector entero **N,** es supuesto constante durante las observaciones mientras los receptores permanezcan enganchados a un conjunto común e invariante de satélites de la constelación GPS. Por hipótesis, el vector de los residuos $\boldsymbol{\xi}(t)$ es un proceso estocástico centrado tal que: $\text{cov}(\boldsymbol{\xi}(t)) = \mathbf{Q} = \mathbf{W}^{-1} > 0$

El problema a resolver para una dada época *t* consiste en la minimización "mixta" (simultáneamente sobre reales y enteros) del siguiente criterio (cuadrado de la norma de los residuos) para un dado vector de medidas $\widehat{\mathbf{\Phi}}(t)$ sobre los espacios de vectores $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{N} \in \mathbb{Z}^m$:

$$C(\mathbf{D},\mathbf{N};\widehat{\mathbf{\Phi}}) \triangleq \left\|\widehat{\mathbf{\Phi}} - \mathbf{FD} - \mathbf{N}\right\|_W^2 = (\mathbf{FD} - (\widehat{\mathbf{\Phi}} - \mathbf{N}))^T \mathbf{W}(\mathbf{FD} - (\widehat{\mathbf{\Phi}} - \mathbf{N})) \tag{9.84}$$

donde $\| \ \|_W$ representa la norma según la matriz de covariancia positiva definida $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{mxm}$. La solución buscada, si existe es:

$$\hat{\mathbf{D}}(\widehat{\mathbf{\Phi}}) = \underset{\mathbf{D}\in\mathbb{R}^3, \mathbf{N}\in\mathbb{Z}^m}{\arg\min}\ C(\mathbf{D},\mathbf{N};\widehat{\mathbf{\Phi}}) \tag{9.85}$$

Por falta de espacio no desarrollaremos aquí la solución general de este problema que en muchos aspectos es aún un tema de investigación. En el Capítulo 11 veremos, sin

embargo, como es posible abordar la estimación de las ambigüedades en el contexto de la navegación integrada.

Tal vez el más popular de los métodos de resolución del problema (9.85) usando exclusivamente observables diferenciales dobles de fase época por época sea el *LAMBDA method* (*Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment)* desarrollado por Teunissen. Recomendamos sobre este tema: Teunissen, (1994), Teunissen, (1995), Teunissen, et al. (1995) o la excelente presentación en el Cap. 6 de Misra/Enge (2006).

9.4.4 Diferencias espacio-temporales de la Fase

Siempre bajo la condición de línea de base corta (lo cual permite, como vimos, una formulación lineal de los observables diferenciales de fase respecto de las componentes del vector línea de base), partimos del observable diferencial simple (9.77) medido en dos épocas distintas $t-\Delta t$ y t y definimos las diferencias espacio-temporales

$$\begin{aligned}\delta L_{ur}^{i}(t) &\triangleq L_{ur}^{i}(t)-L_{ur}^{i}(t-\Delta t)\\ &=-(\breve{\tilde{\mathbf{R}}}_{\boldsymbol{u}}^{i}(t)-\breve{\tilde{\mathbf{R}}}_{\boldsymbol{u}}^{i}(t-\Delta t))^{T}\mathbf{D}_{ur}(t)-\breve{\tilde{\mathbf{R}}}_{\boldsymbol{u}}^{i}(t)^{T}(\mathbf{D}_{ur}(t)-\mathbf{D}_{ur}(t-\Delta t))+\delta\xi_{ur}^{i}\end{aligned} \tag{9.86}$$

Agrupando las diferencias en el vector $\Delta\mathbf{L}_{\mathbf{ur}}(t)\triangleq[\delta L_{ur}^{1}(t)\ ....\delta L_{ur}^{s}(t)]^{T}$ los residuos en el vector $\boldsymbol{\delta\xi}_{\mathbf{ur}}$ y llamando $\Delta\mathbf{D}_{\mathbf{ur}}(t)=\mathbf{D}_{ur}(t)-\mathbf{D}_{ur}(t-\Delta t)$, las anteriores se rescriben matricialmente como sigue:

$$\Delta\mathbf{L}_{\mathbf{ur}}(t)=\begin{bmatrix}-(\breve{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{1,T}(t)-\breve{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{1,T}(t-\Delta t))\\ \vdots\\ -(\breve{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{s,T}(t)-\breve{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{s,T}(t-\Delta t))\end{bmatrix}\mathbf{D}_{\mathbf{ur}}(t)+\begin{bmatrix}-\breve{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{1,T}(t)\\ \vdots\\ -\breve{\tilde{\mathbf{R}}}_{u}^{s,T}(t)\end{bmatrix}\Delta\mathbf{D}_{\mathbf{ur}}(t)+\boldsymbol{\delta\xi}_{\mathbf{ur}} \tag{9.87}$$

De la anterior surge, en primer lugar, que las ambigüedades enteras no intervienen en los nuevos observables diferenciales y en segundo, que éstos "miden" simultáneamente a $\mathbf{D}_{\mathbf{ur}}(t)$ y $\Delta\mathbf{D}_{\mathbf{ur}}(t)$. Con lo cual, no sólo tienen información de la distancia relativa en tiempo real, si no, además, de su variación entre dos épocas consecutivas (medida de la velocidad relativa). Sin embargo, evaluando cuidadosamente el primer termino de la expresión anterior advertimos que la sensibilidad de este observable respecto de $\mathbf{D}_{\mathbf{ur}}(t)$ requiere un cambio importante en la geometría de la constelación en el tiempo Δt. Puesto de otro modo, una estimación precisa de la distancia relativa requiere que ambos receptores permanezcan inmóviles durante el tiempo necesario para asegurar un valor bajo de DOP. Esto sin dudas limita fuertemente el uso de un tal observable a la navegación de vehículos, pero en cambio encuentra un campo interesante de aplicación en las mediciones geodésicas. Por otro lado, para Δt suficientemente pequeño el segundo término de la (9.87) nos dice que una buena geometría de la constelación común a ambos receptores habilita la determinación precisa de la velocidad relativa entre ambos vehículos casi época por época.

Capítulo 10
Navegación Integrada

Un sistema de navegación inercial, constituido por una unidad de mediciones inerciales (UMI: ternas de giróscopos y acelerómetros) y un algoritmo de integración numérica de las ecuaciones cinemáticas como los vistos en el Capítulo 7, provee estimaciones de posición, velocidad y orientación de un vehículo a una tasa de muestreo sólo limitada por la velocidad de cómputo en tiempo real abordo. Sin embargo, como se mostró en ese mismo Capítulo, el desconocimiento en las condiciones iniciales, los errores de los sensores inerciales, las aproximaciones del modelo de gravedad y las del algoritmo de integración numérica hacen que el navegador inercial puro adolezca de errores que crecen polinomialmente con el tiempo. Clásicamente, estos errores han sido controlados (acotados o reducidos) usando medidas de sensores exoceptivos con las cuales se reinicializan las variables de navegación. Un ejemplo es el filtro estabilizador del canal vertical introducido en el Párrafo 5.4.1 que actualiza la altura con medidas barométricas. En este Capítulo se presenta un procedimiento numérico sistemático para fusionar óptimamente (en el sentido que oportunamente definiremos) datos provenientes de cualquier tipo de sensores, incluidos los sensores inerciales. De este modo, se logra una navegación a la vez precisa, estable y con una alta tasa de salida de datos.

Las técnicas de fusión de datos procesan medidas provenientes de diversas fuentes y con ellas estiman las variables deseadas. Su interés radica en que mientras más fuentes de información se disponga más se reduce la imprecisión de la estimación a la vez que aumenta la confiabilidad y disponibilidad de los estimados. La "*Navegación Integrada*" es la aplicación de estos métodos a la estimación del estado cinemático de un vehículo visto como un proceso estocástico continuo modelado por las ecuaciones cinemáticas descritas en el Capítulo 5. La información disponible sobre el estado son: las medidas inerciales, suministradas a una alta tasa de muestreo o aún en tiempo continuo, las mediciones exoceptivas, adquiridas en instantes no necesariamente equi-espaciados ni siempre por los mismos instrumentos sumada a toda información recabada a priori sobre el estado cinemático inicial. El carácter estocástico del estado se debe a: a) perturbaciones en las medidas, b) incertezas en las condiciones iniciales, c) imprecisiones en los modelos de los sensores y d) errores de en el modelo de la gravedad.

Una característica destacable de la navegación integrada es que juntamente con el estado cinemático estima en línea las incertezas paramétricas de los modelos, en particular los de los sensores. Esto adquiere particular relevancia en sistemas de bajo costo sonde los sensores suelen adolecer de pobres performance y estabilidad funcional.

Los sistemas de navegación integrada habilitan de este modo un comportamiento adaptativo (ajustan sus propios parámetros), estable (sin las divergencias propias de la navegación inercial pura estudiadas en el Capítulo 6), redundante y robusto frente a fallas, con buena performance dinámica tanto en altas como en bajas frecuencias, capaz de proveer una alta tasa de datos de salida. Sumado a esto, no es menor el hecho de que puedan ser aplicables a configuraciones instrumentales casi arbitrarias.

El Capítulo se inicia formulando el problema de la navegación integrada para luego enmarcarlo en la teoría de la fusión de datos vía el filtrado no lineal. Una introducción a esta teoría se presenta en el Párrafo 10.2 desde el enfoque Bayesiano. El objetivo es situar el problema en un contexto general de modo de otorgar al diseñador o investigador la amplitud de criterio necesaria para evaluar configuraciones alternativas para una dada aplicación o diagnosticar las causas de deficiencias en las soluciones propuestas. Esto parece necesario en una tecnología cada vez más ubicua en la cual hay mucho para innovar en términos de aplicaciones, configuraciones instrumentales y algoritmos numéricos.

La complejidad inherente al filtrado no lineal impone, sin embargo, el uso de procedimientos numéricos aproximados, la mayoría de los cuales se basan en la teoría del regresor lineal óptimo. Luego de presentar este concepto en el Párrafo 10.3, se introducen las aproximaciones más frecuentemente usadas en navegación, a saber: El *Filtro de Kalman Extendido* (*EKF: Extended Kalman Filter*) propuesto inicialmente por Jazwinski, (1970) y el *Filtro de Kalman con "Puntos Sigma*" (*SPKF: Sigma Point Kalman Filter*) propuesto por Julier/Uhlmann/Durrant-Whyte, (1995). Ambos son tratados, respectivamente, en los Párrafos 10.4 y 10.5.

10.1 Formulación del problema

Como se dijo, la navegación integrada es una aplicación particular del filtrado no lineal a la estimación del estado cinemático de un vehículo. En el Capítulo 5 se mostró que dicho estado evoluciona según ecuaciones estocasticas que obedecen a un modelo general del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}_{kin}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_g) + \mathbf{B}_{kin}(\mathbf{x})\boldsymbol{\mu};\ t \geq t_0;\quad \mathbf{x}(t_0) \sim v.a.\{\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_x(t_0)\} \tag{10.1}$$

La forma de la función vectorial $\mathbf{a}_{kin}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_g)$ y la matriz $\mathbf{B}_{kin}(\mathbf{x})$ dependen de la terna de referencia elegida (ver Ecs. **(5.3) (5.17)** y **(5.33)** del Capítulo 5). El vector $\mathbf{p}_g$ es el conjunto de parámetros que condensan las incertidumbres del modelo de gravedad, en tanto que el estado inicial, en el instante arbitrario t_0, es el vector aleatorio $\mathbf{x}(t_0)$ cuyo valor esperado y matriz de covariancia son supuestos conocidos. El modelo resulta lineal respecto de la función forzante de entrada dada por el vector $\boldsymbol{\mu}$ de las magnitudes inerciales.

10.1.1 Descripción del sistema de medida

La Fig. 10.1 esquematiza la interrelación entre el estado cinemático continuo subyacente $\mathbf{x}(t)$ y las medidas accesibles en tiempos discretos (por encima de la línea de trazos). $\boldsymbol{\mu}(t)$ representa el perfil temporal continuo de las magnitudes inerciales, cuyas medidas son entregadas por la unidad de mediciones inerciales (UMI) en los instantes de muestreo t_s a una tasa uniforme que en la práctica oscila entre los 50 y 300sps.

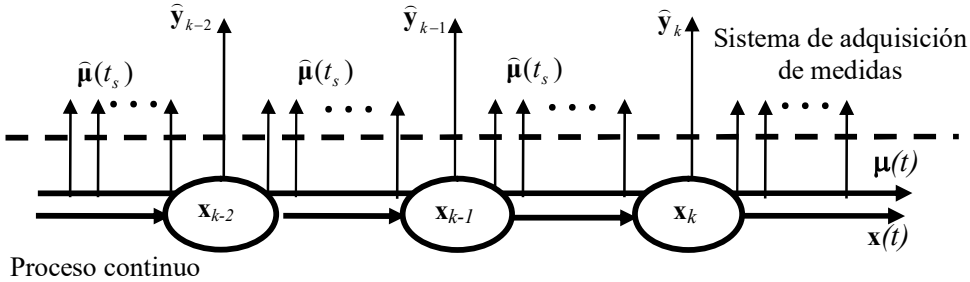


Figura 10.1: Esquema de tiempos del sistema de medidas.

Por otra parte, los sensores exoceptivos (p.e.: magnetómetro, receptor GNSS, altímetro, *star tracker*, sensor de distancia, etc.) proveen las mediciones $\hat{\mathbf{y}}_k$ en los instantes discretos t_k (no necesariamente equi-espaciados) vinculadas con el estado cinemático $\mathbf{x}_k$ mediante un modelo del sensor correspondiente supuesto conocido y expresado como*:

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k;\mathbf{p}_e) + \eta_k; \quad \eta_k \sim N(0,\mathbf{R}_k) \tag{10.2}$$

El índice k en $\mathbf{h}_k$ enfatiza el hecho de que el sensor exoceptivo no es necesariamente el mismo en cada instante de adquisición de una medida. El vector $\mathbf{p}_e$ agrupa los parámetros inciertos del modelo del sensor. Para simplificar la notación se evita indexar con k al vector $\mathbf{p}_e$. η_k representa el ruido discreto aditivo de medida supuesto centrado, gaussiano e independiente con matriz de covariancia $\mathbf{R}_k$.

El vector de las magnitudes inerciales $\boldsymbol{\mu}$ es sólo accesible a través de sus medidas. Como se estableció en el Capítulo 2, el modelo que transforma las mediciones $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ de la UMI en las correspondientes magnitudes inerciales, se supone de la forma (ver definiciones **(2.11)**, **(2.12)** y **(2.13)** del Párrafo 2.3.1):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^b \\ \mathbf{f}^b \end{bmatrix} = \mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\mu}};\mathbf{p}_i) + \boldsymbol{\xi}_\mu = \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\mu}})\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} + \boldsymbol{\xi}_\mu \\ &\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f^T & \boldsymbol{\sigma}_\omega^T \end{bmatrix}^T; \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_f^T & \mathbf{b}_\omega^T \end{bmatrix}^T; \ \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^T & \mathbf{b}^T \end{bmatrix}^T; \end{aligned} \tag{10.3}$$

El vector $\mathbf{p}_i$ agrupa los parámetros inciertos del modelo de los instrumentos inerciales. Dado que la función $\mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\mu}};\mathbf{p}_i)$ es bilineal en sus argumentos, con el modelo de estado (10.1) resulta lineal tanto respecto de las perturbaciones estocásticas como respecto de las medidas inerciales. En el Capítulo 2 se mostró además (ver Párrafo 2.7) que la perturbación $\boldsymbol{\xi}_\mu$ puede representarse mediante un modelo markoviano de la forma (ver definiciones correspondientes a la Ec. **(2.56)**):

*Para simplificar la notación, las variables en instantes discretos t_k podrán ser denotadas: $v(t_k)=v_k$.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= Z\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{n}_\zeta; \quad \mathbf{n}_\zeta \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_\zeta); \; \boldsymbol{\zeta}(t_0) \sim v.a.(0, \mathbf{P}_\zeta) \\ \boldsymbol{\xi}_\mu &= \Gamma\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{n}_\xi; \; \mathbf{n}_\xi \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_\xi) \end{aligned} \tag{10.4}$$

Con el único fin de no recargar la presentación, en adelante se supondrá que $\Gamma = 0$ en (10.4), lo que equivale a suponer que la perturbación aditiva $\boldsymbol{\xi}_\mu$ es un ruido blanco continuo centrado con densidad espectral matricial $\mathbf{Q}_\xi$, matriz que en la práctica es supuesta constante. Reconocemos sin embargo que en ciertos casos en particular sistemas de alta precisión esta suposición puede no ser la adecuada. En tal caso será necesario agregar las componentes del estado $\boldsymbol{\zeta}$ al vector de estado aumentado que se definirá en el próximo párrafo.

10.1.2 Estado aumentado del sistema de navegación

Los valores de los parámetros instrumentales $\mathbf{p}_i$ y $\mathbf{p}_e$ podrán ser los consignados en la hoja de datos del fabricante del instrumento o bien, de recerirse mayor precisión, podrán ser medidos por el usuario en laboratorios de ensayos mediante procedimientos de calibración instrumental adecuados a ese fin. Debido a las simplificaciones propias del modelado, estos parámetros pueden sin embargo exhibir inestabilidades que se verán acentuadas en instrumentos de bajo costo. Por esto, en la práctica no son considerados constantes sino procesos aleatorios. La vía más usual para captar su variabilidad consiste en modelarlos como procesos brownianos continuos mediante:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_i \\ \dot{\mathbf{p}}_e \\ \dot{\mathbf{p}}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_i \\ \xi_e \\ \xi_g \end{bmatrix} = \boldsymbol{\xi}_p(t); \\ &\mathbf{p}(t_k) = \mathbf{p}_k \sim N\{\hat{\mathbf{p}}_k, \mathbf{P}_p(t_k)\}; \quad \mathbf{P}_p = diag(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_e, \mathbf{P}_g) \\ &\boldsymbol{\xi}_p(t) \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_p); \; \mathbf{Q}_p = diag(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_e, \mathbf{Q}_g) \end{aligned} \tag{10.5}$$

Donde, la condición inicial en un instante arbitrario t_k es un vector aleatorio supuesto gaussiano de valor esperado $\hat{\mathbf{p}}_k$ (estimación *a priori*) y matriz de covariancia $\mathbf{P}_p(t_k)$. El proceso vectorial continuo $\boldsymbol{\xi}_p(t)$ es supuesto independiente, gaussiano y centrado con $\mathbf{Q}_p$ una matriz diagonal conformada por los sub-bloques diagonales $\mathbf{Q}_i$, $\mathbf{Q}_e$ y $\mathbf{Q}_g$.

El objeto de la navegación integrada es estimar para $t \geq t_k$ simultáneamente todas las componentes del *vector de estado aumentado* (*VEA*):

$$\boldsymbol{\chi} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{p}_i^T & \mathbf{p}_e^T & \mathbf{p}_g^T \end{bmatrix}^T \tag{10.6}$$

Denotando:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{kin}(\boldsymbol{\chi}; \hat{\boldsymbol{\mu}}) &= \mathbf{a}_{kin}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_g) + \mathbf{B}_{kin}(\mathbf{x})\mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{p}_i) \\ &= \mathbf{a}_{kin}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_g) + \mathbf{B}_{kin}(\mathbf{x})(\mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\mu}})\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \end{aligned} \tag{10.7}$$

El estado aumentado $\boldsymbol{\chi}(t)$ resulta un proceso modelado mediante la siguiente ecuación diferencial no lineal estocástica que surge de combinar las Ecs. (10.1), (10.2) y (10.3).

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{kin}(\boldsymbol{\chi};\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)) \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathcal{F}(\boldsymbol{\chi};\hat{\boldsymbol{\mu}})} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{kin}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}(\mathbf{x})} \boldsymbol{\xi}(t);\ \boldsymbol{\xi}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{\mu} \\ \boldsymbol{\xi}_{p} \end{bmatrix} \sim N(0,\delta(t)\mathbf{Q}) \qquad (10.8)$$
$$\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\chi}_k) + \boldsymbol{\eta}_k; \quad \boldsymbol{\eta}_k \sim N(0,\mathbf{R}_k)$$

El modelo es lineal respecto de las medidas inerciales $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y el ruido blanco $\boldsymbol{\xi}(t)$; este último con densidad espectral $\mathbf{Q}(t) = diag(\mathbf{Q}_{\xi},\mathbf{Q}_p)$. El ruido de medida aditivo $\boldsymbol{\eta}_k$ es supuesto descorrelacionado de $\boldsymbol{\xi}(t)$. Las mediciones $\hat{\mathbf{y}}_k$ constituyen los datos exoceptivos adquiridos sobre el proceso $\boldsymbol{\chi}(t)$ en los instantes discretos t_k. La condición inicial del VEA es un vector aleatorio con momentos: $E\{\boldsymbol{\chi}(t_0)\} = \hat{\boldsymbol{\chi}}_0$ y $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0 = \mathrm{E}\{\boldsymbol{\chi}(t_0) - \hat{\boldsymbol{\chi}}_0)(\boldsymbol{\chi}(t_0) - \hat{\boldsymbol{\chi}}_0)^T\}$ supuestos conocidos:

$$\boldsymbol{\chi}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{p}(t_0) \end{bmatrix} \sim v.a.\{\hat{\boldsymbol{\chi}}_0, \mathbf{P}_0\}$$
$$\hat{\boldsymbol{\chi}}_0 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{p}}_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x(t_0) & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_p(t_0) \end{bmatrix} \qquad (10.9)$$

10.1.3 Procesos de Markov

La propiedad fundamental que caracteriza a un proceso estocástico *markoviano* (Andréi Andréyevich Márkov, 1856-1922) se puede sintetizar como: "*Dado el estado* $\boldsymbol{\chi}(t_k)$ *en un instante arbitrario* t_k*, la densidad de probabilidad del estado en cualquier instante futuro* $t > t_k$ *condicionada al conocimiento de toda la historia temporal pasada (*$t \le t_k$*) es igual a la densidad condicionada exclusivamente al conocimiento del estado en* t_k*"*.

Formalmente:

$$p(\boldsymbol{\chi}(t) / \boldsymbol{\chi}[-\infty, t_k]) = p(\boldsymbol{\chi}(t) / \boldsymbol{\chi}(t_k)); \ \forall t > t_k \qquad (10.10)$$

En otros términos: *el estado del proceso en cualquier instante de tiempo condensa la información probabilística de la historia pasada anterior a ese instante*.

Por esto, la densidad de probabilidad condicional: $p_{\chi}(t;t_0) = p(\boldsymbol{\chi}(t) / \boldsymbol{\chi}(t_0))$, llamada también "*probabilidad de transición",* en función de dos instantes de tiempo ordenados $t \ge t_0$, es lo que caracteriza al proceso markoviano $\boldsymbol{\chi}$. Un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas en forma de ecuaciones de estado tales como las del modelo (10.8) (en este contexto llamadas ecuaciones de difusión), genera un proceso markoviano. Como se muestra en Papoulis, (1991) (ver también Åström, 1970), la probabilidad de transición resulta ser la solución de un sistema de ecuaciones a derivadas parciales llamado de *Fokker-Plank (FP),* con condición de contorno la función densidad de probabilidad del proceso en un instante cualquiera t_0: $p(\boldsymbol{\chi}(t_0))$. Las

ecuaciones de *FP*, también llamadas *de difusión hacia adelante o de Kolmogorov,* pueden ser obtenidas en forma directa a partir de las ecuaciones de difusión.

10.2 Estimación óptima Bayesiana del estado aumentado

Denotamos al conjunto de observaciones exoceptivas adquiridas hasta un dado instante t_k como:

$$\mathbf{Y}_k \triangleq \{\hat{\mathbf{y}}_k, \hat{\mathbf{y}}_{k-1}, \hat{\mathbf{y}}_{k-2}, ...\} \tag{10.11}$$

Como es sabido (ver por ejemplo Papoulis, 1991), el estimador óptimo en el sentido medio-cuadrático del estado aumentado $\chi(t)$, dadas todas las medias disponibles anteriores a $t \geq t_k$, es su valor esperado condicionado a las mediciones $\mathbf{Y}_k$ formalmente escrito en función de la densidad de probabilidad condicional $p(\chi(t)/\mathbf{Y}_k)$ como:

$$\mathrm{E}\{\chi(t)/\mathbf{Y}_k\} = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) p(\chi(t)/\mathbf{Y}_k) d\chi_k; \; t \geq t_k \tag{10.12}$$

El procedimiento recursivo para la determinación de este estimador a medida que se adquieren nuevas observaciones es la solución del llamado **problema de filtrado continuo-discreto** y se descompone en dos pasos.

10.2.1 Fase de predicción:

La densidad de probabilidad de transición $p(\chi(t)/\chi_k)$ del proceso Markoviano $\chi(t)$ para $t \geq t_k$ es la solucion de las ecuaciones a derivadas parciales espacio temporales de *Fokker-Plank* con condicion de contorno $p(\chi_k/\mathbf{Y}_k)$ en $t = t_k$. Con ambas densidades se construye la densidad de probabilidad condicional *a priori*, a partir de la densidad condicional marginal:

$$\begin{aligned} p(\chi(t)/\mathbf{Y}_k) &= \int p(\chi(t), \chi_k/\mathbf{Y}_k) d\chi_k = \int p(\chi(t)/\chi_k, \mathbf{Y}_k) p(\chi_k/\mathbf{Y}_k) d\chi_k \\ &= \int p(\chi(t)/\chi_k) p(\chi_k/\mathbf{Y}_k) d\chi_k \end{aligned} \tag{10.13}$$

Donde, la 1ª igualdad es simplemente el cálculo de una densidad marginal, la 2ª es el resultado de aplicar la identidad bayesiana general: $p(x,y) = p(x/y)p(y)$ y la 3ª surge del carácter markoviano $\chi(t)$ para $t > t_k$ que, cuando es condicionado al estado anterior χ_k, resulta independiente de toda medida anterior al instante t_k*. Sustituyendo la (10.13) en la (10.12) se obtiene la predicción óptima de $\chi(t)$ para t entre dos instantes sucesivos de adquisición de medidas exoceptivas ($t \in [t_k, t_{k+1})$), dadas las medidas pasadas disponibles $\mathbf{Y}_k$.

* En efecto, siendo $\chi(t)$ markoviano, el conocimiento cualquier variable función del estado en un instante anterior a t_k no agrega información alguna al conocimiento del estado en t_k.

10.2.2 Fase de actualización:

Con la llegada de la nueva medición $\hat{\mathbf{y}}_{k+1}$, se obtiene la densidad condicional $p(\boldsymbol{\chi}_{k+1} / \mathbf{Y}_{k+1})$ mediante la cual es posible calcular el nuevo estimador óptimo *a posteriori*:

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{\chi}_{k+1} / \mathbf{Y}_{k+1}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\chi}_{k+1} p(\boldsymbol{\chi}_{k+1} / \mathbf{Y}_{k+1}) d\boldsymbol{\chi}_{k+1} \tag{10.14}$$

Para determinar $p(\boldsymbol{\chi}_{k+1} / \mathbf{Y}_{k+1})$ se usa la siguiente relación bayesiana (ver p.e. Papoulis, 1991):

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\chi}_{k+1} / \mathbf{Y}_{k+1}) \equiv p(\boldsymbol{\chi}_{k+1} / \hat{\mathbf{y}}_{k+1}, \mathbf{Y}_k) &= \frac{p(\boldsymbol{\chi}_{k+1}, \hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \mathbf{Y}_k)}{p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \mathbf{Y}_k)} \\ &= \frac{p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \boldsymbol{\chi}_{k+1}, \mathbf{Y}_k) p(\boldsymbol{\chi}_{k+1} / \mathbf{Y}_k)}{p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \mathbf{Y}_k)} = \frac{p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \boldsymbol{\chi}_{k+1}) p(\boldsymbol{\chi}_{k+1} / \mathbf{Y}_k)}{p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \mathbf{Y}_k)} \end{aligned} \tag{10.15}$$

Una vez más, en la última igualdad se usó la condición de markovianidad de $\boldsymbol{\chi}(t)$. Para el cálculo de la densidad condicional $p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \boldsymbol{\chi}_{k+1})$ se parte del modelo de la medición exoceptiva en el instante t_{k+1} dado por la 2ª de las Ecs. (10.8), para escribir:

$$\begin{aligned} p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1}, \boldsymbol{\eta}_{k+1} / \boldsymbol{\chi}_{k+1}) &= p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \boldsymbol{\eta}_{k+1}, \boldsymbol{\chi}_{k+1}) p(\boldsymbol{\eta}_{k+1} / \boldsymbol{\chi}_{k+1}) \\ &= \delta(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}(\boldsymbol{\chi}_{k+1}) - \boldsymbol{\eta}_{k+1}) p(\boldsymbol{\eta}_{k+1}) \end{aligned} \tag{10.16}$$

En la 2ª igualdad se usó la independencia de $\boldsymbol{\eta}_k$ respecto de $\boldsymbol{\chi}_k$ y el hecho de que, de acuerdo con el modelo (10.8), $\hat{\mathbf{y}}_{k+1}$ resulta una variable "cierta" cuando $\boldsymbol{\eta}_{k+1}, \boldsymbol{\chi}_{k+1}$ están dados, por lo tanto, su densidad está concentrada en el único punto donde no se anula el "delta" de Dirac $\delta(\cdot)$. Marginalizando la expresión anterior respecto de $\boldsymbol{\eta}_{k+1}$ y usando nuevamente la condición de markovianidad de $\boldsymbol{\chi}(t)$ y de independencia de $\boldsymbol{\eta}_k$ se obtiene:

$$\begin{aligned} p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \boldsymbol{\chi}_{k+1}) &= \int \delta(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}(\boldsymbol{\chi}_{k+1}) - \boldsymbol{\eta}_{k+1}) p(\boldsymbol{\eta}_{k+1}) d\boldsymbol{\eta}_{k+1} \\ &= p_{\eta_{k+1}}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}(\boldsymbol{\chi}_{k+1})) \end{aligned} \tag{10.17}$$

Donde con $p_{\eta_{k+1}}(\cdot)$ se denota la densidad de probabilidad de $\boldsymbol{\eta}_{k+1}$ evaluada en el argumento. Resta determinar la densidad condicional $p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \mathbf{Y}_k)$, para lo cual se parte una vez más de la relación bayesiana:

$$\begin{aligned} p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1}, \boldsymbol{\chi}_{k+1} / \mathbf{Y}_k) &= p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \boldsymbol{\chi}_{k+1}, \mathbf{Y}_k) p(\boldsymbol{\chi}_{k+1} / \mathbf{Y}_k) \\ &= p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \boldsymbol{\chi}_{k+1}) p(\boldsymbol{\chi}_{k+1} / \mathbf{Y}_k) \end{aligned} \tag{10.18}$$

La segunda igualdad resulta otra vez de la markovianidad del proceso $\boldsymbol{\chi}(t)$. La densidad de probabilidad buscada se obtiene marginando la anterior respecto de $\boldsymbol{\chi}_{k+1}$ y usando la relación (10.17) mediante:

$$p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \mathbf{Y}_k) = \int p_{\eta_{k+1}}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}(\boldsymbol{\chi}(t_{k+1}))p(\boldsymbol{\chi}_{k+1} / \mathbf{Y}_k)d\boldsymbol{\chi}_{k+1} \tag{10.19}$$

Conocida la densidad (10.19) es posible ahora obtener formalmente la predicción óptima de la "próxima" medida $\hat{\mathbf{y}}_{k+1}$ mediante:

$$\mathrm{E}\{\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \mathbf{Y}_k\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{y}}_{k+1} p(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} / \mathbf{Y}_k) d\hat{\mathbf{y}}_{k+1} \tag{10.20}$$

Finalmente, la nueva densidad a posteriori $p(\boldsymbol{\chi}_{k+1} / \mathbf{Y}_{k+1})$ surge de sustituir en la (10.15), las (10.19) y (10.13) para $t=t_{k+1}$. Con ésta se reinicia nuevamente la fase de predicción, lo que asegura la recursión del procedimiento.

10.3 Aproximaciones del estimador recursivo óptimo

A pesar de su gran interés teórico, el procedimiento bayesiano para obtener el estimador optimo recursivo requiere evaluar cada vez complejas integrales como las (10.13), (10.14) ó (10.19). Como si esto fuera poco, necesita además resolver la ecuación diferencial no lineal de FP a derivadas parciales para obtener la densidad de probabilidad de transición buscada $p(\boldsymbol{\chi}(t)/\boldsymbol{\chi}_k)$ del proceso $\boldsymbol{\chi}(t)$ para $t>t_k$. Claramente, esto es impracticable en general, sin embargo, si tanto el estado $\boldsymbol{\chi}(t)$ como sus medidas $\hat{\mathbf{y}}_k$ obedecen a modelos lineales y al mismo tiempo las perturbaciones y condiciones iniciales son gaussianas, entonces todas las variables aleatorias son también gaussianas y en este caso el estimador recursivo óptimo exacto es el filtro lineal (o regresor lineal óptimo) propuesto por Kalman (Kalman, 1960). De otro modo, cualquier solución viable al problema de la estimación recursiva no lineal de $\boldsymbol{\chi}(t)$ será necesariamente aproximada.

Llamaremos estimador *a priori (o predictor),* que denotamos $\hat{\boldsymbol{\chi}}^-(t)$, a todo estimador del proceso $\boldsymbol{\chi}(t)$ que sea función de las medidas $\mathbf{Y}_k \triangleq \{\hat{\mathbf{y}}_0,...,\hat{\mathbf{y}}_{k-2},\hat{\mathbf{y}}_{k-1},\hat{\mathbf{y}}_k\}$ adquiridas hasta un instante t_k tal que $t > t_k$. En particular, se denotará: $\hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^- = \hat{\boldsymbol{\chi}}^-(t_{k+1})$ al estimador *a priori* calculado para el instante t_{k+1} en que es adquirida la próxima medida. Bajo las mismas condiciones, denotamos $\hat{\mathbf{y}}_{k+1}$ a la predicción de dicha medida. En cambio, denotaremos con $\hat{\boldsymbol{\chi}}(t_k) = \hat{\boldsymbol{\chi}}_k$ al estimador *a posteriori* obtenido en $t = t_k$ función de las medidas $\mathbf{Y}_k$ adquiridas hasta ese mismo instante.

La siguiente es la estructura general de un regresor lineal:

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}) = \hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1}\delta\mathbf{y}_{k+1} \tag{10.21}$$

El segundo término del segundo miembro debe ser visto como una corrección a la estimación *a priori* $\hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^{-}$ función de la diferencia $\delta\mathbf{y}_{k+1} = \hat{\mathbf{y}}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}$ entre la "nueva" medida en el instante t_{k+1} y su correspondiente predicción. Dicha diferencia se conoce con el nombre de *innovación* y la matriz $\mathbf{K}_{k+1}$ es llamada ganancia del regresor. El criterio de optimalidad para la matriz $\mathbf{K}_{k+1}$ es:

$$\hat{\mathbf{K}}_{k+1} = \underset{\mathbf{K}}{\arg\min}\, traza(E\{\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}{}^{T}\}) \tag{10.22}$$

Donde:

$$\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1} \triangleq \boldsymbol{\chi}_{k+1} - \hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1} = \delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}^{-} - \mathbf{K}_{k+1}\delta\mathbf{y}_{k+1} \tag{10.23}$$

Como puede verse, por ejemplo en Kailath (1983) o también Jazwinski (1970), la ganancia óptima que cumple el criterio (10.22) existe, y es la única que satisface la condición de "ortogonalidad":

$$E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}(\delta\mathbf{y}_{k+1})^{T}\right\} = 0 \tag{10.24}$$

Sustituyendo en la condición anterior la expresión (10.21) se obtiene

$$\mathbf{P}_{\chi y}(k+1) \triangleq E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}^{-}\delta\mathbf{y}_{k+1}^{T}\right\} = \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{P}_{y}(k+1) \tag{10.25}$$

Donde, la covariancia del error de predicción de la medición es:

$$\mathbf{P}_{y}(k+1) \triangleq E\left\{\delta\mathbf{y}_{k+1}\delta\mathbf{y}_{k+1}^{T}\right\} \tag{10.26}$$

De la Ec. (10.25) surge la expresión de la ganancia óptima del regresor lineal:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{\chi y}(k+1)\mathbf{P}_{y}^{-1}(k+1) \tag{10.27}$$

La expresión (10.27) expresa el hecho "natural" de que el peso de la innovación sea mayor cuanto mayor sea su correlación con el estado, expresada por la covariancia $\mathbf{P}_{\chi y}(k+1)$ y, por otra parte, que el peso se reduzca con la imprecisión de la medida caracterizada por la covariancia $\mathbf{P}_{y}(k+1)$.

Finalmente, a partir de la Ec. (10.23) y usando la condición (10.24) se obtiene fácilmente la covariancia del error de estimación *a posteriori* del estado, óptima en el sentido (10.22):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\chi}(k+1) &= E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}(\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1})^{T}\right\} = \mathbf{P}_{\chi}^{-}(k+1) - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{P}_{y\chi}(k+1)\\ &= \mathbf{P}_{\chi}^{-}(k+1) - \mathbf{P}_{\chi y}(k+1)\mathbf{P}_{y}^{-1}(k+1)\mathbf{P}_{y\chi}(k+1)\end{aligned} \tag{10.28}$$

Donde $\mathbf{P}_{\chi}^{-}(k+1) \triangleq E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}^{-}(\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}^{-})^{T}\right\}$ es la covariancia del error de predicción del estado en t_{k+1}.

Conviene detenerse un momento en este punto para destacar un hecho que muchas veces suele pasarse por alto. La Ec. (10.27) nos dice que, aunque el sistema sea no lineal, siempre será posible obtener un estimador lineal óptimo del estado a condición de poder calcular los momentos de primer y de segundo orden correspondientes (valor medio a priori $\hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^{-}$ y covariancias $\mathbf{P}_{y}(k+1)$ y $\mathbf{P}_{\chi y}(k+1)$). Este estimador no es necesariamente el mejor de todos los posibles en el sentido bayesiano más amplio, a menos que, como se mencionó, todos los procesos sean gaussianos. En este caso $\mathbf{K}_{k+1}$ es la llamada ganancia de Kalman y los estimados resultan los óptimos, es decir, tal como surge de las Ecs. (10.12), (10.14) y (10.20) se corresponden con las esperanzas matemáticas condicionales: $\hat{\boldsymbol{\chi}}^{-}(t) = E\{\boldsymbol{\chi}(t)/\mathbf{Y}_k\},\ t > t_k$, $\hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1} \triangleq E\{\boldsymbol{\chi}(t_{k+1})/\mathbf{Y}_{k+1}\}$; $\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = E\{\mathbf{y}(t_{k+1})/\mathbf{Y}_k\}$. El correlador lineal óptimo es en este caso el filtro de Kalman.

Sobre las conclusiones anteriores, el lector podrá consultar una extensa literatura disponible. Entre los clásicos citamos a: Kalman, (1960); Jazvinski (1970), Kailath, (1983) y Papoulis, (1991).

La enorme significación teórica y práctica de lo anterior es lo que explica que la mayor parte de las aproximaciones al filtrado no-lineal propuestas en la literatura calquen la estructura del regresor lineal óptimo. La diferencia esencial entre los procedimientos suele radicar tan sólo en como son aproximados los momentos de primer y segundo orden durante la fase de predicción entre dos instantes consecutivos $t_k \rightarrow t_{k+1}$.

Las aproximaciones de filtrado no lineal más usadas en navegación integrada son: el *Filtro de Kalman Extendido* (*EKF*) y el *Filtro de Kalman con "Puntos Sigma*" (*SPKF*). En el EKF, el primer momento es calculado usando el Principio llamado *de Equivalencia Cierta* (que introduciremos oportunamente), en tanto que los momentos de segundo orden se obtienen propagando la matriz de covariancias entre dos instantes consecutivos $t_k \rightarrow t_{k+1}$ con base en una linealización de las ecuaciones de difusión del proceso estocástico. En cambio, el SPKF calcula empíricamente ambos momentos a partir de las imágenes en t_{k+1} producidas por el flujo de la ecuación de estado (10.8) de un conjunto de puntos elegidos sobre el dominio de todas las variables probabilizadas en el instante t_k. Estos puntos junto con ciertos parámetros de ponderación son llamados σ-puntos y de allí el nombre del método.

Cualquiera sea la aproximación al filtro ideal usada, importa destacar una propiedad de las innovaciones y es que, cuando el filtro está bien "sintonizado", en otros términos, cuando el modelo estocastico del proceso haya sido adecuadamente caracterizado, se espera que la secuencia de las innovaciones sea centrada y descorrelacionada (autocorrelación impulsiva). Si bien esta afirmación tiene un riguroso sustento matemático, el lector advertirá que, de no ser así, habría cierta capacidad remanente de predicción de la medición exoceptiva que no está siendo aprovechada, lo que sugiere una pobre caracterización del proceso a estimar. De lo anterior surge un método práctico de validación del filtro que consiste en medir la función de autocorrelación de las innovaciones.

En los párrafos siguientes se introducen los procedimientos EKF y SPKF.

10.4 El filtro de Kalman extendido (EKF)

Consideremos el modelo del estado aumentado (10.8) a partir del último instante de adquisición de datos exoceptivos t_k. Denotamos:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\chi}(t;\widehat{\boldsymbol{\mu}}[t_k,t],\boldsymbol{\xi}[t_k,t],\boldsymbol{\chi}(t_k)) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t;\widehat{\boldsymbol{\mu}}[t_k,t],\boldsymbol{\xi}_{\mu}[t_k,t],\boldsymbol{\chi}(t_k)) \\ \mathbf{p}(t;\boldsymbol{\xi}_p[t_k,t],\mathbf{p}(t_k)) \end{bmatrix}; \\ &\boldsymbol{\chi}(t_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_k) \\ \mathbf{p}(t_k) \end{bmatrix} \sim v.a.\{\hat{\boldsymbol{\chi}}_k, \mathbf{P}_k\} \end{aligned} \tag{10.29}$$

al proceso estocástico vectorial continuo (flujo markoviano) solución de dicho modelo, cuando, $\widehat{\boldsymbol{\mu}}[t_k,t]$ y $\boldsymbol{\xi}[t_k,t]$ son, respectivamente, los segmentos de las medidas adquiridas y de la realización del ruido $\boldsymbol{\xi}$ con $t \in [t_k, t_{k+1}]$ y la condición inicial en t_k un vector aleatorio caracterizado como en las (10.9).

La esencia del EKF (Jazwinski, 1970) consiste en proponer como estimador *a priori* para $t \in [t_k, t_{k+1})$ a la solución determinista del modelo (10.8) cuando todas las variables aleatorias son sustituidas por su estimados. En particular: $\boldsymbol{\xi}(t) \to 0$ y $\boldsymbol{\chi}(t_k) \to \hat{\boldsymbol{\chi}}_k$. Esta hipótesis central del método es denominada *principio de equivalencia cierta* (PEC) (ver también Åström/Wittenmark, (1995) o Van Der Water/Willems, 1981 sobre una discusión acerca del uso de este principio).

En consecuencia, introducimos la "versión determinista" (ó PEC) de las ecuaciones (10.7) y (10.8)*.

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\chi}}} = \begin{bmatrix} \dot{\overline{\mathbf{x}}} \\ \dot{\overline{\mathbf{p}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{kin}(\overline{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}_k; \widehat{\boldsymbol{\mu}}[t_k,t]) \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\mu}}[t_k,t]); \quad \overline{\boldsymbol{\chi}}(t_k) = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(t_k) \\ \overline{\mathbf{p}}(t_k) \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{\chi}}_k \tag{10.30}$$

cuya condición inicial en el instante t_k se corresponde con la mejor estimación disponible del estado en ese instante.

10.4.1 Fase de predicción: Propagación del estimador *a priori*

Importa destacar que las soluciones del "modelo determinista" (10.30) son precisamente las que calcula el algoritmo numérico de navegación *strapdown* entre t_k y t_{k+1} en cualquiera de las versiones vistas en el Capítulo 7, cuya forma y complejidad específicas dependen de la terna de navegación elegida. Denotamos la solución de la (10.30) para todo instante $t \geq t_k$ como:

$$\overline{\boldsymbol{\chi}}(t) \equiv \overline{\boldsymbol{\chi}}(t;\widehat{\boldsymbol{\mu}}[t_k,t],\hat{\boldsymbol{\chi}}_k) = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(t;\widehat{\boldsymbol{\mu}}[t_k,t],\hat{\boldsymbol{\chi}}_k) \\ \hat{\mathbf{p}}_k \end{bmatrix} \tag{10.31}$$

En el vector $\overline{\mathbf{p}}$ se incluyen todos los parámetros

El EKF supone al estimador *a priori* o predictor del estado en t_{k+1} igual a la solución (10.31) en ese instante, así:

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^{-} \sim \overline{\boldsymbol{\chi}}(t_{k+1}; \hat{\boldsymbol{\mu}}[t_k, t_{k+1}), \hat{\boldsymbol{\chi}}_k) \tag{10.32}$$

En cuanto a la predicción de la medición exoceptiva $\hat{\mathbf{y}}_{k+1}$, ésta resulta de sustituir $\hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^{-}$ en la segunda ecuación (10.8) suponiendo $\boldsymbol{\eta}_{k+1} = 0$.

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{h}_{k+1}(\overline{\boldsymbol{\chi}}(t_{k+1}; \hat{\boldsymbol{\mu}}[t_k, t_{k+1}), \hat{\boldsymbol{\chi}}_k) \tag{10.33}$$

A continuación definimos las desviaciones (fluctuaciones respecto de la componente determinista) $\delta\boldsymbol{\chi}(t)$ entre la solución del modelo estocástico de la Ec. (10.8) y la solución (10.31) del modelo determinista (10.30).

$$\delta\boldsymbol{\chi}(t) \triangleq \boldsymbol{\chi}(t) - \overline{\boldsymbol{\chi}}(t);\ t \in [t_k, t_{k+1}] \tag{10.34}$$

Notar que de acuerdo con las (10.29) y (10.30), $E\{\delta\boldsymbol{\chi}(t_k)\} = 0$ y $E\{\delta\boldsymbol{\chi}(t_k)\delta\boldsymbol{\chi}(t_k)^T\} = \mathbf{P}_k$. Suponiendo las funciones $\mathcal{F}(\cdot\,,\cdot)$ y $\mathbf{h}_{k+1}(\cdot)$ suficientemente diferenciables, a partir de las Ecs. (10.8), (10.30) y (10.33) los modelos de las desviaciones (10.34) y de la innovación $\delta\mathbf{y}_{k+1} \triangleq \hat{\mathbf{y}}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}$ resultan:

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\boldsymbol{\chi}} &= \mathcal{F}(\boldsymbol{\chi}(t), \hat{\boldsymbol{\mu}}(t)) - \mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{\chi}}(t), \hat{\boldsymbol{\mu}}(t)) + \mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}}(t))\boldsymbol{\xi} \\
&= \mathcal{F}_{\chi}(\overline{\boldsymbol{\chi}}(t), \hat{\boldsymbol{\mu}}(t))\delta\boldsymbol{\chi} + \mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}}(t))\boldsymbol{\xi} + TOS(\|\delta\boldsymbol{\chi}\|^2) \\
\delta\boldsymbol{\chi}(t_k) &\triangleq \boldsymbol{\chi}_k - \hat{\boldsymbol{\chi}}_k = \delta\boldsymbol{\chi}_k \\
\delta\mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{h}_{k+1}(\boldsymbol{\chi}_{k+1}) - \mathbf{h}_{k+1}(\overline{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}) + \boldsymbol{\eta}_{k+1} = \mathbf{h}_{k+1,\chi}(\overline{\boldsymbol{\chi}}_{k+1})\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1} + \boldsymbol{\eta}_{k+1} + TOS(\|\delta\boldsymbol{\chi}\|^2)
\end{aligned} \tag{10.35}$$

Donde, $\mathcal{F}_{\chi}$ y $\mathbf{h}_{k+1,\chi}$ son los jacobianos respecto de $\boldsymbol{\chi}$ evaluados en los argumentos conocidos $\overline{\boldsymbol{\chi}}(t);\ \hat{\boldsymbol{\mu}}(t)$. Con el fin de simplificar la notación, usaremos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(t) &\triangleq \mathcal{F}_{\chi}(\overline{\boldsymbol{\chi}}(t), \hat{\boldsymbol{\mu}}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x(\overline{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}_k; \hat{\boldsymbol{\mu}}) & \mathbf{f}_p(\overline{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}_k; \hat{\boldsymbol{\mu}}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}(t) &\triangleq \mathbf{B}(\overline{\boldsymbol{\chi}}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{kin}(\overline{\mathbf{x}}) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}_{k+1} &\triangleq \mathbf{h}_{k+1,\chi}(\overline{\boldsymbol{\chi}}_{k+1})
\end{aligned} \tag{10.36}$$

La hipótesis de diferenciabilidad de las funciones anteriores permite asegurar que, para desvíos iniciales $\delta\boldsymbol{\chi}_k$ y potencia de las perturbaciones $\boldsymbol{\xi}$ suficientemente pequeños, los términos de orden superior $TOS(\|\delta\boldsymbol{\chi}\|^2)$ de las Ecs. (10.35) sean despreciables y, en tal caso, que las desviaciones (10.34) puedan aproximarse mediante las soluciones de las siguientes ecuaciones estocásticas lineales variantes en el tiempo para $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

$$\begin{aligned}
&\delta\dot{\boldsymbol{\chi}} = \begin{bmatrix} \delta\dot{\mathbf{x}} \\ \delta\dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t)\delta\boldsymbol{\chi} + \mathbf{B}(t)\boldsymbol{\xi}(t); \quad \delta\boldsymbol{\chi}(t_k) = \delta\boldsymbol{\chi}_k = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_k \\ \delta\mathbf{p}_k \end{bmatrix} \sim v.a.\{0, \mathbf{P}_k\}, \\
&\boldsymbol{\xi}(t) \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}(t)) \\
&\delta\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1}\delta\boldsymbol{\chi}(t_{k+1}) + \boldsymbol{\eta}_{k+1}; \quad \boldsymbol{\eta}_{k+1} \sim N(0, \mathbf{R}_{k+1})
\end{aligned} \tag{10.37}$$

Las Ecs. (10.37) son las ecuaciones de sensibilidad del estado frente a perturbaciones estocásticas, errores de medida, errores paramétricos y errores en las condiciones iniciales. Estas ecuaciones fueron establecidas en el Capítulo 6 para las distintas ternas de navegación (ver Ecs. **(6.17)**/**(6.18)**, **(6.22)**/**(6.23)** y **(6.63)**).

Denotamos la covariancia de las desviaciones $\delta\boldsymbol{\chi}(t)$ para $t > t_k$, como:

$$\mathbf{P}_{\delta\chi}(t) \triangleq E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}(t)\delta\boldsymbol{\chi}(t)^T\right\} \tag{10.38}$$

Vistas las Ecs. (10.37) y lo expuesto en el Apéndice C (ver Ec. **(C.10)**) la covariancia $\mathbf{P}_{\delta\chi}(t)$, para $t \geq t_k$, es la solución de la ecuación diferencial matricial lineal:

$$\dot{\mathbf{P}}_{\delta\chi}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}_{\delta\chi}(t) + \mathbf{P}_{\delta\chi}(t)\mathbf{A}(t)^T + \mathbf{B}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(t)^T; \; \mathbf{P}_{\delta\chi}(t_k) = \mathbf{P}_k \tag{10.39}$$

El EKF adopta la solución de la Ec. (10.39) en el instante t_{k+1} como la covariancia a priori (momento de 2º orden) del proceso en el instante de la nueva medida. Es decir:

$$\mathbf{P}_{\chi}^{-}(k+1) \sim \mathbf{P}_{\delta\chi}(t_{k+1}) \tag{10.40}$$

A partir de la 2ª Ec. (10.37) evaluamos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_y(t_{k+1}) &\triangleq E\left\{\delta\mathbf{y}_{k+1}\delta\mathbf{y}_{k+1}^{\;T}\right\} = E\left\{(\mathbf{H}_{k+1}\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1} + \boldsymbol{\eta}_{k+1})(\mathbf{H}_{k+1}\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1} + \boldsymbol{\eta}_{k+1})^T\right\} \\
&= \mathbf{H}_{k+1}E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}^{\;T}\right\}\mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{R}_{\chi\eta}(t_{k+1}) + \mathbf{R}_{\chi\eta}^T(t_{k+1})\mathbf{H}_{k+1}^T
\end{aligned} \tag{10.41}$$

Como se demuestra en el próximo capítulo la correlación: $\mathbf{R}_{\chi\eta}(t_{k+1}) = E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{\;T}\right\}$ puede ser distinta de cero en algunas aplicaciones. En el Apéndice C se evalúa este término para una situación usual en la práctica. El EKF usa como covariancia de la innovación la que se obtiene sustituyendo la (10.40) en la (10.41); es decir:

$$\mathbf{P}_y(k+1) \sim \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{P}_{\delta\chi}(t_{k+1})\mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{R}_{\chi\eta}(t_{k+1}) + \mathbf{R}_{\chi\eta}^T(t_{k+1})\mathbf{H}_{k+1}^T \tag{10.42}$$

Una vez evaluados los estimados de $\hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^{-}$, $\mathbf{P}_{\chi}^{-}(k+1)$, $\hat{\mathbf{y}}_{k+1}$ y $\mathbf{P}_y(k+1)$, el procedimiento continúa con la fase de actualización.

10.4.2 Fase de actualización: Regresor lineal óptimo

La fase de actualización consiste esencialmente en la aplicación de la formula del regresor lineal (10.21), para lo cual, es necesario evaluar la ganancia $\mathbf{K}_{k+1}$. Para esto, teniendo en cuenta la expresión para $\delta\mathbf{y}_{k+1}$ en la Ec. (10.37), evaluamos:

$$\mathbf{P}_{\chi y}(k+1) \sim E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}\delta\mathbf{y}_{k+1}^{T}\right\} = \mathbf{P}_{\delta\chi}(t_{k+1})\mathbf{H}_{k+1}^{T} + \mathbf{R}_{\chi\eta}(t_{k+1}) \tag{10.43}$$

a partir de las Ecs. (10.27), (10.42) y (10.43), se evalúa la ganancia mediante:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{k+1} &\sim (\mathbf{P}_{\delta\chi}(t_{k+1})\mathbf{H}_{k+1}^{T} + \mathbf{R}_{\chi\eta}(t_{k+1}))(\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{P}_{\delta\chi}(t_{k+1})\mathbf{H}_{k+1}^{T} + \mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{R}_{\chi\eta}(t_{k+1}) + \mathbf{R}_{\chi\eta}^{T}(t_{k+1})\mathbf{H}_{k+1}^{T})^{-1} \\ &\sim \mathbf{P}_{\delta\chi}(t_{k+1})\mathbf{H}_{k+1}^{T}(\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{P}_{\delta\chi}(t_{k+1})\mathbf{H}_{k+1}^{T} + \mathbf{R}_{k+1})^{-1}\end{aligned} \tag{10.44}$$

La segunda expresión podrá usarse en el caso en que $\mathbf{R}_{\chi\eta}(t_{k+1}) = 0$, condición que, por razones de simplicidad, supondremos válida en el resto del este Capítulo. Para facilitar la notación, en lo que sigue se usará: $\mathbf{P}_{k+1}^{-} = \mathbf{P}_{\delta\chi}(t_{k+1})$ para el aproximante de la covariancia *a priori* y $\mathbf{P}_{k+1}$ para el aproximante de la covariancia *a posteriori* determinada sustituyendo los estimados correspondientes en la Ec. (10.28):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\chi}(k+1) \sim \mathbf{P}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1}^{-} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1}^{-}\mathbf{H}_{k+1}^{T} \\ &\sim \mathbf{P}_{k+1}^{-} - \mathbf{P}_{k+1}^{-}\mathbf{H}_{k+1}(\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1}^{-}\mathbf{H}_{k+1}^{T} + \mathbf{R}_{k+1})^{-1}\mathbf{H}_{k+1}^{T}\mathbf{P}_{k+1}^{-}\end{aligned} \tag{10.45}$$

Donde, la segunda expresión surge de sustituir (10.44) en la primera.

Usando la identidad matricial:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{DA}^{-1}, \tag{10.46}$$

es posible mostrar que la Ec. (10.45) admite la forma alternativa:

$$\mathbf{P}_{k+1}^{-1} = (\mathbf{P}_{k+1}^{-})^{-1} + \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{H}_{k+1}^{T} \tag{10.47}$$

La inversa de la matriz de covariancia es usualmente denominada matriz de información. Dado que la matriz $\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1}^{-1}\mathbf{H}_{k+1}^{T}$ en la Ec. (10.47) nunca es negativa, esta ecuación refleja una consecuencia natural de la actualización y es que *a posteriori* de la nueva medición, la covariancia del estimador del estado siempre se reduce a menos que $\mathbf{R}_{k+1} \to \infty$, en cuyo caso, como se advierte de la (10.44), $\mathbf{K}_{k+1} \to 0$ y la innovación es desechada por el filtro.

10.4.3 Implementación numérica del EKF

Para determinar la ganancia de Kalman (10.44) en el instante de la nueva medición exoceptiva, es necesario calcular previamente la covariancia *a priori* $\mathbf{P}_{k+1}^{-}$ solución de la ecuación diferencial matricial lineal (10.39) en el instante t_{k+1}. Siguiendo por ejemplo a Zadeh/Desoer, (1963) puede demostrarse por simple sustitución que esa ecuación tiene por solución:

$$\mathbf{P}_{\delta\chi}(t) = \Phi(t,t_k)\mathbf{P}_k\Phi(t,t_k)^{T} + \int_{t_k}^{t}\Phi(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)Q(\tau)\mathbf{B}(\tau)^{T}\Phi(t,\tau)^{T}d\tau \tag{10.48}$$

$$\dot{\Phi}(t,\tau) = \mathbf{A}(t)\Phi(t,\tau);\quad \Phi(\tau,\tau) = I;\quad t \geq \tau \;\; y \;\; t,\tau \in \left[t_k, t_{k+1}\right] \tag{10.49}$$

Donde $\Phi(t,\tau)$ es la matriz de transición de estado entre los instantes τ y $t \geq \tau$ del sistema lineal variante en el tiempo (10.37). Para el cálculo de $\mathbf{P}_{\delta\chi}(t)$ subdividimos el intervalo entre dos medidas $\left[t_k, t_{k+1}\right]$ en M_k sub-intervalos de longitud T_s igual a la del ciclo exterior del algoritmo (INS) empleado (por ejemplo alguno de los estudiados en el Capítulo 7) para integrar las ecuaciones deterministas (10.30). Denotamos:

$$\begin{aligned} t_{k,n} &= t_k + nT_s;\ n = 0,\ldots,M_k \\ T_k &= M_k T_s = t_{k+1} - t_k \end{aligned} \tag{10.50}$$

Nótese que el intervalo entre medidas T_k no se supone constante. Esto permite considerar datos provenientes de instrumentos diversos con tasas diferentes y no uniformes en el tiempo.

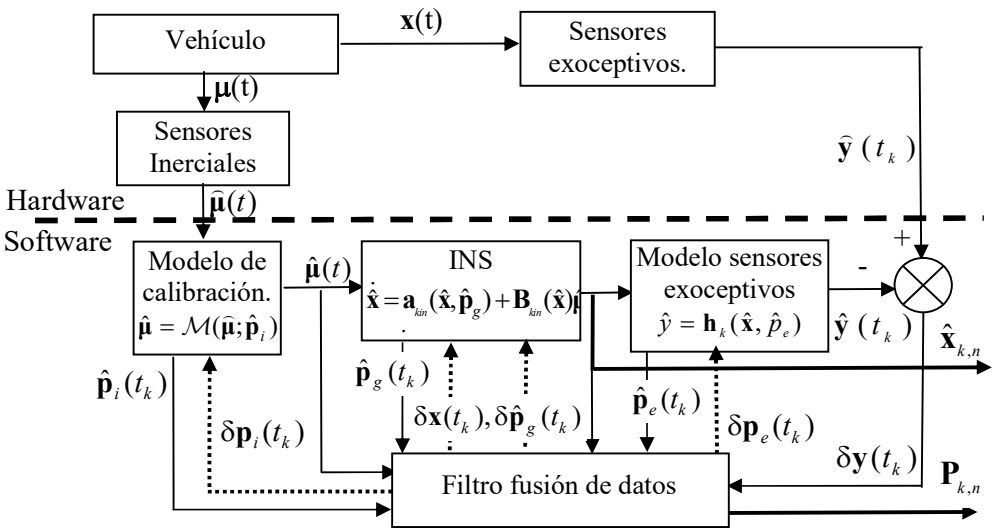


Figura 10.2: Esquema de la navegación integrada.

A partir de la solución general (10.48) es posible demostrar que en el sub-intervalo de T_k: $\left[t_{k,n}, t_{k,n+1}\right]$, la matriz de covariancia *a priori* progresa como:

$$\mathbf{P}_{\delta\chi}(t_{k,n+1}) = \mathbf{P}^-_{k,n+1} = \Phi_{k,n+1}\mathbf{P}^-_{k,n}\Phi^T_{k,n+1} + \mathbf{Q}_{k,n+1};\ \mathbf{P}^-_{k,0} = \mathbf{P}_k \tag{10.51}$$

Donde: $\Phi_{k,n+1} \triangleq \Phi(t_{k,n+1}, t_{k,n})$ es la solución de la ecuación diferencial matricial (10.49) para t=$t_{k,n+1}$, τ=$t_{k,n}$ junto con $\Phi(t_{k,n}, t_{k,n}) = I$, en tanto que:

$$\mathbf{Q}_{k,n+1} \triangleq \int_{t_{k,n}}^{t_{k,n+1}} \Phi(t_{k,n+1},\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{B}(\tau)^T\Phi(t_{k,n+1},\tau)^T d\tau \tag{10.52}$$

Introduciendo la aproximación:

$$\mathbf{A}(t) \approx \mathbf{A}(t_{k,n}) \triangleq \mathbf{A}_{k,n} = const.\ t \in \left[t_{k,n}, t_{k,n+1}\right] \tag{10.53}$$

escribimos para $\tau \in \left[t_{k,n}, t_{k,n+1}\right]$:

$$\begin{aligned}
&\Phi(t_{k,n+1},\tau) \approx exp(\mathbf{A}_{k,n}(t_{k,n+1}-\tau)) \approx I + \mathbf{A}_{k,n}(t_{k,n+1}-\tau) + TOS(t_{k,n+1}-\tau)^2 \\
&\Phi_{k,n+1} \triangleq \Phi(t_{k,n+1},t_{k,n}) \approx exp(\mathbf{A}_{k,n}T_s) \approx I + \mathbf{A}_{k,n}T_s + TOS(T_s)^2 \\
&\mathbf{B}(\tau) \approx \mathbf{B}(t_{k,n}) = \mathbf{B}_{k,n}
\end{aligned} \tag{10.54}$$

Substituyendo las (10.54) en la (10.52) se tiene que $\mathbf{Q}_{k,n+1}$ puede expresarse como:

$$\mathbf{Q}_{k,n+1} = \mathbf{B}_{k,n}\mathbf{Q}_{k,n}\mathbf{B}_{k,n}^T T_s + TOS(T_s^2) \tag{10.55}$$

La Fig. 10.2 muestra el esquema general de un sistema de navegación integrada en la cual se distinguen los elementos de software de los de hardware. Con referencia a esta figura, a continuación resumimos el procedimiento de cálculo entre dos instantes consecutivos t_k y t_{k+1}de adquisición de medidas exoceptivas.

10.4.4 Cálculo recursivo del algoritmo de navegación con el EKF

1. Inicialización

En cualquier instante de adquisición de una medida exoceptiva el algoritmo se re-inicializa con la mejor estimación disponible del vector de estado aumentado junto con su matriz de covariancia.

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}_{\mathrm{k}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \hat{\mathbf{p}}_k \end{bmatrix}; \hat{\mathbf{p}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_i(t_k) \\ \hat{\mathbf{p}}_e(t_k) \\ \hat{\mathbf{p}}_g(t_k) \end{bmatrix}; \ \mathbf{P}_k = E\{(\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{k}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}_{\mathrm{k}})(\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{k}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}_{\mathrm{k}})^T\} \tag{10.56}$$

Al inicio de la navegación ($k=0$) se usa el conocimiento disponible a priori del estado, posiblemente provisto por instrumentos exoceptivos tales como GPS, magnetómetros, inclinómetros, etc., junto con una estimación de la banda de incertidumbre de los instrumentos

2. Propagación de la estimación a priori del estado cinemático

En los instantes intermedios $t_{k,n}$, $n=1,\ldots,M_k$, dentro de un intervalo $[t_k,t_{k+1})$ entre dos medidas externas, se calcula el estimador del estado aumentado, solución de la Ec. (10.30), expresado mediante la (10.31) como

$$\overline{\boldsymbol{\chi}}(t_{k,n}) = \overline{\boldsymbol{\chi}}(t_{k,n};\hat{\boldsymbol{\mu}}[t_k,t_{k,n}],\hat{\boldsymbol{\chi}}_k) \tag{10.57}$$

Para esto se usan los algoritmos descritos en el Capítulo 7. Esta operación está representada por el bloque INS en la Fig. 10.2 cuya entrada es el vector de medidas inerciales corregido con el modelo de calibración determinista:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}(t) = \mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t);\hat{\mathbf{p}}_i(t_k)); \ t \in \left[t_k, t_{k+1}\right] \tag{10.58}$$

3. Propagación de la matriz de covariancia a priori

En cada instante $t_{k,n}$ del ciclo de integración de las ecuaciones cinemáticas se calculan:

a) El jacobiano $\mathbf{A}_{k,n} = \mathcal{F}_{\chi}(\overline{\boldsymbol{\chi}}(t_{k,n}), \widehat{\boldsymbol{\mu}}(t_{k,n}))$ (Ec. (10.36));
b) La matriz $\mathbf{B}_{k,n} = \mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}}(t_{k,n}))$ (Ec. (10.36));
c) La matriz de transición $\Phi_{k,n+1} = exp(\mathbf{A}_{k,n} T_s)$ (Ec. (10.54));
d) La covariancia del ruido discretizado $\mathbf{Q}_{k,n+1} \simeq \mathbf{B}_{k,n} \mathbf{Q}_{k,n} \mathbf{B}_{k,n}{}^T T_s$ (Ec. (10.55))

Con los valores anteriores, mediante la recursión (10.51) se determina la covariancia de los estimados $\mathbf{P}^-_{k,n+1}$ al final de cada paso. Al final del ciclo se tendrá: $\mathbf{P}^-_{k+1} = \mathbf{P}^-_{k,M_k}$.

Las salidas del sistema de navegación, indicadas en la Fig. 10.2 son el estimador del estado $\hat{\mathbf{x}}^-_{k,n} = \overline{\mathbf{x}}(t_{k,n})$ y su correspondiente matriz de covariancia teórica $\mathbf{P}_{k,n}$; ambos son provistos en los instantes t_s (entre dos instantes consecutivos de adquisición de medidas exoceptivas t_k y t_{k+1}) a la tasa de integración $1/T_s$ de las ecuaciones cinemática (10.30) y de la covariancia (10.51).

4. Cálculo de la innovación

Para $n = M_k$, en el instante $t_{k,M_k} = t_k + T_k = t_{k+1}$:

a) Se adquiere la nueva medida exoceptiva $\widehat{\mathbf{y}}_{k+1}$.
b) Se sustituye el predictor (10.57) calculado en el paso ***2***. en el modelo del sensor exoceptivo activo en ese instante para obtener $\hat{\mathbf{y}}_{k+1}$ mediante la Ec. (10.33).
c) Se calcula la innovación: $\delta\mathbf{y}_{k+1} \triangleq \widehat{\mathbf{y}}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}$.

5. Cálculo del jacobiano del modelo del sensor exoceptivo

Usando la predicción $\overline{\boldsymbol{\chi}}(t_{k+1}) = \overline{\boldsymbol{\chi}}(t_{k+1}; \widehat{\boldsymbol{\mu}}[t_k, t_{k+1}], \hat{\boldsymbol{\chi}}_k)$ calculada en el paso ***2***. para $n = M_k$ y $\hat{\mathbf{p}}_e(t_k)$ se evalúa el jacobiano $\mathbf{H}_{k+1}$ dado por la 3ª Ec. (10.36).

6. Cálculo de la ganancia del EKF

Se determina introduciendo en la (10.44) los valores de $\mathbf{P}^-_{k+1} = \mathbf{P}_{\delta\chi}(t_{k+1})$ y $\mathbf{H}_{k+1}$ calculados previamente, además de $\mathbf{R}_{k+1}$ que caracteriza al ruido de medida.

7. Cálculo de la corrección del estado a posteriori de la medida

Mediante la formula del regresor lineal (10.21) se corrige la predicción para obtener la nueva estimación *a posteriori* del estado aumentado: $\hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}$. Este valor, junto con la covariancia *a posteriori* determinada en el siguiente paso, devienen las condiciones iniciales del nuevo ciclo que se reinicia en el paso ***1***. Notar que en este paso se actualizan a la vez el estado cinemático, el vector de los parámetros instrumentales y el modelo de gravedad (ver líneas punteadas en la Fig. 10.2).

8. Actualización de la matriz de covariancia a posteriori

Finalmente, el ciclo se completa con la determinación de $\mathbf{P}_{k+1}$ sustituyendo $\mathbf{K}_{k+1}$, $\mathbf{P}^-_{k+1}$ y $\mathbf{H}_{k+1}$ en la Ec. (10.45). $\mathbf{P}_{k+1}$ es llamada la covariancia teórica a posteriori en t_{k+1} de los estimados: $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, \hat{\mathbf{p}}_i(t_{k+1})$, $\hat{\mathbf{p}}_e(t_{k+1})$ y $\hat{\mathbf{p}}_g(t_{k+1})$.

10.5 El filtro SPKF

La versión EKF del filtrado no-lineal aproxima los momentos de 1º y 2º orden aplicando el *principio de equivalencia cierta* (PEC). Esto equivale de hecho a usar una aproximación lineal para la transición de estado entre dos instantes sucesivos (10.29) (linealización del flujo Markoviano del modelo (10.8)). Sin embargo, cuando las no-linealidades del proceso markoviano son importantes, esta aproximación puede introducir sesgos en la estimación de los dos primeros momentos lo suficientemente importantes como para deteriorar la perfomance del filtro o incluso provocar su divergencia. Lamentablemente, en un vehículo genérico es difícil asegurar condiciones homogéneas de validez de la linealización local en todo tramo de toda posible trayectoria. Pero aún si esto fuese posible, las perturbaciones estocásticas y la acumulación de errores numéricos pueden provocar desviaciones en las variables de estado que superen los umbrales de validez de la linealización.

El esquema de filtrado no-lineal llamado *Sigma-Point-Kalman-Filter* (también conocido como *Unscented Kalman-Filter*) usa, en cambio, la llamada transformación *unscented* (TU), propuesta por Julier/Uhlmann/Durrant-Whyte (1995 y 1996) para estimar los momentos de 1º y 2º orden del estado de un proceso Markoviano. La TU transforma o propaga, en el sentido que veremos, los primeros momentos del estado en un dado instante en los correspondientes en un estado futuro de tal modo que se reducen en teoría errores de segundo orden en la estimación de los momentos, superando sensiblemente, en este sentido, a la aproximación lineal empleada por el EKF.

Para comprender mejor su uso, antes de utilizar el concepto en filtrado, introducimos su significado en el contexto general de la transformaciones entre espacios de variables aleatorias.

10.5.1 Transformación *unscented* (TU)

Sea $T{:}X\rightarrow Y$ una aplicación no necesariamente inyectiva entre espacios de dimensión finita $X\subset\mathbb{R}^M$ e $Y\subset\mathbb{R}^N$. Sean $\mathbf{x}(\omega)$ un vector aleatorio definido sobre X e $\mathbf{y}(\mathbf{x}(\omega))=T(\mathbf{x}(\omega))$ el vector aleatorio imagen de $\mathbf{x}$ bajo la aplicación T.

Supuestos conocidos los 1º y 2º momentos de la distribución de $\mathbf{x}$, respectivamente, $\overline{\mathbf{x}}=E\{\mathbf{x}\}$ y $\mathbf{P}_{xx}=\mathrm{cov}(\mathbf{x})$, siempre es posible elegir al menos $2M$+1 elementos $\sigma_i\in X,\ i=0,...,2M$ y pesos w_i tales que:

$$\overline{\mathbf{x}}=\sum_0^{2M} w_i\sigma_i;\quad \mathbf{P}_{xx}=\sum_0^{2M} w_i(\sigma_i-\sigma_0)(\sigma_i-\sigma_0)^T \tag{10.59}$$

Todo conjunto de parejas $\{\sigma_i\in X, w_i\in\mathbb{R}\}$ que satisfaga (10.59) es llamado "*conjunto de σ-puntos*". En particular, es posible mostrar que (10.59) es satisfecha si, junto con los pesos $w_i=1/2M$, $i=0,...,2M$, se elije el siguiente conjunto de elementos del espacio muestreal de X ubicados simétricamente respecto del valor medio $\overline{\mathbf{x}}$.

$$\begin{aligned}
&\sigma_0 = \overline{\mathbf{x}};\\
&\sigma_i = \overline{\mathbf{x}} + \left(\sqrt{M\mathbf{P}_{xx}}\right)_i \;;\; i = 1, M \\
&\sigma_i = \overline{\mathbf{x}} - \left(\sqrt{M\mathbf{P}_{xx}}\right)_i \;;\; i = M+1, 2M
\end{aligned} \tag{10.60}$$

donde $\left(\sqrt{M\mathbf{P}_{xx}}\right)_i$ es la i-ésima columna de la raíz cuadrada de $M\mathbf{P}_{xx} = \left(\sqrt{M\mathbf{P}_{xx}}\right)\left(\sqrt{M\mathbf{P}_{xx}}\right)^T$. En este sentido, los σ-puntos constituyen una representación de los dos primeros momentos de la distribución del vector **x**.

Se llama transformación *unscented* (TU) al procedimiento que consiste en usar las imágenes $\gamma_i = T(\sigma_i);\; i = 0,...,2M$ junto con los pesos w_i para determinar los promedios ponderados:

$$\hat{\overline{\mathbf{y}}} = \sum_0^{2M} w_i \gamma_i ;\;\; \hat{\mathbf{P}}_{yy} = \sum_0^{2M} w_i (\gamma_i - \hat{\overline{\mathbf{y}}})(\gamma_i - \hat{\overline{\mathbf{y}}})^T \tag{10.61}$$

El resultado de interés tanto teórico como práctico (Julier/Uhlmann/Durrant-Whyte (1995) y (1996)) es que dado cualquier conjunto finito de σ-puntos que "codifique" los dos primeros momentos en el sentido (10.59), los dos primeros momentos calculados con (10.61) constituyen aproximaciones de segundo orden de los dos primeros momentos de la variable aleatoria imagen $y(x(\omega))$.

Dicho de otro modo, las estimaciones (10.61) agregan correcciones de segundo orden a los sesgos que normalmente introduce la aproximación obtenida mediante la transformación lineal de momentos (usada en el EKF):

$$\tilde{\mathbf{y}} = T(\overline{\mathbf{x}});\;\; \hat{\mathbf{P}}_{yy} = \mathbf{J}(\overline{\mathbf{x}})\mathbf{P}_{xx}\mathbf{J}(\overline{\mathbf{x}})^T \tag{10.62}$$

Donde $\mathbf{J}(\overline{\mathbf{x}})$ es el jacobiano de la aplicación $T{:}X \rightarrow Y$ evaluado en el valor medio. Como se advertirá, la transformación de momentos (10.62) es el resultado de la aplicación del PEC a la transformación *T*.

La ventaja suplementaria de usar la TU es que no se necesita exigirle a T que sea localmente diferenciable. Es más, la TU no requiere de un modelo analítico de la aplicación, por lo cual, puede ser de naturaleza discreta, por ejemplo, el resultado de algún experimento o determinada un algoritmo numérico.

10.5.2 Aplicación de la TU al flujo Markoviano de una ecuación de difusión

El flujo markoviano (10.29), solución de la ecuación de difusión (10.8), puede ser visto como una aplicación desde el espacio conjunto (cruz) de las condiciones iniciales en t_k y de las realizaciones del ruido $\xi[t_k, t_{k+1}]$, sobre el espacio de los estados en t_{k+1}, es decir $\chi(t_{k+1})$ para el caso. Sin embargo, la complicación para generar una TU sobre esta aplicación es evidente puesto que el espacio muestreal de las realizaciones de un ruido continuo en cualquier intervalo finito de tiempo tiene dimensión infinita. En la práctica es necesario entonces comprimir la dimensionalidad de la realización del ruido. Esto se

logra evaluando el efecto integral de cada realización, a lo largo de un dado intervalo de tiempo, sobre los dos primeros momentos del estado al final de dicho intervalo.

Para ver esto conviene definir "la fluctuación" del proceso (10.8)/(10.29) respecto de la solución determinista (10.30)/(10.31) como:

$$\mathbf{w}(t,t_k) \triangleq \boldsymbol{\chi}(t;\hat{\boldsymbol{\mu}}[t_k,t],\boldsymbol{\xi}[t_k,t],\boldsymbol{\chi}_k) - \overline{\boldsymbol{\chi}}(t;\hat{\boldsymbol{\mu}}[t_k,t],\boldsymbol{\chi}_k);\ t \geq t_k \tag{10.63}$$

en la cual la condición inicial $\boldsymbol{\chi}(t_k) \equiv \boldsymbol{\chi}_k$ es supuesta cierta y común para ambos términos. Claramente, el proceso $\mathbf{w}(t,t_k)$ es una desviación que satisface la misma ecuación (10.35) salvo por el vector de condiciones iniciales que en este caso es el vector cierto nulo, es decir, $\mathbf{w}(t_k,t_k) = 0$. Asimismo, cuando la norma de la perturbación $\|\boldsymbol{\xi}\|$ sea lo suficientemente pequeña el proceso podrá modelarse con las mismas ecuaciones de sensibilidad (10.37) que aquí reproducimos para el caso:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{w}}(t,t_k) = \mathbf{A}(t)\mathbf{w} + \mathbf{B}(t)\boldsymbol{\xi};\ \ \mathbf{w}(t_k,t_k) = 0 \\ &\qquad \boldsymbol{\xi} \sim N(0,\delta(t)\mathbf{Q}(t)) \end{aligned} \tag{10.64}$$

La anterior tiene por solución (ver Ecs. **(C.8)** del Apéndice C):

$$\begin{aligned} &\mathbf{w}(t,t_k) = \int_{t_k}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\boldsymbol{\xi}(\tau)d\tau \\ &\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_k) = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_k);\ \ \boldsymbol{\Phi}(t_k,t_k) = I \end{aligned} \tag{10.65}$$

Dada una sucesión de instantes discretos $\{t_k\}$, adoptaremos por simplicidad la notación: $\mathbf{w}_k = \mathbf{w}(t_{k+1},t_k)$. Siendo $\boldsymbol{\xi}$ centrado e independiente, de la Ec. (10.65), resulta claramente que la secuencia $\{\mathbf{w}_k\}$ es independiente y descorrelacionada, es decir: $E\{(\mathbf{w}_k)(\mathbf{w}_l)^T\} = 0$ para $k \neq l$. Por lo demás, de la Ec. (10.64) junto con la Ec. **(C.10)** del Apéndice C, se tiene que $\mathbf{Q}_{w,k} \triangleq E\{(\mathbf{w}_k)(\mathbf{w}_k)^T\}$ es la solución en t_{k+1} de:

$$\dot{\mathbf{Q}}_w(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Q}_w(t) + \mathbf{Q}_w(t)\mathbf{A}(t)^T + \mathbf{B}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(t)^T;\ \ \mathbf{Q}_w(t_k) = 0 \tag{10.66}$$

Donde la condición inicial $\mathbf{Q}_w(t_k) = 0$ se debe al supuesto en (10.64) de que $\mathbf{w}(t_k,t_k) = 0$ es conocido.

Teniendo en cuenta que la Ec. (10.66) tiene la misma forma que la Ec. (10.39), la solución de la primera tiene la misma expresión que la (10.48) salvo por la condición inicial nula. De este modo, para $t = t_{k+1}$, escribimos:

$$\mathbf{Q}_{w,k} \triangleq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1},\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{B}(\tau)^T \Phi(t_{k+1},\tau)^T d\tau \tag{10.67}$$

Cuando el intervalo entre dos medidas exoceptivas consecutivas $T_k = t_{k+1} - t_k$ sea lo suficientemente pequeño como para validar las aproximaciones utilizadas en el desarrollo que lleva de la Ec. (10.52) a la (10.55), la (10.67) admite, del mismo modo, la siguiente aproximación, a menos de términos de 2º orden en T_k:

$$\mathbf{Q}_{w,k} \simeq \mathbf{B}(t_k)\mathbf{Q}(t_k)\mathbf{B}(t_k)^T T_k \tag{10.68}$$

Retomando la definición (10.63), escribimos el estado del proceso en t_{k+1} dado el estado en t_k: $\boldsymbol{\chi}(t_k) = \boldsymbol{\chi}_k$ y la realización del ruido $\boldsymbol{\xi}[t_k, t_{k+1}]$:

$$\boldsymbol{\chi}(t_{k+1}; \hat{\boldsymbol{\mu}}[t_k, t_{k+1}], \boldsymbol{\xi}[t_k, t_{k+1}], \boldsymbol{\chi}_k) = \overline{\boldsymbol{\chi}}(t_{k+1}; \hat{\boldsymbol{\mu}}[t_k, t_{k+1}], \boldsymbol{\chi}_k) + \mathbf{w}_k \tag{10.69}$$

De este modo, la transición de estado entre dos instantes consecutivos de adquisición de datos se descompone en dos partes:

1) La transición determinista (10.31) desde la condición inicial $\boldsymbol{\chi}_k$ calculable mediante un algoritmo de integración numérica de las ecuaciones cinemáticas (10.30)
2) La perturbación integral que produce el ruido continuo $\boldsymbol{\xi}$ a lo largo del intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ ahora concentrada en el vector aleatorio $\mathbf{w}_k$ cuyos dos primeros momentos son: $E\{\mathbf{w}_k\} = 0$ y $E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T\} = \mathbf{Q}_{w,k}$.

La TU para el flujo Markoviano (10.8)/(10.29) se establece en base a la función de transición de estado discreta y estocástica (10.69) y la expresión del modelo de la media exoceptiva escritas a continuación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}(t_{k+1} / \boldsymbol{\chi}_k) &= \overline{\boldsymbol{\chi}}(t_{k+1}; \hat{\boldsymbol{\mu}}[t_k, t_{k+1}], \boldsymbol{\chi}_k) + \mathbf{w}_k; \qquad \mathbf{w}_k \sim (0, \mathbf{Q}_{w,k}) \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{h}_{k+1}(\boldsymbol{\chi}(t_{k+1} / \boldsymbol{\chi}_k)) + \boldsymbol{\eta}_k \quad ; \qquad \boldsymbol{\eta}_k \sim (0, \mathbf{R}_k) \end{aligned} \tag{10.70}$$

10.5.3 Algoritmo SPKF aplicado a la navegación integrada

El algoritmo considera el vector aleatorio ampliado: $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^M$ con $M = 2\dim(\boldsymbol{\chi}) + \dim(\mathbf{y}_k)$ y tal que:

$$\mathbf{z}_k \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_k \\ \mathbf{w}_k \\ \boldsymbol{\eta}_k \end{bmatrix}; \ \overline{\mathbf{z}}_k = E\{\mathbf{z}_k\} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\chi}}_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{P}_{zz,k} = E\{(\mathbf{z}_k - \overline{\mathbf{z}}_k)(\mathbf{z}_k - \overline{\mathbf{z}}_k)^T\} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\chi\chi.k} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{w,k} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{\eta,k} \end{bmatrix} \tag{10.71}$$

Donde $\hat{\boldsymbol{\chi}}_k$ y $\mathbf{P}_{\chi\chi.k}$, respectivamente, la estimación a posteriori del estado aumentado y su covariancia están calculadas en el instante t_k. De las anteriores, se determinan los 2M+1 σ-puntos y sus pesos relativos: $(\overline{\mathbf{z}}_k, \mathbf{P}_{zz,k}) \rightarrow (\sigma_i^k, w_i^k);\ i = 0, ..., 2M$ con el procedimiento (10.60).

10.5.4 Cálculo recursivo del algoritmo de navegación con el SPKF

El pseudo código del algoritmo podría adoptar finalmente la siguiente forma:

Inicialización:

Se parte de los dos primeros momentos del estado aumentado en el instante inicial:

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}_o = E\{\boldsymbol{\chi}(t_o)\};\ \mathbf{P}_{\chi\chi,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xx}(t_0) & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{pp}(t_0) \end{bmatrix} \tag{10.72}$$

Desde k=0 hasta fin de navegación

1. Determinar 2M+1 σ-puntos mediante las (10.60)

$$(\overline{\mathbf{z}}_k, \mathbf{P}_{zz,k}) \rightarrow (\sigma_i^k, w_i^k);\ i = 0,...,2M \tag{10.73}$$

2. Propagación temporal de los 2M+1 σ–puntos mediante la primera de las (10.70) a t_{k+1}=t_k+T_k usando el método de integración numérica de las ecuaciones de navegación (algoritmo INS). El resultado son los 2M+1 puntos imagen:

$$\boldsymbol{\chi}_{k+1}^{i-} \triangleq \boldsymbol{\chi}(t_{k+1} / \boldsymbol{\chi}_k^i) = \overline{\boldsymbol{\chi}}(t_{k+1} / \boldsymbol{\chi}_k^i) + \mathbf{w}_k^i;\quad i = 0,...2M \tag{10.74}$$

3. Cálculo de los momentos *a priori* de 1° y 2° orden de los estimados del estado aumentado:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^- &= \sum_{i=0}^{2M} w_i^k \boldsymbol{\chi}_{k+1}^{i-} \\ \mathbf{P}_{\chi\chi}^-(t_{k+1}) = \mathbf{P}_{k+1}^- &= \sum_{i=0}^{2M} w_i^k (\boldsymbol{\chi}_{k+1}^{i-} - \hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^-)(\boldsymbol{\chi}_{k+1}^{i-} - \hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^-)^T \end{aligned} \tag{10.75}$$

4. Cálculo de los momentos *a priori* de 1° y 2° orden de los estimados de las mediciones:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_{k+1}^i &= \mathbf{h}_{k+1}(\boldsymbol{\chi}_{k+1}^{i-}) + \eta_k^i;\ i = 0,...,2M \\ \hat{\mathbf{y}}_{k+1} &= \sum_{i=0}^{2M} w_i^k \hat{\mathbf{y}}_{k+1}^i \\ \mathbf{P}_y(k+1) &= \sum_{i=0}^{2M} w_i^k (\hat{\mathbf{y}}_{k+1}^i - \hat{\mathbf{y}}_{k+1})(\hat{\mathbf{y}}_{k+1}^i - \hat{\mathbf{y}}_{k+1})^T \end{aligned} \tag{10.76}$$

y de la covariancia cruzada:

$$\mathbf{P}_{\chi y}(k+1) = \sum_{i=0}^{2M} w_i^k (\boldsymbol{\chi}_{k+1}^{i-} - \hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^-)(\hat{\mathbf{y}}_{k+1}^i - \hat{\mathbf{y}}_{k+1})^T \tag{10.77}$$

5. Adquisición de la medición y actualización del estimador y de su covariancia *a posteriori* previo cálculo de la ganancia de Kalman.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{\chi y}(k+1)\mathbf{P}_{y}^{-1}(k+1) \\
&\hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^{-} + \mathbf{K}_{k+1}(\widehat{\mathbf{y}}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}) \\
&\mathbf{P}_{\chi}(k+1) = \mathbf{P}_{\chi}^{-}(k+1) - \mathbf{P}_{\chi y}(k+1)(\mathbf{P}_{y}(k+1))^{-1}\mathbf{P}_{y\chi}(k+1)
\end{aligned} \tag{10.78}$$

Capítulo 11
Ejemplos de Aplicación de Navegación Integrada

Dedicamos este capítulo a demostrar el uso de los conceptos expuestos en los capítulos precedentes con algunos ejemplos elegidos. Por una cuestión de espacio, solo nos referimos el uso del EKF como filtro de fusión de datos. Se deja como ejercicio al lector adaptar la formulación aquí expuesta al uso del SPKF.

Definido el tipo de vehículo y especificados la terna de referencia y el modelo de gravedad, quedan fijadas las ecuaciones cinemáticas o de navegación (Capítulo 5). En cuanto al modelo de la UMI, una versión suficientemente general es la propuesta en los Capítulos 2 y 10 (Ecs. **(2.13)** ó **(10.3)**).

Por lo dicho anteriormente, algunos módulos del código de cualquier sistema de navegación que incluya una UMI quedarán fijados independientemente de la instrumentación exoceptiva que reclame la aplicación específica. Nos referimos a aquellos que forman parte de la fase de predicción o determinación del estimador a priori del filtro de fusión de datos, a saber: a) La integración numérica de las ecuaciones cinemáticas usada para el cálculo de la transición de estado (métodos expuestos en el Capítulo 7 y Ec. **(10.31)**); b) El cálculo de las matrices del modelo lineal de las desviaciones del estado cinemático y c) el cálculo de la propagación en el tiempo de los momentos *a priori* de 1° y de 2° orden.

Los módulos antes mencionados podrán (y deberán) ser validados y verificados antes de incorporar los módulos correspondientes a la fase de actualización de la estimación *a posteriori*. Esta fase se diseña en base a la configuración de sensores exoceptivos propia de la aplicación. Lo que cambia de una configuración a otra es, esencialmente, el modelo **(10.2)** de las medidas $\hat{\mathbf{y}}_k$ adquiridas en los instantes t_k (ver Fig. 10.1), esto incluye el modelo probabilístico de los errores de medida y el vector de parámetros de calibración $\mathbf{p}_e$ que formará parte del vector de estado aumentado. Restando de la medida real la calculada con el modelo $\mathbf{h}_{k+1}(\overline{\boldsymbol{\chi}}(t_{k+1};\hat{\boldsymbol{\mu}}[t_k,t_{k+1}),\hat{\boldsymbol{\chi}}_k)$ (Ec. **(10.33)**), se obtiene la innovación. Con ésta y la ganancia de Kalman se calcula la corrección a aplicar a la estimación *a-priori* del estado aumentado, obteniéndose como resultado la estimación *a posteriori* del mismo. Tanto para el cálculo de la ganancia de Kalman como para el de la covariancia *a-posteriori* (Ec. **(10.45)**) es necesario linealizar el modelo **(10.33)** lo que conduce a calcular la matriz jacobiana $\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{h}_{k+1,\chi}(\overline{\boldsymbol{\chi}}_{k+1})$ (Ec. **(10.36)**).

Gran parte de este capítulo está dedicada a ilustrar un procedimiento, más a menos sistemático, para implementar las funciones mencionadas en el párrafo anterior en distintos casos de aplicaciones prácticas. Dicho procedimiento requiere establecer: a) el modelo de las desviaciones de las medidas inerciales, b) el modelo de las medidas exoceptivas y sus innovaciones y c) el modelo de las desviaciones del estado aumentado.

Con el objeto de demostrar distintos aspectos del diseño y de la evaluación de un sistema de navegación real, el Párrafo 11.8 presenta un desarrollo completo aplicado al SAR aerotransportado de la CONAE. Los datos experimentales adquiridos en una serie de vuelos de prueba son analizados con herramientas numéricas usuales para evaluar la performance de varias configuraciones instrumentales. De los resultados se extraen conclusiones sobre las relaciones de compromiso que surgen en la práctica entre la complejidad del SW y la calidad de la instrumentación.

En su forma general el modelo de las desviaciones de la UMI está dado por las Ecs **(6.15)** que aquí reproducimos para referencia:

$$\delta\boldsymbol{\mu} \triangleq \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \\ \delta\mathbf{f}^{b} \end{bmatrix} = \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\mu}})\delta\boldsymbol{\sigma} + \delta\mathbf{b} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{\omega} \\ \boldsymbol{\xi}_{f} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{p_i}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\sigma}_{\omega} \\ \delta\boldsymbol{\sigma}_{f} \\ \delta\mathbf{b}_{\omega} \\ \delta\mathbf{b}_{f} \end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{p}_i} + \boldsymbol{\xi}_{\mu}$$

$$\mathbf{B}_{p_i}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} L(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b}) & 0 & I & 0 \\ \hline 0 & L(\hat{\mathbf{f}}^{b}) & 0 & I \end{array}\right] \tag{11.1}$$

El vector $\delta\mathbf{p}_i$ agrupa las desviaciones de los parámetros de calibración de la UMI. En ciertas aplicaciones específicas, el diseñador podrá adoptar una versión simplificada de esta formulación.

En base a la definición del estado aumentado (Ec. **(10.6)**) y la última de las Ecs. **(10.37)**, la estructura general del modelo de las innovaciones resulta:

$$\delta\mathbf{y}_{k+1} = \left[H_x \,|\, H_{p_i} \,|\, H_{p_e} \,|\, H_g \right]_{k+1} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{p}_i \\ \delta\mathbf{p}_e \\ \delta\mathbf{p}_g \end{bmatrix} + \boldsymbol{\eta}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1}\delta\chi + \boldsymbol{\eta}_{k+1} \tag{11.2}$$

En los párrafos que siguen se exponen distintos ejemplos que ilustran el cálculo de las sub-matrices H_x, H_{p_i}, H_{p_e} y H_g y cuando sea necesario la descripción probabilística del ruido discreto $\boldsymbol{\eta}_k$. En el último subcapítulo se presenta el desarrollo completo de una aplicación real y se analizan los resultados experimentales.

11.1 Filtro estabilizador del canal vertical

Al final del Capítulo 5 se demostró que el lazo de gravedad de la componente vertical de las ecuaciones cinemáticas es intrínsecamente inestable. Esto hace que la navegación 3D puramente inercial sea muy sensible al ruido, a los errores instrumentales y los errores iniciales. En la industria aeronáutica, este efecto ha sido clásicamente paliado incluyendo un sensor baro-altimétrico dentro de un lazo de estabilización del canal

vertical cuyo diseño fura ilustrado en el Párrafo 5.4.1. Sin embargo, al no estar planteado como un filtro de fusión de datos, ese diseño no contempla el compromiso entre la potencia del ruido sobre la estimación y la velocidad de seguimiento de las variaciones en altura. En efecto, a mayor velocidad de respuesta, mayor ancho de banda y mayor el ruido promedio en el estimador (y viceversa). En este párrafo retomamos este diseño en el contexto de la navegación integrada mediante un filtro de fusión de datos.

Desviaciones de las medidas inerciales

La magnitud inercial que interesa para este ejemplo es la fuerza específica en la dirección vertical para la que se supone el siguiente modelo de medición.

$$\begin{aligned} \widehat{f}_z^n &= f_z^n + b_z + \xi_f;\ \xi_f \sim (0, q_f\delta(t)) \\ \dot{b}_z &= \xi_b;\ \xi_b = (0, q_b\delta(t))) \end{aligned} \tag{11.3}$$

El único parámetro del modelo es la componente vertical del sesgo acelerométrico (es decir: $\mathbf{p}_i = b_z$) cuya evolución es modelada como un proceso browniano. Notar que todo error proveniente de usar la aproximación normal de la gravedad $\gamma_z^n(\Phi, h)$ en lugar de un modelo más preciso, se suma a b_z (ver Fig. 5.6), por lo cual, dicho error puede considerarse incluido en este último parámetro. El modelo de las desviaciones de las medidas inerciales (Ecs. (11.1)), en este caso, adopta la forma:

$$\delta f_z^n = \delta b_z + \xi_f;\ \xi_f \sim (0, q_f\delta(t)) \tag{11.4}$$

Desviaciones del estado aumentado

Bajo las hipótesis simplificadoras usadas en el Párrafo 5.4, las Ecs. cinemáticas **(5.46)** del canal vertical resultan ser:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= V_z \qquad\qquad\qquad\qquad ;\ h(t_0) = h_0 \\ \dot{V}_z &= c_z^n(V_x, V_y) + \gamma_z^n(\Phi, h) + f_z^n \ ;\ V_z(t_0) = V_z^o \end{aligned} \tag{11.5}$$

Donde V_x, V_y, Φ y $c_z^n(V_x, V_y)$ se suponen determinados sin error por el módulo del canal horizontal. Siguiendo el procedimiento delineado en el Capítulo 10, denotamos $\boldsymbol{\gamma}_h(\bar{\Phi}, \bar{h}) = \partial\boldsymbol{\gamma}_z^n(\Phi, h) / \partial h\big|_{\bar{h}\bar{\Phi}}$, agregamos el modelo browniano de la desviación paramétrica $\delta\dot{b}_z = \xi_b$ y, teniendo en cuenta que $\delta c_z^n(V_x, V_y) = 0$, establecemos las ecuaciones para las desviaciones del estado aumentado $\delta\chi \triangleq \left[\delta h \ \ \delta V_z \ \ \delta b_z\right]^T$ (Ec. **(10.37)**).

$$\delta\dot{\chi} = \begin{bmatrix} \delta\dot{h} \\ \delta\dot{V}_z \\ \delta\dot{b}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \gamma_h(\overline{\Phi},\overline{h}) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta\chi + I \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_f \\ \xi_b \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t)\delta\chi + \mathbf{B}\xi \qquad (11.6)$$

$$\xi \sim (0, \delta(t)Q_\xi);\ Q_\xi = diag(0, q_f, q_b)$$

Medida exoceptiva y modelo de las innovaciones

Suponiendo la medida del baro-altímetro insesgada y perturbada por un ruido centrado y aditivo, es decir: $\widehat{h}_k = h_k + \eta_k$, el modelo de las innovaciones resulta:

$$\delta y_k \triangleq \widehat{h}_k - \hat{h}_k = \delta h_k + \eta_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_k} \delta\chi_k + \eta_k \qquad (11.7)$$

Estimación *a posteriori* de las variables de navegación y los parámetros

Las Ecs. (11.6) y (11.7) completan el modelo a partir del cual el EKF propaga la matriz de covariancia y calcula la ganancia de Kalman. Esta última, junto con la innovación, permiten calcular la corrección del estado aumentado y, consiguientemente, su estimación *a posteriori.*

$$\Delta\boldsymbol{\chi}_{k+1} = \mathbf{K}_{k+1}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}) = \begin{bmatrix} \Delta h \\ \Delta V_z \\ \Delta b_z \end{bmatrix}_{k+1} \rightarrow \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{V}_z \\ \hat{b}_z \end{bmatrix}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1}^- + \Delta\boldsymbol{\chi}_{k+1} \qquad (11.8)$$

11.2 Integración de una UMI con datos de radar

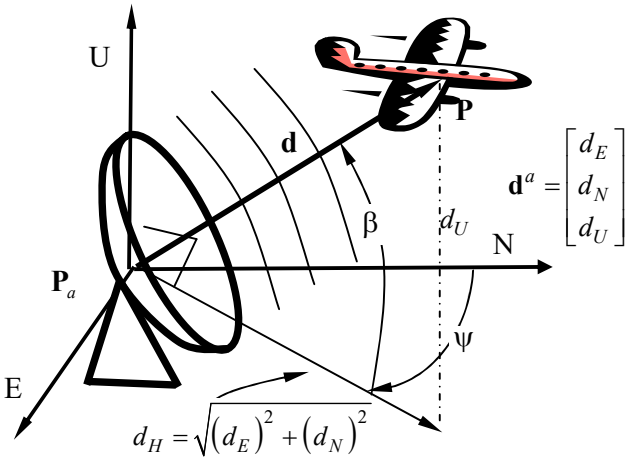


Figura 11.1: Navegación integrada radar/inercial

La Fig. 11.1 muestra un vehículo cuyo punto de navegación **P** (en este caso el centro geométrico de la UMI) está ubicado, en un instante dado, a la distancia vectorial **d** respecto del centro de fase de una antena de radar fija a la Tierra ubicada en el punto de

coordenadas ECEF conocidas $\mathbf{P}_a^e$. La terna de navegación es la terna geográfica local $\{\mathbf{g}\}$ (LGV-ENU) en el punto de navegación. El modelo cinemático está dado por las Ecs. **(5.33)** para $n = g$, con $\boldsymbol{\rho}^g$ dado por las **(5.34)** y **(5.35)**. Estas ecuaciones se suponen integradas mediante un algoritmo de tipo *strap-down* como el descrito en el Párrafo 7.1 del Capítulo 7. Por razones de simplicidad se supondrá que el modelo de gravedad es sin error.

Desviaciones de las medidas inerciales

En este ejemplo sólo se supondrán desconocidos los sesgos $\mathbf{b}_\omega$ y $\mathbf{b}_f$ del modelo de calibración de la UMI (Ec **(10.3)**). Así, éste y el modelo de las desviaciones (11.1) resultan:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\mu} = \hat{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{b} + \xi_\mu; \quad \mathbf{p_i} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_\omega \\ \mathbf{b}_f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \\ &\delta\boldsymbol{\mu} = \delta\mathbf{b} + \xi_\mu \end{aligned} \tag{11.9}$$

El ruido $\boldsymbol{\xi}_\mu$ se supondrá blanco, lo cual, en la **(10.4)** corresponde a $\Gamma = 0$ y $\boldsymbol{\xi}_\mu \equiv \mathbf{n}_\xi \sim N(0, \delta(t)Q_\xi)$.*

Modelo del sensor exoceptivo

En la Fig. 11.1, la terna de la antena $\{\mathbf{a}\}$ está centrada en $\mathbf{P}_a$ y es paralela a la terna geográfica local LGV-ENU en ese punto. Las coordenadas cartesianas en terna $\{\mathbf{a}\}$ del vector $\mathbf{d}$ se escriben como sigue en función de las coordenadas ECEF del vehículo y de la antena:

$$\mathbf{d}^a = \begin{bmatrix} d_E \\ d_N \\ d_U \end{bmatrix} = \mathbf{C}_e^a(\mathbf{P}^e - \mathbf{P}_a^e) = \mathbf{C}_e^a\mathbf{P}^e - \mathbf{P}_a^a \tag{11.10}$$

La MCD $\mathbf{C}_e^a$ es conocida puesto que la posición de la antena está dada. La estación de radar determina las siguientes magnitudes respecto de la terna de la antena:

$$\begin{aligned} &\textit{distancia}: d = [\textstyle\sum (d_i)^2]^{1/2}; \\ &\textit{elevación}: \beta = tg^{-1}\left(d_U / d_H\right); \\ &\textit{azimut}: \psi = tg^{-1}\left(d_E / d_N\right) \end{aligned} \tag{11.11}$$

Las medidas de estos datos, se suponen perturbadas por un ruido discreto, independiente vectorial $\boldsymbol{\eta}_k$ y trasmitidas al vehículo en forma instantánea. El modelo de las medidas exoceptivas tomadas a bordo en los instantes t_k es:

*Se sugiere al lector extender este ejemplo al caso en que se desconozcan otros parámetros de los modelos de calibración o de la gravedad.

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \begin{bmatrix} \hat{d}(t_k) \\ \hat{\beta}(t_k) \\ \hat{\psi}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t_k) \\ \beta(t_k) \\ \psi(t_k) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\eta}_k; \quad \boldsymbol{\eta}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k) \tag{11.12}$$

y no depende de ningún parámetro desconocido, es decir, en este ejemplo, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_i = \mathbf{b}$.

Desviaciones del estado cinemático y del estado aumentado
Las desviaciones del estado cinemático están dadas por la Ec. **(6.68)** del Ejemplo 6.1 en el Capítulo 6:

$$\delta\mathbf{x}^g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^g \\ \delta\mathbf{V}^g \\ \delta\boldsymbol{\pi}^g \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9; \quad \delta\boldsymbol{\pi}^g = \begin{bmatrix} \delta\theta_E \\ \delta\theta_N \\ \delta h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta}^H \\ \delta h \end{bmatrix}; \tag{11.13}$$

y satisfacen las Ecs. **(6.83)** con $\delta\mathbf{g}^g = 0$ (puesto que la gravedad se supone conocida) que rescribimos a continuación por conveniencia sustituyendo $\delta\boldsymbol{\mu}$ de la Ec. (11.9):

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{x}}^g &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_\phi & \boldsymbol{\Phi}_V & \boldsymbol{\Phi}_\pi \\ \mathbf{V}_\phi & \mathbf{V}_V & \mathbf{V}_\pi \\ 0 & \boldsymbol{\Pi}_V & \boldsymbol{\Pi}_\pi \end{bmatrix} \delta\mathbf{x}^g + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_b^g & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{C}}_b^g \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{\mu} \\ &= \mathbf{F}^g(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{b}}_k; \hat{\boldsymbol{\mu}})\delta\mathbf{x}^g + \mathbf{B}^g(\bar{\mathbf{x}})(\delta\mathbf{b} + \boldsymbol{\xi}_\mu) \end{aligned} \tag{11.14}$$

Las matrices $\mathbf{F}^g(\cdot)$ y $\mathbf{B}^g(\cdot)$ están evaluadas en la solución **(10.31)** del sistema determinista **(10.30)**. A la ecuación anterior se le agrega la desviación del modelo paramétrico browniano $\delta\dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\xi}_b$ para obtener finalmente la ecuación para el estado aumentado **(10.37)**:

$$\begin{aligned} &\delta\dot{\boldsymbol{\chi}} = \begin{bmatrix} \delta\dot{\mathbf{x}}^g \\ \delta\dot{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t)\delta\boldsymbol{\chi} + \mathbf{B}(t)\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_\mu \\ \boldsymbol{\xi}_b \end{bmatrix} \\ &\boldsymbol{\xi}_\mu(t) \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_\mu(t)); \quad \boldsymbol{\xi}_b(t) \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_b(t)); \end{aligned} \tag{11.15}$$

Donde las matrices $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ son:

$$\mathbf{A}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{F}^g(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{b}}_k; \hat{\boldsymbol{\mu}}) & \mathbf{B}^g(\bar{\mathbf{x}}) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{15\times15}; \quad \mathbf{B}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^g(\bar{\mathbf{x}}) & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{15\times6} \tag{11.16}$$

Modelo de la innovación.
Procedemos a calcular la matriz jacobiana $\mathbf{H}_{k+1}$ del modelo de las innovaciones (11.2) que, de acuerdo con la partición del estado aumentado en las (11.13) y (11.15), se descompone según:

$$\mathbf{H}_{k+1} = \left[H_x \mid H_b \right]_{k+1} = \left[H_\phi \mid H_\mathrm{v} \mid H_\pi \mid H_b \right]_{k+1} \in \mathbb{R}^{3\times 15} \tag{11.17}$$

A partir del modelo de las medidas (Ecs. (11.10) a (11.12)) y, teniendo en cuenta que $\mathbf{C}_e^a$ es conocida, el modelo de la innovación resulta:

$$\hat{\mathbf{y}}_k - \hat{\mathbf{y}}_k = \delta\mathbf{y}_k \approx \left.\frac{\partial d, \beta, \psi}{\partial d_E \partial d_N \partial d_U}\right|_{\hat{\chi}_k} \delta\mathbf{d}^a + \eta_k = \left.\frac{\partial d, \beta, \psi}{\partial d_E \partial d_N \partial d_U}\right|_{\hat{\chi}_k} \mathbf{C}_e^a \delta\mathbf{P}^e + \eta_k \tag{11.18}$$

Usando $\hat{\mathbf{C}}_g^e$ y $\hat{\mathbf{P}}^g$ calculados por el sistema de navegación, evaluamos $\delta\mathbf{P}^e$ mediante:

$$\delta\mathbf{P}^e = \delta(\mathbf{C}_g^e \mathbf{P}^g) = \delta\mathbf{C}_g^e \hat{\mathbf{P}}^g + \hat{\mathbf{C}}_g^e \delta\mathbf{P}^g \tag{11.19}$$

$\hat{\mathbf{P}}^g$ puede ser aproximado como (ver Fig. 11.2 y Ec. **(4.22)** del Capítulo 4).

$$\hat{\mathbf{P}}^g \approx (R_n + \hat{h}) \begin{bmatrix} 0 \\ -o(\varepsilon^2) \\ 1 + o(\varepsilon^2) \end{bmatrix} \tag{11.20}$$

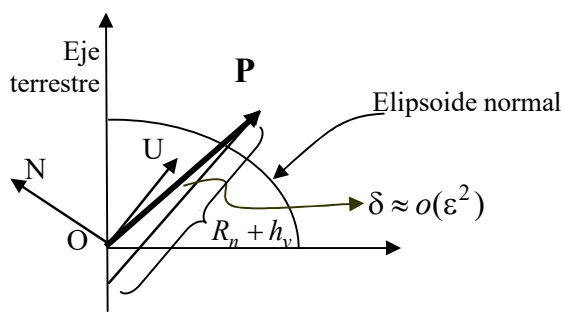


Figura 11.2: $\mathbf{P}_\mathrm{v}$ en coordenadas geográficas.

Con lo cual, despreciando las variaciones del radio de curvatura normal R_n en la zona de alcance del radar se tiene:

$$\delta\mathbf{P}^g = \delta h \begin{bmatrix} 0 \\ -o(\varepsilon^2) \\ 1 - o(\varepsilon^2) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta h \end{bmatrix} \tag{11.21}$$

Substituyendo $\delta\mathbf{C}_g^\mathrm{e} = \hat{\mathbf{C}}_g^\mathrm{e} \mathbf{S}(-\delta\boldsymbol{\theta}^\mathrm{g})$ y la anterior en la Ec. (11.19), obtenemos:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{P}^e &= \hat{\mathbf{C}}_g^e\begin{bmatrix}0\\0\\\delta h\end{bmatrix} - \hat{\mathbf{C}}_g^e(\delta\boldsymbol{\theta}^g\times\mathbf{P}^g) = \hat{\mathbf{C}}_g^e\begin{bmatrix}-(R_n+h)\delta\theta^N\\(R_n+h)\delta\theta^E\\\delta h\end{bmatrix}\\ &= \hat{\mathbf{C}}_g^e\begin{bmatrix}0 & -(R_n+h) & 0\\(R_n+h) & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\delta\boldsymbol{\pi} = L_p\delta\boldsymbol{\pi}\end{aligned} \tag{11.22}$$

De ésta ecuación y la (11.18), resulta que la matriz $\mathbf{H}_k$ adopta la forma:

$$\mathbf{H}_k = \left[0 \mid 0 \mid H_\pi \mid 0\right]_k \in \mathbb{R}^{3\times 15} \tag{11.23}$$

Con

$$H_\pi = \frac{\partial d,\beta,\psi}{\partial d_E^A \partial d_N^A \partial d_U^A}\mathbf{C}_e^a L_p \tag{11.24}$$

Nos resta determinar el jacobiano en la Ec. (11.24). A partir de las Ecs. (11.11) las filas de éste último resultan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial d_E^A \partial d_N^A \partial d_U^A} &= \frac{1}{d}\left[d_E^A \quad d_N^A \quad d_U^A\right] = \left[\cos(\beta)sen(\psi) \quad \cos(\beta)cos(\psi) \quad sen(\beta)\right]\\ \frac{\partial \beta}{\partial d_E^A \partial d_N^A \partial d_U^A} &= \frac{1}{d}\left[-sen(\beta)sen(\psi) \quad -sen(\beta)cos(\psi) \quad cos(\beta)\right]\\ \frac{\partial \psi}{\partial d_E^A \partial d_N^A \partial d_U^A} &= \left[cos(\psi)/(dcos(\beta)) \quad -sen(\psi)/(dcos(\beta)) \quad 0\right]\end{aligned} \tag{11.25}$$

Finalmente H_π en (11.24) resulta:

$$H_\pi = \begin{bmatrix}cos(\beta)sen(\psi) & cos(\beta)cos(\psi) & sen(\beta)\\ -sen(\beta)sen(\psi)/d & -sen(\beta)cos(\psi)/d & cos(\psi)/d\\ -sen(\psi)/(dcos(\beta)) & cos(\psi)/(dcos(\beta)) & 0\end{bmatrix}\mathbf{C}_e^a L_p \tag{11.26}$$

Estimación *a posteriori* del estado aumentado

Una vez completado el cálculo de $\mathbf{H}_k$ (Ec. (11.17)), se calcula la ganancia de Kalman y con ésta y la innovación se determina la corrección del estado aumentado:

$$\Delta\boldsymbol{\chi}_{k+1} = \mathbf{K}_{k+1}(\hat{\mathbf{y}}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}) = \left[(\boldsymbol{\phi}^g)^T;(\Delta\mathbf{V}^g)^T;(\Delta\boldsymbol{\theta}^H)^T;\Delta h\right]_{k+1}^T \tag{11.27}$$

Con $\Delta\boldsymbol{\theta}^H = \left[\Delta\theta_E \quad \Delta\theta_N\right]$ se conforma $\Delta\boldsymbol{\theta}^g = [(\Delta\boldsymbol{\theta}^H)^T, \Delta\theta_U = tg(\Phi)\Delta\theta_N]^T$. De la Ec. **(3.45)** y las definiciones de $\delta\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\phi}$ en las Ecs. **(6.28)** y **(6.39)**, se determinan las MCD a posteriori mediante:

$$\hat{\mathbf{C}}_e^{g+} = \exp(\mathbf{S}(\Delta\boldsymbol{\theta}^g))\hat{\mathbf{C}}_e^{g-} \approx \left(I + \mathbf{S}(\Delta\boldsymbol{\theta}^g)\right)\hat{\mathbf{C}}_e^{g-} \tag{11.28}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_b^{g+} = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^g))\hat{\mathbf{C}}_b^{g-} \approx \left(I + \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}^g)\right)\hat{\mathbf{C}}_b^{g-} \tag{11.29}$$

A continuación se calculan las correcciones en las coordenadas curvilíneas geodésicas: $\delta\Phi = -\delta\theta_E$; $\delta\lambda = \delta\theta_N / \cos\hat{\Phi}$ (ver Ec. **(6.30)**) que permiten calcular la estimación a posteriori de la posición en coordenadas curvilíneas:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}^+ &= \hat{\lambda}^- + \Delta\lambda \\ \hat{\Phi}^+ &= \hat{\Phi}^- + \Delta\Phi \\ \hat{h}^+ &= \hat{h}^- + \Delta h \end{aligned} \tag{11.30}$$

La velocidad a posteriori se calcula mediante:

$$\Delta\mathbf{V}^g \Rightarrow \hat{\mathbf{V}}^{g+} = \hat{\mathbf{V}}^{g-} + \Delta\mathbf{V}^g \tag{11.31}$$

Finalmente, también se actualiza la estimación a posteriori de los sesgos de la UMI:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_\omega^+ \\ \hat{\mathbf{b}}_f^+ \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_\omega^- \\ \hat{\mathbf{b}}_f^- \end{bmatrix}_{k+1} + \begin{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{b}}_\omega \\ \delta\hat{\mathbf{b}}_f \end{bmatrix}_{k+1} \tag{11.32}$$

11.3 Integración INS-GPS débilmente acoplada en coordenadas GEO

Se considera el mismo ejemplo anterior pero, en lugar de un radar, se usa un receptor GPS a bordo del vehículo que provee posición y velocidad (PV) simultáneas en coordenadas ECEF. Esto equivale a disponer de dos sensores exoceptivos independientes. Es usual denominar a este esquema débilmente acoplado por oposición a la versión fuertemente acoplada (que veremos más adelante) en la cual se usan los observables primarios del receptor. En la actualidad un receptor GPS puede entregar datos PV a una tasa de entre 10Hz a 20Hz toda vez que tenga en vista al menos 4 satélites de la constelación. Ciertos receptores proveen además las matrices de covariancias teóricas de sus propios estimados.

Tal como en el ejemplo anterior: a) se adoptan como modelo de la UMI y de sus desviaciones las Ecs. (11.9), b) la navegación se realiza en terna {**g**} (LGV-ENU), c) las desviaciones del estado cinemático y sus ecuaciones diferenciales son las (11.13) y (11.14) y d) dado que como veremos, las medidas exoceptivas no agregan parámetros desconocidos, las desviaciones del estado aumentado también obedecen a las Ecs. (11.15) y (11.16). Además, el procesamiento de la innovación para la obtención de la estimación *a posteriori* se efectúa con las mismas Ecs. (11.27) a (11.32). Lo que cambia son los modelos de las medidas exoceptivas y consiguientemente el de las innovaciones.

Medidas exoceptivas y modelo de las innovaciones

En este ejemplo se supondrá que el centro de fase de la antena del receptor GPS coincide con el centro geométrico de la UMI. Los modelos de las medidas exoceptivas de posición y velocidad en terna ECEF son:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{P}}^e(t_k) &= \mathbf{P}^e(t_k) + \eta_{gp};\ \eta_{gp} \sim N(0,\mathbf{R}_p)\\ \widehat{\mathbf{V}}^e(t_k) &= \mathbf{V}^e(t_k) + \eta_{gv};\ \eta_{gv} \sim N(0,\mathbf{R}_v)\end{aligned} \tag{11.33}$$

Los errores de las medidas GPS se suponen modelados, respectivamente, para la posición y velocidad, como $\eta_{gp} \sim N(0,\mathbf{R}_{p,k})$ y $\eta_{gv} \sim N(0,\mathbf{R}_{v,k})$. Se recordará del Capítulo 9 que el desvío estándar típico de la posición GPS es de orden métrico en tanto que el de la velocidad puede ser de algunos cm/seg.

Como los modelos (11.33) no tienen parámetros desconocidos, también aquí el vector de parámetros del estado aumentado es $\mathbf{p} = \mathbf{p}_i = \mathbf{b}$. La matriz del modelo de las innovaciones adopta la estructura:

$$\mathbf{H}_k = \left[H_x \mid H_b\right] = \left[\begin{array}{c|c} H_x^p & H_b^p \\ \hline H_x^v & H_b^v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} H^p \\ \hline H^v \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{6x12} \tag{11.34}$$

La desviación de la posición está dada por la misma expresión (11.22) $\delta\mathbf{P}^e = L_p\delta\boldsymbol{\pi}$, con lo cual, $H_b^p = 0_{3x3}$ y $H_x^p = \left[0_{3x3} \mid 0_{3x3} \mid L_p\right] \in \mathbb{R}^{3x9}$. En cuanto a la desviación de velocidad, ésta se obtiene perturbando la relación $\mathbf{V}^e = C_n^e\mathbf{V}^n$, usando $\delta\mathbf{C}_g^e = \mathbf{C}_g^e\mathbf{S}(-\delta\boldsymbol{\theta}^g)$ junto con la relación $\delta\boldsymbol{\theta}^g = T_{gH}\delta\boldsymbol{\theta}^H$ dada por la Ec. **(6.67)**:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{V}^e &= \delta\mathbf{C}_g^e\mathbf{V}^g + \mathbf{C}_g^e\delta\mathbf{V}^g = \mathbf{C}_g^e S(-\delta\boldsymbol{\theta}^g)\mathbf{V}^g + \mathbf{C}_g^e\delta\mathbf{V}^g\\ &= \mathbf{C}_g^e S(\mathbf{V}^g)\delta\boldsymbol{\theta}^g + \mathbf{C}_g^e\delta\mathbf{V}^g = \mathbf{C}_g^e S(\mathbf{V}^g)T_{gH}\delta\boldsymbol{\theta}^H + \mathbf{C}_g^e\delta\mathbf{V}^g\end{aligned} \tag{11.35}$$

Con lo cual:

$$H_b^v = \left[0_{3x3}\right];\ H_x^v = \left[0_{3\times3} \mid \hat{C}_g^e \mid \hat{C}_g^e S\left(\mathbf{V}^n\right)T_{gH} \mid 0_{3\times1}\right] \in \mathbb{R}^{3x9} \tag{11.36}$$

De las anteriores resulta finalmente:

$$\mathbf{H}_k = \left[\begin{array}{c|c} H_x^p & 0_{3x3} \\ \hline H_x^v & 0_{3x3} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{6x12}; \tag{11.37}$$

Esto completa la formulación matemática de este ejemplo.

11.4 Integración INS-GPS débilmente acoplada en coordenadas ECEF

Consideramos el mismo Ejemplo 11.3 pero referido a la terna de navegación ECEF en lugar de la LGV. El modelo cinemático está dado por las Ecs. **(5.17)**. Para vehículos no orbitales será posible usar alguna aproximación para el modelo de gravedad tal como las expresadas por las Ecs. **(4.48)**, **(4.51)** ó la **(5.20)** basada en el modelo **(4.55)**. Las ecuaciones cinemáticas son integradas mediante un algoritmo de tipo *strap-down* como el descrito en el Párrafo 7.2 del Capítulo 7. Para hacer más realista la aplicación, el

centro de fase de la antena del receptor y el centro geométrico de la UMI se supondrán separados por el brazo de palanca l (ver Fig. 11.3) cuyas coordenadas en la terna $\{\mathbf{b}\}$ pueden ser vistas como parámetros del sensor exoceptivo y por lo tanto susceptibles de ser estimadas.

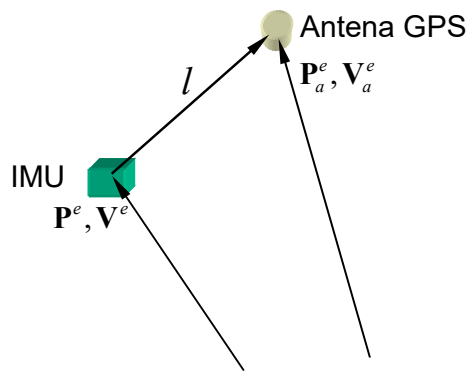


Figura 11.3: Brazo de palanca entre la antena GPS y la UMI

Dado que el receptor GPS calcula y entrega, normalmente, la posición P y la velocidad V en terna ECEF, el uso de esa terna simplifica el modelo de la innovación respecto de usar la terna GEO. Otra ventaja de adoptar la terna ECEF es que la integración inercial es más rápida que en una terna LGV y además mucho más precisa en vehículos rápidos (ver discusión al respecto en el Párrafo 7.3 del Capítulo 7).

Como en los dos ejemplos anteriores adoptamos el modelo de las medidas inerciales y de sus desviaciones dados por las Ecs. (11.9).

Modelo de las medidas exoceptivas.
Sean $\mathbf{P}_a^e, \mathbf{V}_a^e$ y $\mathbf{P}^e, \mathbf{V}^e$ las posiciones y velocidades en terna ECEF, respectivamente, de la antena del receptor y del centro de la UMI. Teniendo en cuenta que $\omega_{eb}^b = \omega_{ib}^b - \omega_{ie}^b = \omega_{ib}^b - C_e^b \Omega_e$, para un instante arbitrario, de la geometría de la Fig. 11.3 surge:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_a^e &= \mathbf{P}^e + \hat{\mathbf{C}}_b^e l^b \\ \mathbf{V}_a^e &= \mathbf{V}^e + \dot{\mathbf{C}}_b^e l^b = \mathbf{V}^e + \hat{\mathbf{C}}_b^e \mathbf{S}(\omega_{eb}^b) l^b \\ &= \mathbf{V}^e + \left(\hat{\mathbf{C}}_b^e \mathbf{S}(\hat{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\Omega_e)\hat{\mathbf{C}}_b^e\right) l^b \end{aligned} \tag{11.38}$$

Con lo cual, el modelo de las medidas exoceptivas resulta en este caso función de la medida giroscópica.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_a^e &= \mathbf{P}^e + \hat{\mathbf{C}}_b^e l^b + \eta_{gp} \\ \hat{\mathbf{V}}_a^e &= \mathbf{V}^e + \left(\hat{\mathbf{C}}_b^e \mathbf{S}(\hat{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{S}(\Omega_e)\hat{\mathbf{C}}_b^e\right) l^b + \eta_{gp} \end{aligned} \tag{11.39}$$

Modelo de las desviaciones del estado aumentado

Las ecuaciones cinemáticas en terna ECEF del centro de coordenadas de la UMI están ahora dadas por las Ecs. **(5.17)**, en tanto que las desviaciones del estado cinemático, definidas por las Ecs. **(6.21)**:

$$\delta\mathbf{x}_e^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^e \\ \hline \delta\mathbf{V}^e \\ \hline \delta\mathbf{P}^e \end{bmatrix}, \tag{11.40}$$

satisfacen la ecuación diferencial lineal **(6.23)** del Sub-capítulo 6.4 en la cual $\delta\boldsymbol{\mu}$ está dado por la Ec. (11.9)

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{x}}_e^e &= \mathbf{F}_e^e\delta\mathbf{x}_e^e + \mathbf{B}_e^e\delta\boldsymbol{\mu} = \mathbf{F}_e^e\delta\mathbf{x}_e^e + B_\omega^e\delta\mathbf{b}_\omega + B_f^e\delta\mathbf{b}_f + \mathbf{B}_e^e\boldsymbol{\xi}_\mu \\ \mathbf{B}_e^e &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_\mathbf{b}^\mathbf{e} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{C}}_\mathbf{b}^\mathbf{e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_\omega^e & B_f^e \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.41}$$

El vector de desviaciones del estado aumentado se define como:

$$\delta\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_e^e \\ \delta\mathbf{b} \\ \delta l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{16}; \tag{11.42}$$

Cuando los parámetros son modelados como procesos brownianos, $\delta\boldsymbol{\chi}$ obedece a las ecuaciones estocásticas (ver Ecs. **(10.37)**):

$$\begin{aligned} \delta\dot{\boldsymbol{\chi}} &= \begin{bmatrix} \delta\dot{\mathbf{x}}_e^e \\ \delta\dot{\mathbf{b}}_\omega \\ \delta\dot{\mathbf{b}}_f \\ \delta\dot{l} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_e^e & B_\omega^e & B_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(t)} \delta\boldsymbol{\chi} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_\omega^e & B_f^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_\omega \\ \xi_f \\ \xi_{b_\omega} \\ \xi_{b_f} \\ \xi_l \end{bmatrix}}_{\xi(t)}; \; \xi_\mu = \begin{bmatrix} \xi_\omega \\ \xi_f \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}(t)\delta\boldsymbol{\chi} + \mathbf{B}(t)\xi(t) \\ \xi_\alpha &\sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_\alpha(t)); \; \alpha = \omega, f, b_\omega, b_f, l; \quad \xi(t) \sim N(0, \delta(t)diag(\mathbf{Q}_\alpha(t))) \end{aligned} \tag{11.43}$$

Modelo de las innovaciones

Con $\delta\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{b}_\omega^T & \delta\mathbf{b}_f^T \end{bmatrix}$, las innovaciones en posición y velocidad adoptan la forma:

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{y}_k^p \\ \delta\mathbf{y}_k^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{P}}_a^e - \mathbf{P}_a^e \\ \widehat{\mathbf{V}}_a^e - \mathbf{V}_a^e \end{bmatrix} = \mathbf{H}_k \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_e^e \\ \delta\mathbf{b} \\ \delta l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_p \\ \boldsymbol{\eta}_v \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{H}_k = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H_x^p & H_\omega^p & H_f^p & H_l^p \\ \hline H_x^v & H_\omega^v & H_f^v & H_l^v \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{6x16} \tag{11.44}$$

Perturbando la primera de las (11.39) la innovación en la posición resulta como sigue con $\boldsymbol{\eta}_p \equiv \boldsymbol{\eta}_{gp}$:

$$\delta\mathbf{y}_k^p = \delta\mathbf{P}^e + \mathbf{S}(\varphi^e)\hat{\mathbf{C}}_b^e l^b + \hat{\mathbf{C}}_b^e \delta l^b + \boldsymbol{\eta}_p \approx \delta\mathbf{P}^e - \mathbf{S}(\hat{\mathbf{C}}_b^e l^b)\varphi^e + \boldsymbol{\eta}_p \tag{11.45}$$

La aproximación se debe a que el desconocimiento δl^b suele ser de orden centimétrico y por tanto quedar subsumido en los errores de orden métrico en la posición GPS. De la expresión anterior y de la partición del estado cinemático dada por la (11.40) resultan los elementos de la primera fila de $\mathbf{H}_k$:

$$H_x^p = \left[-\mathbf{S}(\hat{\mathbf{C}}_b^e l^b) \mid 0_{3x3} \mid I_3\right] \in \mathbb{R}^{3x9};\ H_\omega^p = H_f^p = 0_{3x3};\ H_l^p = 0_{3x1} \tag{11.46}$$

Por otra parte, perturbando la segunda de las Ecs. (11.39) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{y}_k^v &= \delta\mathbf{V}^e + \left(\mathbf{S}(\varphi^e)\hat{\mathbf{C}}_b^e\mathbf{S}(\omega_{ib}^b) + \hat{\mathbf{C}}_b^e\mathbf{S}(\delta\omega_{ib}^b) - \mathbf{S}(\Omega^e)\mathbf{S}(\varphi^e)\hat{\mathbf{C}}_b^e\right) l^b + \\ &\quad + \left(\hat{\mathbf{C}}_b^e\mathbf{S}(\omega_{ib}^b) - \mathbf{S}(\Omega^e)\hat{\mathbf{C}}_b^e\right)\delta l^b + \boldsymbol{\eta}_{gv} \\ &\approx \delta\mathbf{V}^e - \mathbf{S}(\hat{\mathbf{C}}_b^e(\omega_{ib}^b \times l^b))\varphi^e - \hat{\mathbf{C}}_b^e\mathbf{S}(l^b)\delta\omega_{ib}^b + \hat{\mathbf{C}}_b^e\mathbf{S}(\omega_{ib}^b)\delta l^b + \boldsymbol{\eta}_{gv} \end{aligned} \tag{11.47}$$

En este caso, se consideran despreciables los términos $\Omega_e \times (l^e \times \varphi^e) \approx 0 \approx \Omega_e \times \delta l^e$. Sustituyendo $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \delta\mathbf{b}_\omega + \xi_\omega$, el modelo de la innovación de la velocidad resulta:

$$\delta\mathbf{y}_k^v = H_x^v\delta\mathbf{x}^e + H_\omega^v\delta\mathbf{b}_\omega + H_f^v\delta\mathbf{b}_f + H_l^v\delta l^b + \boldsymbol{\eta}_{gv} + H_\omega^v\boldsymbol{\xi}_\omega \tag{11.48}$$

donde las submatrices de la segunda fila de $\mathbf{H}_k$ se definen como:

$$\begin{aligned} H_x^v &= \left[\text{-}\mathbf{S}(\hat{\mathbf{C}}_b^e(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times l^b)) \mid I_3 \mid 0_{3x3}\right] \in \mathbb{R}^{3x9} \\ H_\omega^v &= \text{-}\hat{\mathbf{C}}_b^e\mathbf{S}(l^b) \in \mathbb{R}^{3x3};\ H_f^v = 0_{3x3} \\ H_l^v &= \hat{\mathbf{C}}_b^e\mathbf{S}(\widehat{\omega}_{ib}^b) \in \mathbb{R}^{3x3} \end{aligned} \tag{11.49}$$

La perturbación sobre la innovación de velocidad es ahora $\eta_v = \eta_{gv} - \mathbf{C}_b^e\mathbf{S}(l^b)\xi_\omega$.

De las Ecs. (11.45) y (11.47) se extraen algunas observaciones de interés relativas a la presencia del brazo de palanca:

a) Tanto la innovación de posición como la de velocidad aportan información directa sobre las componentes del error de orientación φ^e no paralelas a *l*.
b) La innovación de velocidad aporta información (giroscópica) sobre las componentes del error en la velocidad angular $\delta\omega_{ib}^b$ no paralelas a *l*. Esto puede incidir en la mejora de la calibración en vuelo de todos los instrumentos.
c) La, en general, buena precisión de la medida de la velocidad (algunos cm/seg), hace que el término $\mathbf{C}_b^e\mathbf{S}(\omega_{ib}^b)\delta l^b$ permita ajustar las componentes del brazo de palanca ortogonales a ω_{ib}^b en vehículos suficientemente ágiles.
d) El ruido giroscópico se refleja en la perturbación de la innovación de velocidad mediante $\eta_v = \eta_{gv} + H_\omega^v \xi_\omega$, por lo cual ambos procesos no pueden ser considerados independientes. Esto obliga a considerar la correlación $\mathbf{R}_{\chi\eta}$ en la Ec. **(10.41)**.

Correlación entre los ruidos de las medidas.
Llamamos

$$L = \left[\begin{array}{c|c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline H_\omega^v & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{11.50}$$

para escribir:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_p \\ \boldsymbol{\eta}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{gp} \\ \boldsymbol{\eta}_{gv} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H_\omega^v \xi_\omega \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta}_g + L\xi \tag{11.51}$$

Teniendo en cuenta la Ec. (11.43) y la independencia entre $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}_g$ evaluamos

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\xi\eta}(\tau,t) &= E\{\boldsymbol{\xi}(\tau)(\boldsymbol{\eta}_g(t) + L\boldsymbol{\xi}(t))^T\} \\ &= E\{\boldsymbol{\xi}(\tau)\boldsymbol{\xi}(t)^T\}L^T = \delta(\tau - t)diag(\mathbf{Q}_\alpha)L^T \end{aligned} \tag{11.52}$$

Usando el resultado dado por la Ec **(C.15)** del Apéndice C, se obtiene:

$$\mathbf{R}_{\chi\eta}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{B}(t)diagQ_\alpha L^T = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} 0 & B_\omega^e\mathbf{Q}_\omega H_\omega^{vT} \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]; \; B_\omega^e\mathbf{Q}_\omega H_\omega^{vT} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_b^e\mathbf{Q}_\omega\mathbf{S}(l^b)\hat{\mathbf{C}}_e^b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.53}$$

Este término, resultado de la presencia de *l*, deberá introducirse en las Ecs. **(10.42)** y **(10.43)**. Respecto de la primera, el término de corrección adopta la forma:

$$\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{R}_{\chi\eta} + \mathbf{R}_{\chi\eta}^T\mathbf{H}_{k+1}^T = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} 0 & H_x^p B_\omega^e\mathbf{Q}_\omega H_\omega^{vT} + H_\omega^v\mathbf{Q}_\omega B_\omega^{eT} H_x^{pT} \\ \hline H_x^p B_\omega^e\mathbf{Q}_\omega H_\omega^{vT} + H_\omega^v\mathbf{Q}_\omega B_\omega^{eT} H_x^{pT} & H_x^v B_\omega^e\mathbf{Q}_\omega H_\omega^{vT} + H_\omega^v\mathbf{Q}_\omega B_\omega^{eT} H_x^{vT} \end{array}\right] \tag{11.54}$$

Estimación *a posteriori* de las variables de navegación y los parámetros
Actualizadas la matriz **H** y la ganancia de Kalman junto con la innovación se determina la corrección del estado aumentado:

$$\Delta\boldsymbol{\chi}_{k+1} = \mathbf{K}_{k+1}(\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}) = \left[\boldsymbol{\varphi}^{eT} \mid \Delta\mathbf{V}^{eT} \mid \Delta\mathbf{P}^{eT} \mid \Delta\mathbf{b}^{T} \mid \Delta l\right]^{T}_{k+1}, \tag{11.55}$$

mediante la cual se actualizan:

$$\hat{\mathbf{C}}_b^{e+} = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e))\hat{\mathbf{C}}_b^{e-} \approx \left(I + \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e)\right)\hat{\mathbf{C}}_b^{e-} \tag{11.56}$$

$$\hat{\mathbf{V}}^{e+} = \hat{\mathbf{V}}^{e-} + \Delta\mathbf{V}^e \tag{11.57}$$

$$\hat{\mathbf{P}}^{e+} = \hat{\mathbf{P}}^{e-} + \Delta\mathbf{P}^e \tag{11.58}$$

$$\hat{\mathbf{b}}^{+} = \hat{\mathbf{b}}^{-} + \Delta\mathbf{b} \tag{11.59}$$

$$\hat{l}^{b+} = \hat{l}^{b-} + \Delta l^b \tag{11.60}$$

11.5 Integración INS-GPS fuertemente acoplada

Consideramos ahora la integración de una unidad inercial (UMI) con los observables primarios de código (pseudo-rango) y Doppler (delta-pseudo-rango) medidos por un receptor GPS por cada satélite visible de la constelación. Esta configuración es usualmente denominada *INS-GPS fuertemente acoplada* para distinguirla de la configuración *débilmente acoplada* que, como vimos en el ejemplo anterior, procesa los datos secundarios de posición y velocidad determinados por el módulo de navegación del receptor.

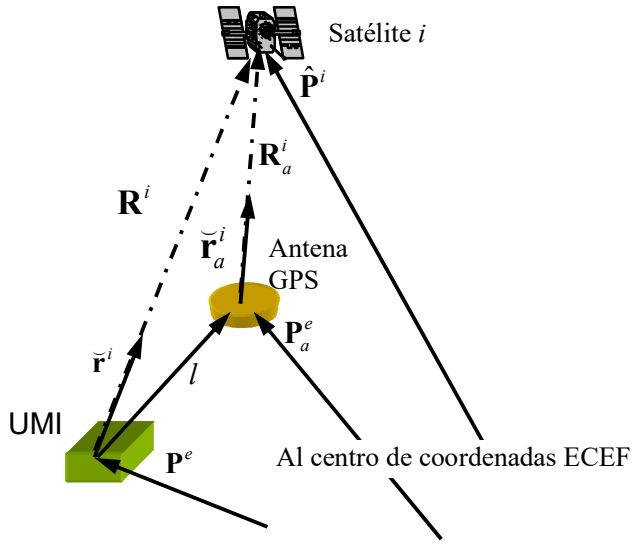


Figura 11. 4.

La Fig. 10.4 describe la geometría del problema con brazo de palanca antena-UMI para un satélite de la constelación visible. Para simplificar, l se supondrá conocido. Por los mismos motivos que en el ejemplo anterior, se elije la terna de referencia ECEF con lo cual las ecuaciones cinemáticas son también las **(5.17)** y el vector desviación del estado cinemático $\delta\mathbf{x}_e^e$ está dado por la (11.40).

Modelo de las medidas exoceptivas
Reintroducimos los modelos de los observables de código y Doppler establecidos en el Capítulo 9 (Ecs. **(9.35)**) para *s* satélites visibles de la constelación:

$$\left.\begin{array}{ll}\rho_a^i = R_a^i + c\delta t_a + sp^i + \eta_\rho^i; & \eta_\rho^i(t_k) \sim N(0, \mathbf{R}_{\rho i}) \\ \dot{\rho}_a^i = \dot{R}_a^i + cD_a + \varepsilon_D^i; & \eta_D^i(t_k) \sim N(0, \mathbf{R}_{\dot{\rho} i})\end{array}\right\} \; i = 1,...,s \tag{11.61}$$

Donde, $sp^i = E^i + c(I_u^i + T_u^i - \delta t_i)$ engloba los errores de propagación y del segmento espacial; $\eta_\rho^i = cM_a^i + \varepsilon_\rho^i$ es el error residual de la medición del pseudo-rango, en tanto que ε_D^i lo es de la medida de la frecuencia Doppler que incluye: las derivadas temporales $\dot{E}^s$, $\dot{T}_u^s$, $\dot{I}_u^s$, la deriva del reloj satelital, el error de medida y los efectos de las reflexiones múltiples (ver definiciones en el Párrafo 9.1 del Capítulo 9).

Denotamos $\breve{\mathbf{r}}_a^i = \mathbf{R}_a^i / R_a^i \approx \breve{\mathbf{r}}^i$ al versor de apuntamiento al satélite *i*. Para velocidades no orbitales, la derivada temporal de este versor puede despreciarse. Bajo estas condiciones, de la Fig. 10.4 se obtienen:

$$\begin{aligned} R_a^i &= \left\|\mathbf{R}_a^i\right\| = \left\|\hat{\mathbf{P}}^i - \mathbf{P}_a\right\| = \breve{\mathbf{r}}_a^i \bullet (\hat{\mathbf{P}}^i - \mathbf{P}_a) \simeq \breve{\mathbf{r}}^i \bullet \mathbf{R}_a^i \\ \dot{R}_a^i &= (\breve{\mathbf{r}}_a^i)^T (\hat{\mathbf{V}}^i - \mathbf{V}_a) \simeq \breve{\mathbf{r}}^i \bullet (\hat{\mathbf{V}}^i - \mathbf{V}_a) \end{aligned} \tag{11.62}$$

Se supondrá que en los instantes t_k se obtienen *s* pares de mediciones independientes de los observables:

$$\hat{\mathbf{y}}_i(t_k) = \begin{bmatrix} \rho_a^i(t_k) \\ \dot{\rho}_a^i(t_k) \end{bmatrix}; \;\; i = 1,...,s \tag{11.63}$$

El modelo de las mediciones (11.61)/(11.63) es función del vector que agrupa el conjunto de parámetros inciertos:

$$\mathbf{p}_e \triangleq \begin{bmatrix} c\delta t_a & cD_a & sp^1 & \cdots & sp^s \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{s+2} \tag{11.64}$$

Destacamos que en la presente configuración los errores sp^i no forman parte de los residuos de las medidas de código, por lo cual estos últimos quedan reducidos a su mínima expresión (1-5mts, ver Párrafo 9.1.1). Una estimación inicial gruesa del vector $\mathbf{p}_e$ puede obtenerse a partir del mensaje de navegación del GPS.

El siguiente modelo vincula el desvío del reloj con su deriva temporal:

$$c\dot{\delta} t_a = cD_a \tag{11.65}$$

De acuerdo con la Fig. 10.5 la distancia de la antena al satélite *i* en coordenadas terrestres resulta:

$$\mathbf{R}_a^i = (\hat{\mathbf{P}}^i)^e - (\mathbf{P}^e + \mathbf{C}_b^e l^b) \tag{11.66}$$

Desviación del estado aumentado

El ejemplo contempla incertezas tanto en el modelo de los instrumentos inerciales: $\delta\mathbf{p}_i^T = \left[\delta\boldsymbol{\sigma}^T \;\; \delta\mathbf{b}^T\right]$, como en las mediciones exoceptivas GPS: $\delta\mathbf{p}_e$. De acuerdo con las Ecs. **(10.6)** y (11.40) (ó **(6.21)**) definimos el siguiente vector desviación del estado aumentado:

$$\delta\boldsymbol{\chi}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}(t) \\ \delta\mathbf{p}_i(t) \\ \delta\mathbf{p}_e(t) \end{bmatrix}; \;\; \delta\mathbf{x}^e \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^e \\ \delta\bar{\mathbf{V}}^e \\ \delta\bar{\mathbf{P}}^e \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9; \tag{11.67}$$

Las desviaciones $\delta\mathbf{p}_i$ se vinculan con los errores en las medidas inerciales $\delta\boldsymbol{\mu}$ a través de la ecuación (11.1).

Modelo de las innovaciones.

Teniendo en cuenta que $\delta R_a^i = \delta\breve{\mathbf{r}}^i \bullet \mathbf{R}_a^i + \breve{\mathbf{r}}^i \bullet \delta\mathbf{R}_a^i \approx \breve{\mathbf{r}}^i \bullet \delta\mathbf{R}_a^i \;\; (\delta\breve{\mathbf{r}}^i \approx\perp \mathbf{R}_a^i)$, perturbando las Ecs. (11.61) se obtienen:

$$\left.\begin{aligned} \delta\rho_i &= \breve{\mathbf{r}}^{iT}\delta\mathbf{R}_a^i + \delta sp^i + c\delta\delta t_a + \eta_\rho^i \\ \delta\dot{\rho}_i &\triangleq \dot{\rho}_i - \hat{\dot{\rho}}_i \simeq \delta\dot{R}_a^i + c\delta D_a + \varepsilon_D^i \end{aligned}\right\} \tag{11.68}$$

Por otra parte, perturbando la (11.66) y usando $\delta\mathbf{C}_b^e = \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e)\hat{\mathbf{C}}_b^e$ calculamos:

$$\delta\mathbf{R}_a^i = -\delta\mathbf{P}^e - \delta\mathbf{C}_b^e l^b = -\delta\mathbf{P}^e - \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e)\hat{\mathbf{C}}_b^e l^b = -\delta\mathbf{P}^e + \mathbf{S}(\hat{\mathbf{C}}_b^e l^b)\boldsymbol{\varphi}^e \tag{11.69}$$

En la anterior se usó el hecho de que l es conocido sin error y además $\delta\hat{\mathbf{P}}^i = 0$ dado que los errores de efemérides (o de posicionamiento) del satélite i ya fueron incluidos en el término sp^i. Así, el modelo de la innovación en pseudo-rango resulta:

$$\begin{aligned} \delta y_i^\rho &= \breve{\mathbf{r}}_i^T(-\delta\mathbf{P}^e + S(\hat{\mathbf{C}}_b^e l^b)\boldsymbol{\varphi}^e) + c\delta\delta t_a + \delta sp^i + \eta_\rho^i \\ &= \left[\breve{\mathbf{r}}_i^T\mathbf{S}(\hat{\mathbf{C}}_b^e l^b) \;\; 0 \;\; -\breve{\mathbf{r}}_i^T\right]\delta\mathbf{x}^e + \left[1 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 1_{(i)} \;\; \cdots\right]\delta\mathbf{p}_e + \eta_\rho^i \end{aligned} \tag{11.70}$$

Donde de la (11.64), $\delta\mathbf{p}_e^T = \left[c\delta\delta t_a \;\; c\delta D_a \;\; \delta sp^1 \;\; \cdots \;\; \delta sp^s\right]$. Por otra parte, a partir de la 2ª Ec. (11.62), establecemos:

$$\delta\dot{R}_a^i = \dot{\mathbf{R}}_a^i \bullet \delta\breve{\mathbf{r}}^i + \breve{\mathbf{r}}^i \bullet \delta\dot{\mathbf{R}}_a^i \tag{11.71}$$

Derivando la Ec (11.66), usando $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{eb}^e = \hat{\mathbf{C}}_b^e\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_e$ y luego de despreciar el producto vectorial $\boldsymbol{\Omega}^e \times l^e$ se tiene:

$$\dot{\mathbf{R}}_a^i = \dot{\hat{\mathbf{P}}}^i - \hat{\mathbf{V}}^e - \hat{\mathbf{C}}_b^e(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times l^b) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_e)\hat{\mathbf{C}}_b^e l^b \approx \dot{\hat{\mathbf{P}}}^i - \hat{\mathbf{V}}^e - \hat{\mathbf{C}}_b^e(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times l^b) \qquad (11.72)$$

Perturbando esta expresión y usando el mismo argumento empleado para las (11.69), que aquí justifica usar $\delta\dot{\hat{\mathbf{P}}}^i = 0$, calculamos:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{R}}_a^i &= -\delta\mathbf{V}^e - \delta\mathbf{C}_b^e(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times l^b) - \hat{\mathbf{C}}_b^e(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times l^b) \\ &= -\delta\mathbf{V}^e - \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e)\hat{\mathbf{C}}_b^e(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times l^b) + \hat{\mathbf{C}}_b^e\mathbf{S}(l^b)\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\ &= -\delta\mathbf{V}^e + \mathbf{S}(\hat{\mathbf{C}}_b^e(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times l^b))\boldsymbol{\varphi}^e + \hat{\mathbf{C}}_b^e\mathbf{S}(l^b)\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\end{aligned} \qquad (11.73)$$

Por otra parte, de la definición del versor $\breve{\mathbf{r}}^i \approx \mathbf{R}_a^i / R_a^i$ junto con la (11.69) resulta:

$$\delta\breve{\mathbf{r}}^i = (R_a^i)^{-1}(I - \breve{\mathbf{r}}^i\breve{\mathbf{r}}^{iT})\delta\mathbf{R}_a^i = (R_a^i)^{-1}(I - \breve{\mathbf{r}}^i\breve{\mathbf{r}}^{iT})\left[-\delta\mathbf{P}^e + \mathbf{S}(\hat{\mathbf{C}}_b^e l^b)\boldsymbol{\varphi}^e\right] \qquad (11.74)$$

Llamamos $\hat{l}^e = \hat{\mathbf{C}}_b^e l^b$ y definimos los vectores fila:

$$\mathbf{c}_{\dot{\rho}\varphi}^i \triangleq \dot{\mathbf{R}}_a^{iT}(I - \breve{\mathbf{r}}^i\breve{\mathbf{r}}^{iT})\mathbf{S}(\hat{l}^e) / R_a^i + \breve{\mathbf{r}}^{iT}\mathbf{S}(\hat{\mathbf{C}}_b^e(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times l^b));\ i = 1,...,s$$

Usando esta definición, sustituimos las (11.72) a (11.74) en la Ec. (11.71) para, luego de algunas manipulaciones, obtener:

$$\delta\dot{R}_a^i = \mathbf{c}_{\dot{\rho}\varphi}^i\boldsymbol{\varphi}^e - \breve{\mathbf{r}}^{iT}\delta\mathbf{V}^e - (R_a^i)^{-1}\dot{\mathbf{R}}_a^{iT}(I - \breve{\mathbf{r}}^i\breve{\mathbf{r}}^{iT})\delta\mathbf{P}^e + \breve{\mathbf{r}}^{iT}\hat{\mathbf{C}}_b^e\mathbf{S}(l^b)\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \qquad (11.75)$$

Finalmente, introduciendo la anterior en la 2ª de la Ec. (11.68), resulta la expresión lineal en $\delta\mathbf{x}^e$, $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ y $\delta\mathbf{p}_e$ de la innovación para los observables Doppler, *i*=1,...,*s*:

$$\delta y_i^D = \left[\mathbf{c}_{\dot{\rho}\varphi}^i \;\vdots\; -\breve{\mathbf{r}}^{iT} \;\vdots\; -\dot{\mathbf{R}}_a^{i\,T}(1 - \breve{\mathbf{r}}^i\breve{\mathbf{r}}^{iT}) / R_a^i\right]\delta\mathbf{x}^e + \breve{\mathbf{r}}_i^T\hat{\mathbf{C}}_b^e\mathbf{S}(l^b)\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \left[0 \,\vdots\, 1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{0} \,\vdots\, \cdots\right]\delta\mathbf{p}_e + \varepsilon_D^i \qquad (11.76)$$

A través de los términos $\mathbf{S}(\hat{l}^e)\boldsymbol{\varphi}^e = \hat{l}^e \times \boldsymbol{\varphi}^e$ y $\mathbf{S}(l^b)\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = l^b \times \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$, el brazo de palanca hace que las innovaciones sean sensibles a las componentes del error de actitud $\boldsymbol{\varphi}^e$ y del error giroscópico $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ ortogonales al vector *l*. Sensibilidad que se manifiesta en presencia de las velocidades lineal y angular: $\dot{\mathbf{R}}_a^i$ y $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}$. Este hecho ofrece a esta configuración potencial tanto para la determinación de la orientación como para la calibración de los giróscopos a bordo de vehículos suficientemente ágiles. Más aún, como el lector advertirá, usando más de una antena con brazos de palanca no paralelos, las innovaciones Doppler podrán aportar información directa sobre todas las componentes del error de actitud y de todos los parámetros giroscópicos que, de acuerdo con la Ec. (11.1), se relacionan con $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ mediante:

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \left[L(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \,\vdots\, \mathbf{0} \,\vdots\, I \,\vdots\, \mathbf{0}\right]\delta\mathbf{p}_i + \boldsymbol{\xi}_\omega \qquad (11.77)$$

El modelo de las innovaciones de ambas medidas del receptor GPS en relación a cada satélite *i* y para cada instante t_k, se resume en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&\delta\mathbf{y}_i(t_k) = \mathbf{H}_k^i \delta\boldsymbol{\chi}_k + \begin{bmatrix} \eta_\rho^i(t_k) \\ \eta_D^i(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathbf{x},k}^i & \mathbf{H}_{\mathbf{p}i,k}^i & \mathbf{H}_{\mathbf{p}e,k}^i \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{\chi}_k + \boldsymbol{\eta}_k; \quad i = 1,\ldots,s \\
&\eta_D^i(t_k) = \varepsilon_D^i(t_k) + \breve{\mathbf{r}}_i^T \hat{\mathbf{C}}_b^e \mathbf{S}(l^b) \boldsymbol{\xi}_\omega(t_k) \\
&\boldsymbol{\eta}_k^i \sim N(0, \mathbf{R}_k^i);
\end{aligned} \tag{11.78}$$

Donde, con base en las Eqs. (11.70) y (11.76) las sub-matrices de $\mathbf{H}_k^i$ se definen como:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H}_{\mathbf{x},k}^i \triangleq \left[\begin{array}{c|c|c} \breve{\mathbf{r}}_i^T \mathbf{S}(l^e) & \mathbf{0} & -\breve{\mathbf{r}}_i^T \\ \hline \mathbf{c}_{\dot{\rho}\varphi}^i & -\breve{\mathbf{r}}^{iT} & -\dot{\mathbf{R}}_a^{i\,T}(I - \breve{\mathbf{r}}^i \breve{\mathbf{r}}^{iT}) / R_a^i \end{array}\right]; \; \mathbf{H}_{\mathbf{p}e,k}^i \triangleq \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1_{(i)} & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \\
&\mathbf{H}_{\mathbf{p}i,k}^i \triangleq \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \breve{\mathbf{r}}_i^T \hat{\mathbf{C}}_b^e \mathbf{S}(l^b) L(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) & 0 & \breve{\mathbf{r}}_i^T \hat{\mathbf{C}}_b^e \mathbf{S}(l^b) & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{11.79}$$

Ecuación de las desviaciones del estado aumentado.
La ecuación de la desviación del estado cinemático (11.41) para este ejemplo se escribe:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}^e = \mathbf{F}_e^e \delta\mathbf{x}^e + \mathbf{B}_\omega^e L(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \delta\boldsymbol{\sigma}_\omega + \mathbf{B}_\omega^e \delta\mathbf{b}_\omega + \mathbf{B}_f^e L(\widehat{\mathbf{f}}^b) \delta\boldsymbol{\sigma}_f + \mathbf{B}_f^e \delta\mathbf{b}_f + \mathbf{B}_e^e \boldsymbol{\xi}_\mu \tag{11.80}$$

La ecuación para los parámetros del modelo de calibración de la UMI es:

$$\delta\dot{\mathbf{p}}_i = \boldsymbol{\xi}_i; \quad \boldsymbol{\xi}_i \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_i) \tag{11.81}$$

En tanto que el modelo de las desviaciones de los parámetros de los observables GPS es:

$$\delta\dot{\mathbf{p}}_e = \begin{bmatrix} c\dot{\delta}\delta t_u \\ c\dot{\delta}D_u \\ \delta sp^1 \\ \vdots \\ \delta sp^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\delta D_u + \varepsilon_{tu} \\ \varepsilon_{Du} \\ \varepsilon_{s1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ss} \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{c} \varepsilon_{tu} \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_{tu}) \\ \varepsilon_{Du} \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_{Du}) \\ \varepsilon_{si} \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_{si}) \end{array} \tag{11.82}$$

Como se muestra en la Ec. (11.78), tal como en un ejemplo anterior, la presencia del brazo de palanca hace que las ecuaciones del error del estado cinemático (11.80) y la medición externa de Doppler compartan el mismo ruido aditivo $\boldsymbol{\xi}_\omega$ con lo cual los procesos $\delta\boldsymbol{\chi}_k$ y $\boldsymbol{\eta}_k$ no podrán considerarse independientes. Esto obliga una vez más a evaluar el término correctivo $\mathbf{R}_{\chi\eta}(t)$ en función de $\mathbf{R}_{\xi\eta} \neq 0$ tal como en las (11.52) y (11.53) e introducirlo en las ecuaciones del EKF: **(10.42)** a **(10.44)**.

Por lo demás, es un sencillo ejercicio que se deja al lector demostrar que a partir de las (11.80) a (11.82) se obtienen tanto la matriz de la dinámica del error del vector de

estado aumentado $\mathbf{A}(t)$ como la matriz $\mathbf{B}(t)$ de las Ecs. **(10.36)**. Las mismas serán luego usadas para el diseño del EKF.

Estimación *a posteriori* de las variables de navegación y los parámetros
Con los modelos de **H**, de la dinámica de las desviaciones y de las estadísticas de los ruidos, el procedimiento EKF permite determinar la ganancia de Kalman y con ésta la corrección del estado aumentado $\Delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}$ como en (11.55). Las variables de navegación se actualizan usando las Ecs. (11.56) a (11.58) y, finalmente, los parámetros instrumentales mediante:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}_i^+ &= \hat{\mathbf{p}}_i^- + \Delta\mathbf{p}_i \\ \hat{\mathbf{p}}_e^+ &= \hat{\mathbf{p}}_e^- + \Delta\mathbf{p}_e \end{aligned} \tag{11.83}$$

Importa desatacar que con la 1ª Ec. (11.83) se calibran los instrumentos inerciales y con la 2ª se estiman los errores de propagación y satelitales y, muy importante, se corrige el reloj del receptor, más aún se estima su deriva en el tiempo (ver Ec. (11.64).

11.6 Débilmente acoplado vs fuertemente acoplado

Si bien su complejidad es mayor, en términos de calidad de navegación la configuración fuertemente acoplada tiene grandes ventajas respecto de la débilmente acoplada. En efecto, la primera utiliza medidas generadas por el receptor sobre la constelación visible de la mayor calidad posible. En primer lugar, por que los residuos son los óptimos y, en segundo, porque todos los observables son medidas independientes con lo cual sus residuos también lo son. En cambio, la opción débilmente acoplada (llamada también INS-GPS-PV) usa estimados de P y V calculados por el receptor época por época ignorando la correlación temporal debida al movimiento del vehículo que es registrado por la UMI. A esto se agrega que la estimación de la posición puede estar fuertemente segada (ver discusión a continuación de la Ec. **(9.47)**) y basada en residuos de muy pobre calidad. El resultado es una reducción tanto en la calidad como en la cantidad y la tasa de información disponibles.

Otras características de gran importancia práctica de la configuración fuertemente acoplada tanto desde el punto de vista algorítmico como metodológico son: en primer lugar, como cada una de las 2*s* medidas (11.63) es independiente de las demás, el filtro de fusión (EKF o SPKF) puede procesarlas una a una como si procediesen de instrumentos independientes (de hecho lo son) aunque lleguen todas en el mismo instante. Esto reduce significativamente la dimensionalidad del cálculo y por ende la complejidad global del algoritmo. Más específicamente, véase la influencia de la dimensionalidad de $\mathbf{H}_{k+1}$ sobre: a) la actualización de la co-variancia a posteriori dada por las Ecs. **(10.45)** ó **(10.47)**, b) el cálculo de la ganancia K (Ec. **(10.44)**) y c) la actualización, a partir de la innovación, del estado aumentado (Ec. **(10.21)**). Otra ventaja de gran interés práctico (sobre todo en ambientes donde la visibilidad de la constelación puede ser variable o reducida (ej. cañones urbanos, maniobras con cambios rápidos y de gran amplitud en la orientación del vehículo, interferencia etc.) es que contrariamente a la configuración débilmente acoplada, esta configuración no requiere que el receptor tenga en todo momento 4 o más satélites adquiridos (salvo posiblemente al inicio de la navegación). En cambio, el algoritmo de navegación, siempre mejorará la

estimación disponible cada vez que el receptor procese y provea el pseudo-rango o Doppler de al menos un satélite.

Por último y no por esto menos significativo se destaca la importancia de posibilitar transferir al receptor el tiempo preciso GPS a partir de incluir en el vector de parámetros el sesgo del reloj del receptor.

11.7 Navegación relativa con fase diferencial

Una condición necesaria para la aplicación de las técnicas diferenciales a la navegación relativa entre dos o más vehículos es la existencia de un enlace de comunicaciones entre los vehículos con tiempos a bordo debidamente sincronizados. Cuando esta condición se cumpla y el vector distancia entre dos receptores satisfaga $|\mathbf{D}_{ur}| < 700m$, se podrá considerar el uso de observables de diferencias de fase dobles con residuos centimétricos lo cual posibilita, en principio, la estimación de las ambigüedades propias de todo observable de fase. Como se vio en el Párrafo 9.4 del Capítulo 9, con estos observables es potencialmente posible alcanzar la más alta precisión y exactitud disponibles en los sistemas de navegación GNSS. Las complejas técnicas numéricas de *real time kinematics* (RTK) introducidas en el Párrafo 9.4.3 son el único recurso que permite determinar "*época-por-época*" las ambigüedades de fase, sin embargo, como a continuación demostraremos, esto no es necesario cuando los mencionados observables forman parte de un esquema de navegación integrada en el cual las ecuaciones cinemáticas permiten correlacionar su estado actual con el de toda época pasada. Dentro de un tal esquema, las ambigüedades son consideradas parámetros a estimar del modelo de las medidas de dobles diferencias de fase. La configuración paramétrica del navegador se mantendrá en tanto cada pareja de receptores permanezca enganchada a un sub-conjunto común de satélites visibles de la constelación GNSS. Si bien el monitoreo de los satélites comunes y la consiguiente actualización del modelo son tareas que comparten el enfoque "navegación integrada" y el esquema RTK, este tema no será, sin embargo, objeto de este párrafo.

Consideramos como ejemplo una plataforma de referencia fija a la Tierra y un vehículo que se mueve en torno a la primera. Las posiciones de los centros de fase de las antenas de los receptores de referencia y a bordo del vehículo se expresan en las coordenadas terrestres $\{\mathbf{e}\}$, respectivamente, como $\mathbf{P}_r^e$ y $\mathbf{P}_v^e$. El interés de usar esta terna de navegación particularmente con medidas GNSS fue ya señalado en el Ejemplo 11.4. Se supondrá por simplicidad que el centro geométrico de la UMI coincide con $\mathbf{P}_v^e$.

Modelo de las de las ecuaciones cinemáticas

Para la navegación relativa, lo que interesa es la dinámica del vector $\mathbf{d}^e = \mathbf{P}_v^e - \mathbf{P}_r^e = [d_x\, d_y\, d_z]^T$ entre el vehículo y la referencia. Dado que esta última se supone fija a la Tierra, en este caso se tiene que $\mathbf{v}^e \triangleq \dot{\mathbf{d}}^e = \dot{\mathbf{P}}_v^e$. El dominio acotado de los desplazamientos ($|\mathbf{d}| \leq$700m) permite suponer, en primer lugar, que la gravedad abordo del vehículo es aproximadamente constante e igual a $\mathbf{g}^e = \mathbf{C}_g^e(\mathbf{P}_r)[0\ 0\ -\gamma(\mathbf{P}_r)]^T$ (ver, por ejemplo, la expresión **(4.48)**) y, en segundo, que su velocidad sea lo suficientemente reducida como para despreciar la fuerza de Coriolis.

Bajo las condiciones anteriores, las ecuaciones cinemáticas para $\mathbf{d}^e$ (ver Ecs. **(5.17)**) adoptan la forma reducida.

$$\begin{aligned} &a)\ \dot{\mathbf{d}}^e = \mathbf{v}^e && ;\mathbf{d}^e(t_0) = \mathbf{d}_0^e \sim N(\hat{\mathbf{d}}_0^e, \mathbf{P}_d(0)) \\ &b)\ \dot{\mathbf{v}}^e = \mathbf{C}_b^e\mathbf{f}^b + \mathbf{g}^e && ;\mathbf{v}^e(t_0) = \mathbf{v}_0^e \sim N(\hat{\mathbf{v}}_0^e, \mathbf{P}_v(0)) \\ &c)\ \dot{\mathbf{C}}_b^e = \mathbf{C}_b^e\mathbf{S}(\omega_{eb}^b) && ;\ \mathbf{C}_b^e(0) = \mathbf{C}_{b,0}^e = \exp(\mathbf{S}(-\theta_{eb}(0))) \end{aligned} \tag{11.84}$$

Donde $\theta_{eb}(t)$ es el ángulo de la rotación instantánea de la terna $\{\mathbf{b}\}$ a la $\{\mathbf{e}\}$ y además resulta: $\omega_{eb} = \omega_{ib} - \Omega_e$. Las Ecs. (11.84) pueden ser integradas mediante un algoritmo *strap-down* derivado del presentado en el Párrafo 7.2 del Capítulo 7.

Modelo de las desviaciones del estado cinemático

La pequeña rotación $\boldsymbol{\varphi}^e$ definida como el error angular sobre la terna "de llegada" del ángulo $\vartheta_{be}(t)$ permite escribir la diferencial de la MCD:

$$\delta\mathbf{C}_b^e = \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e)\mathbf{C}_b^e \Rightarrow \delta\mathbf{C}_e^b = -\mathbf{C}_e^b\mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e) \tag{11.85}$$

Perturbando las Ecs. (11.84), se obtienen:

$$\begin{aligned} &a)\ \delta\dot{\mathbf{d}}^e = \delta\mathbf{v}^e \\ &b)\ \delta\dot{\mathbf{v}}^e = \delta\mathbf{C}_b^e\mathbf{f}^b + \mathbf{C}_b^e\delta\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{g}^e = -\mathbf{S}(\mathbf{C}_b^e\mathbf{f}^b)\boldsymbol{\varphi}^e + \mathbf{C}_b^e\delta\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{g}^e \\ &c)\ \delta\dot{\mathbf{C}}_b^e = \delta\mathbf{C}_b^e\mathbf{S}(\omega_{eb}^b) + \mathbf{C}_b^e\mathbf{S}(\delta\omega_{eb}^b) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e)\mathbf{C}_b^e\mathbf{S}(\omega_{eb}^b) + \mathbf{C}_b^e\mathbf{S}(\delta\omega_{eb}^b) \end{aligned} \tag{11.86}$$

Donde $\delta\mathbf{f}^b$ es el error de medida de la fuerza específica y $\delta\mathbf{g}^e$ el desconocimiento de la gravedad. Por otro lado, evaluamos:

$$\frac{d\delta\mathbf{C}_b^e}{dt} == \mathbf{S}(\dot{\boldsymbol{\varphi}}^e)\mathbf{C}_b^e + \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e)\mathbf{C}_b^e\mathbf{S}(\omega_{eb}^b) \tag{11.87}$$

Luego de igualar las dos últimas ecuaciones y premultiplicarlas por $\mathbf{C}_e^b$ se obtiene la dinámica del error de alineamiento:

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}(\dot{\boldsymbol{\varphi}}^e) = \mathbf{C}_b^e\mathbf{S}(\delta\omega_{eb}^b)\mathbf{C}_e^b \Rightarrow \\ &\quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}^e = \mathbf{C}_b^e\delta\omega_{eb}^b \end{aligned} \tag{11.88}$$

Suponiendo conocimiento perfecto de Ω_e ($\delta\Omega_e = 0$) calculamos:

$$\begin{aligned} \delta\omega_{eb}^b &= \delta(\omega_{ib}^b - \omega_{ie}^b) = \delta\omega_{ib}^b - \delta\mathbf{C}_e^b\Omega_e \\ &= \delta\omega_{ib}^b + \mathbf{C}_e^b\mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e)\Omega_e = \delta\omega_{ib}^b - \mathbf{C}_e^b\mathbf{S}(\Omega_e)\boldsymbol{\varphi}^e \end{aligned} \tag{11.89}$$

Introduciendo la Ec. (11.89) en la Ec. (11.88), resulta la expresión del modelo del desalineamiento:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}^e = -\mathbf{S}(\Omega_e)\boldsymbol{\varphi}^e + \mathbf{C}_b^e \delta\omega_{ib}^b \tag{11.90}$$

Luego de las sustituciones apropiadas y combinando las Ecs. (11.86) a), b) y (11.90) se obtiene finalmente el modelo de las desviaciones del estado cinemático:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}^e = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^e \\ \delta\dot{\mathbf{v}}^e \\ \delta\dot{\mathbf{d}}^e \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{S}(\Omega_e) & 0 & 0 \\ -\mathbf{S}(\mathbf{C}_b^e\mathbf{f}^b) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}^e} \delta\mathbf{x}^e + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_b^e & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_b^e \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^e} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\ \delta\mathbf{f}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \delta\mathbf{g}^e \tag{11.91}$$

Modelo del sensor exoceptivo

Éste consiste en el modelo lineal **(9.82)** de las diferencias doble de fase, formulado en el Capítulo 9, que reproducimos a continuación:

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \overbrace{\begin{bmatrix} -(\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_v^2 - \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_v^1)^T \\ \vdots \\ -(\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_v^s - \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_v^1)^T \end{bmatrix}_{t_k}}^{\mathbf{G}_k} \begin{bmatrix} d_x(t_k) \\ d_y(t_k) \\ d_z(t_k) \end{bmatrix} + \mathbf{a} + \boldsymbol{\eta}_k; \quad \boldsymbol{\eta}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k) \tag{11.92}$$

Donde **G** es una matriz conocida en todo instante dependiente de la geometría de la constelación. Como se dijo, los residuos $\boldsymbol{\eta}_k$ de esta medida son de orden centimétrico cuando las ambigüedades, agrupadas en el vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{s-1}$, son consideradas parámetros del modelo de medidas exoceptivas. De este vector se supondrá conocida una estimación inicial al inicio de cada intervalo de tiempo en que los receptores comparten un conjunto dado de satélites en línea de vista. Al comienzo de la navegación podrá usarse un estimado obtenido a partir de las soluciones SPS en cada receptor.

Estado aumentado y modelo de sus desviaciones

La componente paramétrica del estado aumentado dependerá de la complejidad del modelo de la UMI adoptado (Ecs. (11.1)) y del número de satélites compartidos. Una vez más, para simplificar la presentación elegimos para el primero la representación (11.9). De este modo, el vector de las desviaciones del estado aumentado y su modelo resultan:

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\chi} &\triangleq \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}^e \\ \delta\mathbf{b} \\ \delta\mathbf{g}^e \\ \delta\mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}^e \\ \hline \delta\mathbf{p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{18+(s-1)} \Rightarrow \\ \delta\dot{\boldsymbol{\chi}} &= \mathbf{A}(t)\delta\boldsymbol{\chi} + \mathbf{B}(t)\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_\mu \\ \boldsymbol{\xi}_p \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.93}$$

$$\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{F}^e & \mathbf{B}^e & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\ \mathbf{B}(t)=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{B}^e & 0\\ \hline 0 & I\end{array}\right] \tag{11.94}$$

Modelo de las innovaciones.
Siguiendo la estructura general dada por la Ec. (11.2) se tiene:

$$\begin{aligned}&\delta\mathbf{y}_{k+1}=\mathbf{G}_{k+1}\delta\mathbf{d}^e_{k+1}+\delta\mathbf{a}+\boldsymbol{\eta}_{k+1}=\left[H_x\ \ H_b\ \ H_g\ \ H_a\right]_{k+1}\delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}+\boldsymbol{\eta}_{k+1}\\ &H_x=\left[\mathbf{G}\ \ 0\ \ 0\right];\ H_b=0;\ H_g=0;\ H_a=I;\end{aligned} \tag{11.95}$$

Estimados a posteriori.
A partir de la innovación y de la ganancia de Kalman calculadas para el instante t_{k+1}, tal como en la Ec. (11.27), se determina la corrección del estado aumentado:

$$\Delta\boldsymbol{\chi}_{k+1}=\left[(\boldsymbol{\varphi}^e)^T;(\Delta\mathbf{v}^e)^T;(\Delta\mathbf{d}^e)^T;\Delta\mathbf{b}^T;\Delta\mathbf{a}^T\right]^T_{k+1} \tag{11.96}$$

y con ella, tal como en las Ecs. (11.56) a (11.60), se actualizan las estimaciones *a posteriori*:

$$\begin{aligned}&\hat{\mathbf{d}}^{e+}=\hat{\mathbf{d}}^{e-}+\Delta\mathbf{d}^e\\ &\hat{\mathbf{v}}^{e+}=\hat{\mathbf{v}}^{e-}+\Delta\mathbf{v}^e\\ &\hat{\mathbf{b}}^{+}=\hat{\mathbf{b}}^{-}+\Delta\mathbf{b}\\ &\hat{\mathbf{a}}^{+}=\hat{\mathbf{a}}^{-}+\Delta\mathbf{a}\\ &\hat{\mathbf{C}}^{e+}_b=\exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e))\hat{\mathbf{C}}^{e-}_b\end{aligned} \tag{11.97}$$

11.8 Sistema de navegación para una plataforma SAR aerotransportada

Este párrafo tiene por objeto describir el desarrollo de un sistema de navegación para una aplicación específica enfatizando aspectos del diseño del HW de adquisición de datos y de los métodos usados para el análisis de la performance y la validación del sistema a partir de los datos experimentales.

Un sistema de adquisición SAR consiste de una antena de radar junto con la electrónica encargada de digitalizar y almacenar los ecos recibidos de los pulsos emitidos mientras la antena es transportada por una plataforma aérea o espacial. Los ecos de los pulsos son procesados coherentemente, con lo cual, el efecto resultante equivale a un arreglo de elementos radiantes de una antena virtual que puede llegar a ser cientos de veces más larga que la antena física y, por tanto, con una resolución proporcionalmente mayor. Lo sorprendente de esta tecnología es que, contrariamente a la observación óptica, la resolución espacial de una imagen SAR resulta independiente de la distancia entre la antena y la escena (Curlander/McDonough, (1991)). Gracias a ello es posible adquirir imágenes SAR de alta precisión a muy grandes distancias (p.e. desde una altura de 1000 Km en el caso de una plataforma satelital).

Otra notable característica de la observación remota SAR es que, en tanto que sistema activo, su operación no requiere de la iluminación de la escena, más aún, en gran medida la calidad de las imágenes es independiente de las condiciones atmosféricas, puesto que las nubes son transparentes para este tipo de radiación.

La correcta formación de las imágenes SAR requiere, sin embargo, conocer con cierta precisión la trayectoria de la plataforma que transporta la antena. Las plataformas satelitales poseen un movimiento muy predecible, sin embargo las plataformas aerotransportadas están sometidas a perturbaciones de origen atmosférico que impactan estocásticamente sobre la trayectoria alejando a éstas de las condiciones nominales supuestas por los algoritmos numéricos de procesamiento de los datos SAR. Cuando la trayectoria real es mal conocida, la imagen puede sufrir diversos tipos de distorsiones, siendo el más notorio el llamado *desenfoque* que consiste en la dificultad para discriminar fronteras entre zonas adyacentes de una misma escena, principalmente, en la dirección azimutal (ver Fig. 11.5). El resultado es un deterioro de la calidad de la imagen, especialmente en alta resolución.

Por esta razón, los procesadores SAR son normalmente asistidos por un sistema de navegación *ad-hoc* que permite determinar en tiempo diferido el estado cinemático de la plataforma durante la adquisición de datos. Las componentes del estado cinemático así reconstruidas alimentan al procedimiento de autoenfoque, llamado también de *control de movimiento,* acoplado al procesador SAR que genera la imagen. En los sistemas aerotransportados, la precisión del sistema de navegación determina en buena parte la calidad final de la imagen.

En este apartado se describe el sistema de navegación integrada INS/GPS/MAG desarrollado para la CONAE que asiste al procesamiento de los datos de una antena SAR en banda L aerotransportada (SAR-AT) a bordo de un avión Beachcraft B200. El SAR es de tipo longitudinal, es decir produce imágenes de una franja lateral terrestre paralela a la trayectoria aproximadamente rectilínea recorrida con velocidad casi uniforme por la plataforma aérea o satelital (ver Fig. 11.5).

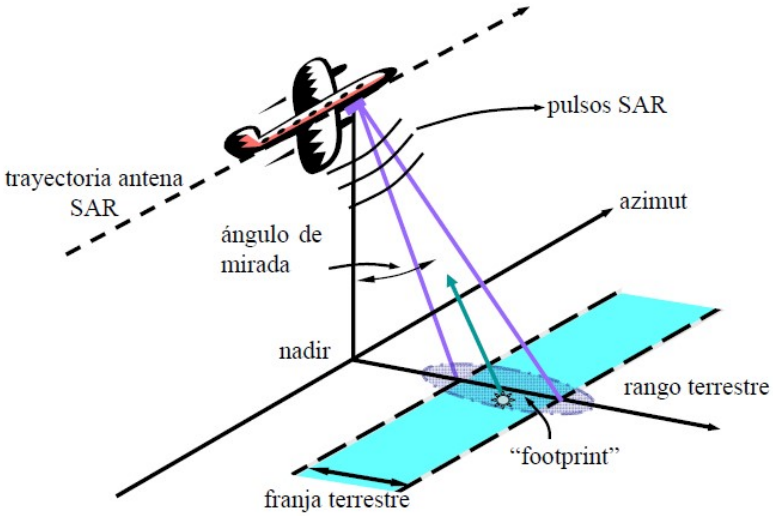


Figura 11.5: Esquema SAR aerotransportado

La reconstrucción de la trayectoria de una plataforma SAR la realiza usualmente un algoritmo de navegación integrada que fusiona datos provenientes de un receptor GPS y una UMI. Veremos el interés de incluir un magnetómetro como instrumento exoceptivo suplementario.

La temporización y sincronía entre los datos SAR y los datos de navegación es crucial en todo el procedimiento. Para esto, ambos conjuntos de medidas son etiquetadas por un único tiempo común abordo sincronizado con los pulsos PPS (*pulse per second*) provistos por el receptor GPS.

El esquema en bloques de la Fig. 11.6 ilustra el uso de un sistema de navegación en el procesamiento y enfoque de una imagen SAR. A este esquema responde el SAR aerotransportado (SARAT) de la CONAE.

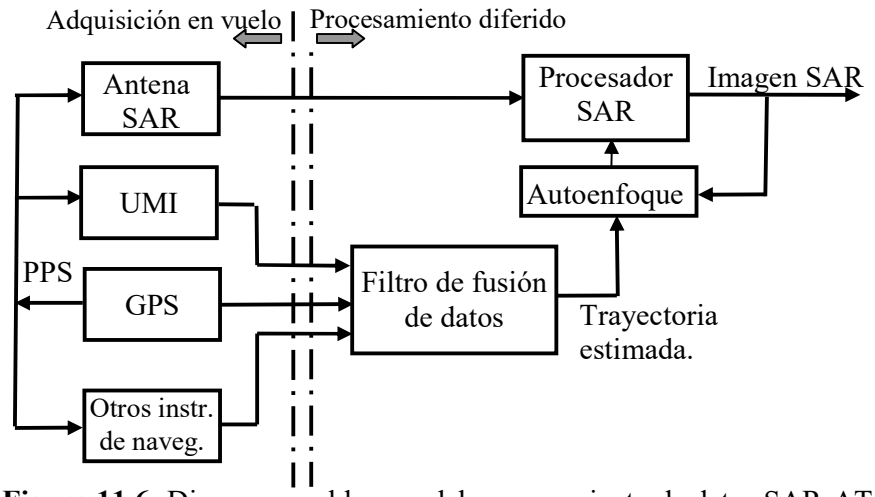


Figura 11.6: Diagrama en bloques del procesamiento de datos SAR-AT

A continuación describimos el sistema de navegación desarrollado por el grupo de electrónica del Instituto Argentino de Radioastronomía (UNLP-CONICET, Berazategui, Argentina) bajo convenio con la CONAE

Configuración de instrumentos de navegación:
1.- Unidad inercial *Motion Pack* de *Systron Donner* (SD/MP): UMI triaxial analógica MEMS (táctica), de 6 canales inerciales y sensor de temperatura interior. Para compensar los efectos de la temperatura se desarrolló un horno termo-estabilizado electrónicamente a 65 ±1ºC que alberga a la UMI durante su uso.

La calibración y caracterización estocástica de la unidad inercial SD, fue realizada a partir de datos experimentales adquiridos en el laboratorio de ensayos de la CONAE para distintas temperaturas de operación. Los datos fueron luego procesados con los algoritmos expuestos en G. Marinsek (2011) (ver Tablas 3.5 a 3.8 de Marinsek, (2011)) suponiendo un modelo como el de las Ecs. **(2.11)** y **(2.12)**. El algoritmo de navegación usa como valores nominales los parámetros determinados durante la calibración a una temperatura nominal de funcionamiento de 65ºC. La Tabla 7.1 muestra los desvíos estándar de algunos de esos parámetros que resultan del procedimiento. Estos desvíos fueron usados para probabilizar las desviaciones iniciales $\delta\mathbf{p}_i$ del modelo de las

desviaciones (11.1) ($\mathbf{P}_i(t_0)$ en la Ec. **(10.5)**). En la misma tabla se consignan las estadísticas de los ruidos, que más afectan a la unidad, caracterizados mediante el procedimiento de la Variancia de Allan descrito en los Párrafos 2.6 y 2.7 del Capítulo 2 de este volumen.

PARÁMETRO	**GIROS** X/Y	**GIRO** Z	**ACELS.** X/Y	**ACEL.** Z
Rango	100(º/s)	200(º/s)	10 (g)	15(g)
Error f/escala 1σ	<1,24x10^{-4}	<1,24x10^{-4}	<0.44 x10^{-4}	<0.6 x10^{-4}
Error sesgo 1σ	<0,24x10^{-2}(º/s)	<1x10^{-2} (º/s)	0,26x10^{-3} (m/seg^2)	0,4x10^{-3} (m/seg^2)
Error desalin. 1σ	<0,5 x10^{-3} rad	<2 x10^{-3} rad	<0.8 x10^{-4} rad	<1,2 x10^{-4} rad
Ancho de banda	75 Hz	75 Hz	900 Hz	900 Hz
BI	1.7 x10^{-3}(º/s)	4x10^{-3}(º/s)	7x10^{-4} (m/seg^2)	1.7x10^{-3} (m/seg^2)
ARW/VRW	7 x10^{-3} (º/√s)	4 x10^{-7} (º/√s)	1.7x10^{-4}ms$^{-3/2}$	3,2x10^{-4}ms$^{-3/2}$

Tabla 7.1: Parámetros de la UMI SD/MP

2.- Magnetómetro HMC6343 de Honeywell triaxial de estado sólido. Posee sensores magneto-resistivos, anisotrópicos de baja sensibilidad cruzada entre ejes integrado y un acelerómetro triaxial MEMS. El instrumento mide, a una tasa configurada a 10Hz, el rumbo de su eje principal proyectando el vector magnético sobre el plano horizontal local. Tanto la orientación del plano de montaje respecto de la vertical local como la del rumbo son determinadas por un algoritmo embebido en un microprocesador que usa las medidas acelerómetricas a modo de inclinómetro. Este modo de funcionamiento hace que sus medidas de rumbo no sean válidas durante movimientos acelerados del avión, por lo que sólo son tenidas en cuenta por el filtro con el avión en tierra o durante los tramos de vuelo casi uniforme. Si bien la exactitud del rumbo es de 2 a 3º, su repetibilidad es ≤0,3º y el ruido en el ancho de banda ≤0,1º rms. Esto constituye una precisión más que aceptable comparada con otros dispositivos miniaturizados. Una interfase de comunicación permite ingresar la declinación magnética local.

3.- Receptor GPS *Hemisphere Crescent* (EOM-Board): de 12 canales (puede seguir hasta 12 satélites simultáneamente) de bajo consumo con 20gr de peso, mide 7x4 cm, y provee datos P/V en terna ECEF a una tasa de 10Hz.

Sistema de adquisición de datos

Consiste en dos bloques, uno es la unidad central de manejo y almacenamiento de datos (UC) y el otro la unidad de digitalización de los datos inerciales generados por la UMI-S/D (UMI-D).

La unidad central (UC en la Fig. 11.7) consta de un bloque de control y manejo de datos desarrollado en base a un dispositivo de lógica programable (FPGA) que incluye un micro-procesador con sistema operativo Linux embebido. Dicho módulo maneja el bus de datos y valida todas las medidas antes de almacenarlas en memoria. La UC incluye, además, el magnetómetro, el receptor GPS, la interfaz de comunicaciones con la UMI-D

y un enlace de ethernet que permite al operador configurar y supervisar la adquisición desde una PC. La memoria tiene capacidad para almacenar hasta 10hs de medidas inerciales (a 100Hz), de PV del GPS (a 10Hz) y del *yaw* magnetométrico (a 10Hz). Toda esta información es pos-procesada por un algoritmo *ad-hoc* de navegación integrada como el indicado en la Fig. 11.6.

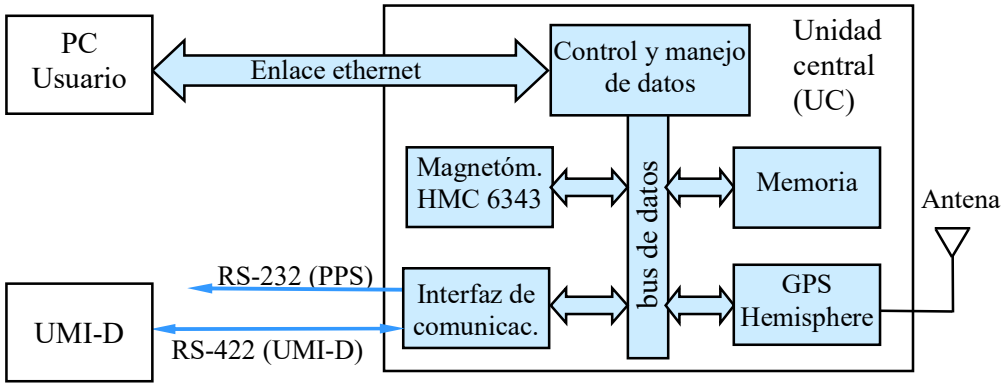


Figura 11.7: Arquitectura del sistema de adquisición de datos

El módulo UMI-D incluye el recinto termo-estatizado que alberga a la UMI, la electrónica de acondicionamiento térmico y la de digitalización de los datos. Esta última está compuesta por 6 canales inerciales (3 aceleraciones y 3 velocidades angulares) más otro de temperatura. El HW de los primeros 6 canales (ver Fig. 11.8) lo conforman un filtro antialias (FAA) de 600Hz, un ADC con datos de salida de 24 bits a 60Kbs y un módulo FPGA que: a) genera las magnitudes integrales $\Delta\alpha$, Δv con 16 bits (incluido el signo) a 100sps y b) comanda la comunicación serie de los datos hacia la UC a través de un canal RS-422.

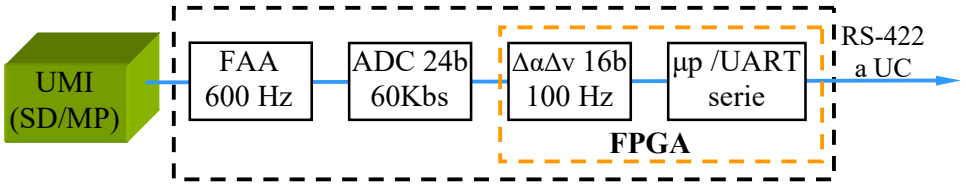


Figura 11.8: Electrónica de digitalización de la UMI/SD (UMI-D).

El flanco ascendente del pulso por segundo (PPS) del receptor GPS indica el inicio del segundo del sistema GPS. Con esta señal se etiquetan los datos del magnetómetro al interior de la UC. Accesible desde el exterior vía un canal RS232, la misma señal es usada para etiquetar las medidas inerciales digitales la UMI-D, para sincronizar la electrónica de generación de pulsos SAR y, finalmente, para temporizar los ecos.

11.8.1 Modelos de las desviaciones del estado y de las innovaciones

La reconstrucción de la trayectoria de la plataforma se realiza mediante un algoritmo de navegación integrada que procesa en tiempo diferido los datos almacenados en la UC. La terna de navegación usada es la ECEF con lo cual la ecuaciones de navegación resultan dados por las Ecs. **(5.17)** y el algoritmo *strap-down* el expuesto en el párrafo 7.2. El vector de las desviaciones del estado cinemático $\delta\mathbf{x}_e^e$, definido en la Ec. (11.40),

es solución de las Ecs. **(6.3)**. La integración con el GPS es del tipo débilmente acoplada, es decir, se usan los observables secundarios de posición y velocidad que calcula el receptor GPS en coordenadas ECEF.

Modelo perturbacional de los sensores inerciales

Dado que el procesamiento diferido de los datos permite liberar al algoritmo de navegación de las restricciones propias de las aplicaciones en tiempo real, se decidió privilegiar la precisión de la estimación a la intensidad de cómputo y adoptar el modelo general de la IMU expresado por la Ec. **(2.13)** con 2x(9+3)= 24 parámetros y cuya versión perturbacional esta dada por las Ecs. **(6.15)** y (11.1).

$$\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \\ \delta\mathbf{f}^{b} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{p_i}(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b}, \widehat{\mathbf{f}}^{b})\delta\mathbf{p}_i + \boldsymbol{\xi}_{\mu}; \quad \boldsymbol{\xi}_{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{\omega} \\ \boldsymbol{\xi}_{f} \end{bmatrix} \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_{\xi}) \qquad (11.98)$$
$$\delta\dot{\mathbf{p}}_i = \boldsymbol{\xi}_i; \quad \boldsymbol{\xi}_i(t) \sim N(0, \delta(t)\mathbf{Q}_i)$$

Modelos de las innovaciones.

Las innovaciones de las mediciones GPS de posición y velocidad en terna ECEF se modelan como sigue (ver definiciones en la (11.44)).

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{y}_k^{p} \\ \delta\mathbf{y}_k^{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{P}}^{e} - \mathbf{P}^{e} \\ \widehat{\mathbf{V}}^{e} - \mathbf{V}^{e} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} H_x^{p} & 0 \\ \hline H_x^{v} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_e^{e} \\ \delta\mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_p \\ \boldsymbol{\eta}_v \end{bmatrix}; \qquad (11.99)$$
$$H_x^{p} = \left[0 \mid 0_{3x3} \mid I_3\right] \in \mathbb{R}^{3x9}; \; H_x^{v} = \left[0 \mid I_3 \mid 0_{3x3}\right] \in \mathbb{R}^{3x9};$$

La formulación del modelo de la innovación de la medida magnetométrica del *yaw* ($\delta\mathbf{y}_k^{y}$) requiere mayor elaboración. Como modelo de esta medida adoptamos:

$$\widehat{\mathbf{y}}_k^{y} = \psi^{g} + dm(\mathbf{P}^{e}) + \delta dm + \eta_m \qquad (11.100)$$

en la cual, $dm(\mathbf{P}^{e})$ es el modelo (posiblemente tabulado) de la declinación magnética en función de la posición, δdm el error local del modelo y η_m el error de medición. Perturbando la anterior el modelo de la innovación resulta:

$$\delta\mathbf{y}_k^{y} = \delta\psi^{g} + \delta dm + \eta_m = H_x^{y}\delta\mathbf{x}_e^{e} + \delta dm + \eta_m \qquad (11.101)$$

En lo que sigue determinaremos la matriz H_x^{y}. Consideramos como punto de partida la Ec. **(6.43)** para *n=g,* que vincula el error angular de plataforma respecto de la terna geográfica (ENU) $\boldsymbol{\phi}^{g}$ con las desviaciones en *roll* ($\delta\varphi$), *pitch* ($\delta\theta$) y *yaw* ($\delta\psi^{g}$).

$$\begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta\theta \\ \delta\psi^{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{sen}(\psi^{g})/\cos(\theta) & -\cos(\psi^{g})/\cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\psi^{g}) & \mathrm{sen}(\psi^{g}) & 0 \\ -\mathrm{sen}(\psi^{g})\tan(\theta) & -\cos(\psi^{g})\tan(\theta) & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^{g} = \begin{bmatrix} N_{\varphi} \\ N_{\theta} \\ N_{\psi} \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^{g} \qquad (11.102)$$

Recordando las diferenciales matriciales **(6.20)**, **(6.28)** y **(6.39)**: $\delta\mathbf{C}_b^e = \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e)\mathbf{C}_b^e$, $\delta\mathbf{C}_e^g = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^g)\mathbf{C}_e^g$ $\delta\mathbf{C}_b^g = \mathbf{S}(\phi^g)\mathbf{C}_b^g$ que, para *n*=*g,* establecen, respectivamente, el error angular de plataforma: $\boldsymbol{\phi}^g$, el error angular $\boldsymbol{\varphi}^e$ y el error angular de posición $\delta\boldsymbol{\theta}^g$ evaluamos:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{C}_b^g &= \mathbf{S}(\phi^g)\mathbf{C}_b^g = \delta(\mathbf{C}_e^g\mathbf{C}_b^e)\\ &= \delta\mathbf{C}_e^g\mathbf{C}_b^e + \mathbf{C}_e^g\delta\mathbf{C}_b^e = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^g)\mathbf{C}_b^g + \mathbf{C}_e^g\mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e)\mathbf{C}_b^e\end{aligned} \tag{11.103}$$

De éstas se obtiene:

$$\begin{aligned}&\mathbf{S}(\phi^g) = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}^g) + \mathbf{C}_e^g\mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}^e)\mathbf{C}_g^e \Rightarrow\\ &\phi^g = \delta\boldsymbol{\theta}^g + \mathbf{C}_e^g\boldsymbol{\varphi}^e\end{aligned} \tag{11.104}$$

El siguiente paso consiste en expresar el error de posición angular $\delta\boldsymbol{\theta}^g$ en función del error de posición en coordenadas ECEF: $\delta\mathbf{x}_e^e$. Para esto, siguiendo el desarrollo de G. Castillo (2011), partimos de las siguientes expresiones establecidas en el Apéndice A de esa referencia (se indican al margen las ecuaciones de donde fueron extraídas):

$$\begin{aligned}&\text{(A.10): } \delta\lambda = -\frac{y^e}{r_{xy}^2}\delta x^e + \frac{x^e}{r_{xy}^2}\delta y^e\\ &\text{(A.16): } \delta\Phi = -\frac{x^e\operatorname{sen}(\Phi)\cos(\Phi)}{r_{xy}^2}\delta x^e - \frac{y^e\operatorname{sen}(\Phi)\cos(\Phi)}{r_{xy}^2}\delta y^e + \frac{\operatorname{sen}(\Phi)\cos(\Phi)}{z^e}\delta z^e\\ &\text{(A.23): } \delta h = \left[\frac{\cos(\Phi)}{r_{xy}} - \frac{\alpha(\Phi)}{r_{xy}^2}\right](x^e\delta x^e + y^e\delta y^e) + \left[\frac{\operatorname{sen}(\Phi)}{1-\varepsilon^2} - \frac{\alpha(\Phi)}{z^e}\right]\delta z^e\end{aligned} \tag{11.105}$$

Donde se usó: $r_{xy} \triangleq \sqrt{(x^e)^2 + (y^e)^2}$, $\delta\mathbf{P}^e = \left[\delta x^e\ \delta y^e\ \delta z^e\right]^T$, $\alpha(\Phi) \triangleq a\varepsilon^2\operatorname{sen}^2(\Phi)\cos^2(\Phi)$ con *a* el radio ecuatorial terrestre y ε la excentricidad del elipsoide normal (ver Cap. 4). Las anteriores se condensan en la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix}\delta\lambda\\ \delta\Phi\\ \delta h\end{bmatrix} = \mathbf{M}_{\lambda\Phi h}(\mathbf{P}^e)\begin{bmatrix}\delta x^e\\ \delta y^e\\ \delta z^e\end{bmatrix} = \mathbf{M}_{\lambda\Phi h}\delta\mathbf{P}^e \tag{11.106}$$

A continuación modificamos trivialmente la segunda expresión **(6.67)** y teniendo en cuenta la anterior, escribimos:

$$\delta\boldsymbol{\theta}^g = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ \cos\Phi & 0 & 0\\ \sin\Phi & 0 & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_\theta(\Phi)}\begin{bmatrix}\delta\lambda\\ \delta\Phi\\ \delta h\end{bmatrix} = \mathbf{N}_\theta(\Phi)\mathbf{M}_{\lambda\Phi h}(\mathbf{P}^e)\delta\mathbf{P}^e \tag{11.107}$$

Con lo cual, ϕ^g en (11.104) resulta:

$$\phi^g = \mathbf{C}_e^g \varphi^e + \mathbf{N}_\theta(\Phi)\mathbf{M}_{\lambda\Phi h}(\mathbf{P}^e)\delta\mathbf{P}^e \tag{11.108}$$

Finalmente, a partir de la (11.102) escribimos:

$$\delta\psi^g = N_\psi \phi^g = N_\psi \mathbf{C}_e^g \varphi^e + N_\psi \mathbf{N}_\theta(\Phi)\mathbf{M}_{\lambda\Phi h}(\mathbf{P}^e)\delta\mathbf{P}^e \tag{11.109}$$

Si ahora llamamos δdm al error en el conocimiento de la declinación magnética local, el modelo de la innovación de la medida del *yaw* se expresa como:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{y}_k^y &= \delta\psi_k^g + \delta dm + \eta_{y,k} \\ &= \begin{bmatrix} H_\varphi^y & H_V^y & H_P^y & H_{dm}^y \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \delta x_e^e \\ \delta dm \end{bmatrix} + \eta_{y,k}; \quad \eta_{y,k} \sim N(0, \mathbf{Q}_y)\end{aligned} \tag{11.110}$$

Con las sub-matrices en (11.110) dadas por:

$$H_\varphi^y = N_\psi \mathbf{C}_e^g;\ H_P^y = N_\psi \mathbf{N}_\theta(\Phi)\mathbf{M}_{\lambda\Phi h}(\mathbf{P}^e);\ H_V^y = 0; H_{dm}^y = I \tag{11.111}$$

11.8.2 Resultados experimentales

A continuación se presentan y analizan los resultados de la navegación integrada obtenidos para vuelos del Beachcraft B200 realizados durante 2011 con la configuración instrumental descrita más arriba. Inicialmente se muestran resultados de la fusión de datos UMI(S/D)-GPS sin usar magnetómetro.

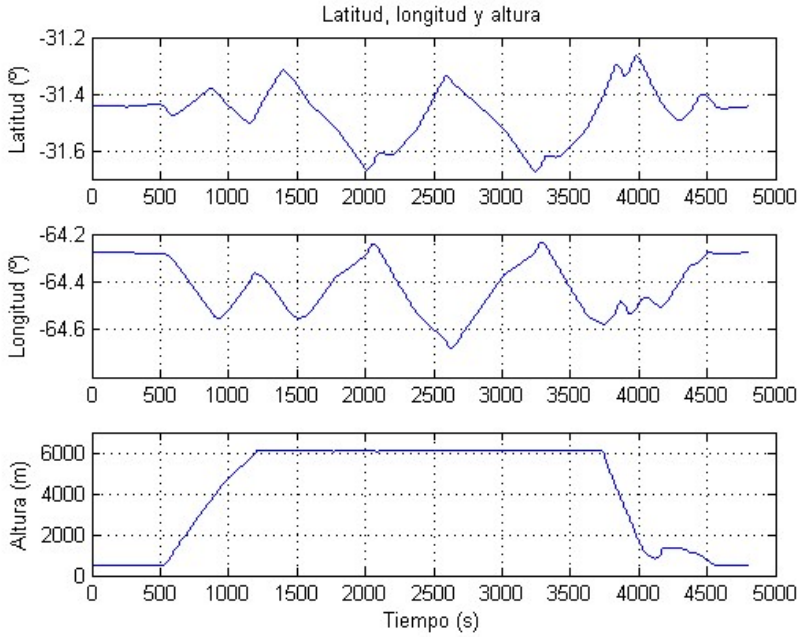


Figura 11.9: Reconstrucción de la trayectoria del avión en coordenadas curvilíneas con datos UMI/SD + GPS.

Una trayectoria típica comienza con el avión inmóvil cercano al hangar, continúa con su desplazamiento hacia la cabecera de pista (~10min), luego el carreteo que dura unos 11seg. y a continuación la maniobra de despegue. Una vez adquirida la altura de

operación (~20min), se inicia la misión SAR, la cual comporta vuelos rectilíneos, uniformes y nivelados sobre tramos pre-establecidos por la programación de la adquisición SAR. Concluida la misión, siguen las maniobras de descenso y aterrizaje.

La Fig. 11.9 muestra la reconstrucción de la trayectoria en coordenadas curvilíneas terrestres, en tanto que la Fig. 11.10 representa la proyección de la misma trayectoria sobre el plano horizontal local. Una ampliación de esta última figura cerca del aeropuerto permitiría observar los desplazamientos hacia y desde el hangar cercano a la pista del aeropuerto. En el perfil de altura de la primera figura se advierte el ascenso y vuelo en la altura de operación (6000m en este caso), luego el descenso y el aterrizaje.
Las adquisiciones SAR ocurren al interior de los segmentos de vuelo que exhiben una variación lineal en latitud y en longitud y que se corresponden con trazos aproximadamente rectilíneos en la Fig. 11.10.

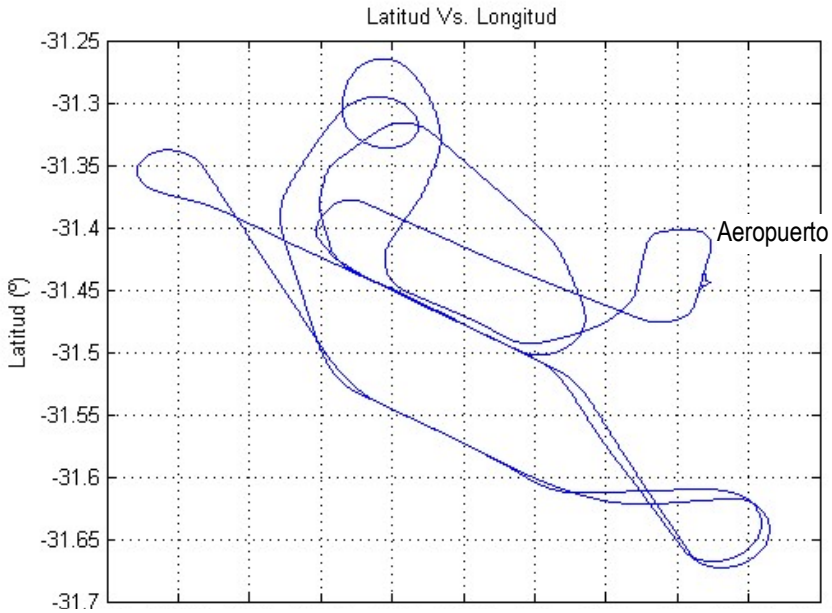


Figura 11.10: Trayectoria del avión proyectada sobre el plano horizontal local con datos UMI/SD + GPS.

La Fig. 11.11 muestra la orientación del vehículo que calcula el SW de navegación, en ángulos de Euler *yaw*, *pitch* y *roll* respecto de la terna geográfica local. El *yaw* se representa módulo 180º. Típico en vuelos "coordinados", las variaciones positivas y negativas en *pitch* se corresponden con los ascensos y descensos del avión, en tanto que los giros o cambios en *yaw* se correlacionan con variaciones en el ángulo de *roll* o guiñada.

Nótese en particular el viraje en pleno ascenso que el avión realiza desde el rumbo (aprox.) -150º a (aprox.) -60º. Esta maniobra se ejecuta durante los primeros 2 minutos del despegue manteniendo el *pitch* en unos 15º y el *roll* de unos 20º. Una vez alcanzada la altura de operación es posible visualizar tramos de adquisición SAR caracterizados por un perfil de *yaw* aproximadamente constante.

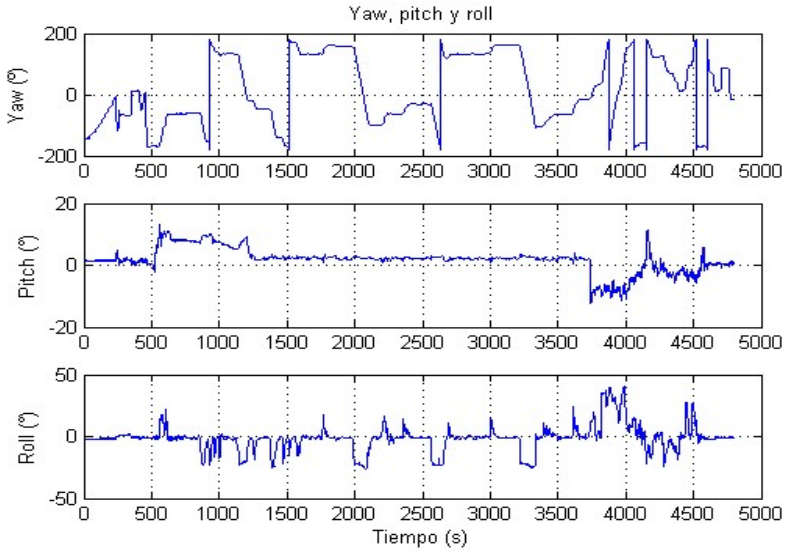


Figura 11.11: Orientación en vuelo respecto de la terna geográfica local con datos UMI/SD + GPS.

De acuerdo con lo expuesto al final del sub-Capítulo 10.3, usamos como herramientas de diagnóstico del funcionamiento del filtro la función de auto-correlación de las innovaciones de las medidas exoceptivas: posición y velocidad GPS. Las gráficas de la Fig. 11.12 permiten constatar el carácter casi impulsivo de dichas funciones alrededor del cero. Sólo se muestra la componente Z dado que las otras exhiben un comportamiento similar (por el resto ver Catillo, (2011)).

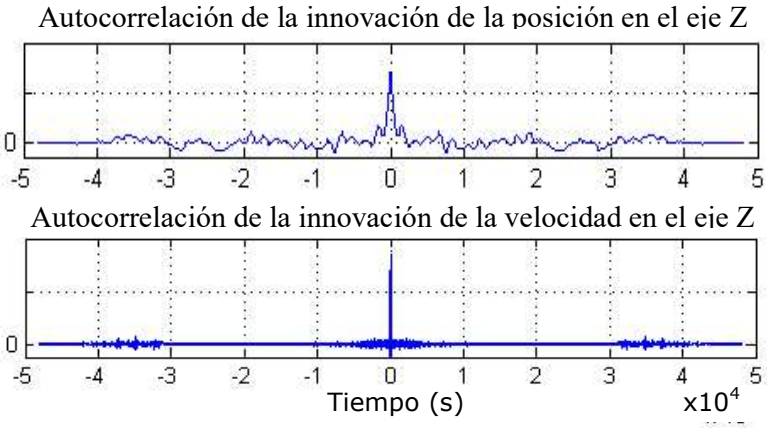


Figura 11.12: Auto-correlaciones de las innovaciones de las medidas GPS de posición y velocidad según el eje Z (ECEF).

La Fig. 11.13 muestra la evolución del proceso de las innovaciones de posición (a) y de velocidad (b) de las medias GPS junto con sus cotas "2σ" (95%), siendo σ^2 el correspondiente elemento de la diagonal de la matriz de covariancias $\mathbf{P}_y(k)$ evaluada mediante la Ec. **(10.42)**. La comparación entre ambas curvas permite advertir una variancia teórica en exceso conservativa para la posición y mejor ajustada para la velocidad. Esta constatación a posteriori pudo haber sido utilizada para mejorar la

sintonía del filtro. En todo caso, ambos resultados demuestran la consistencia estadística de las covariancias teóricas determinadas por el EKF.

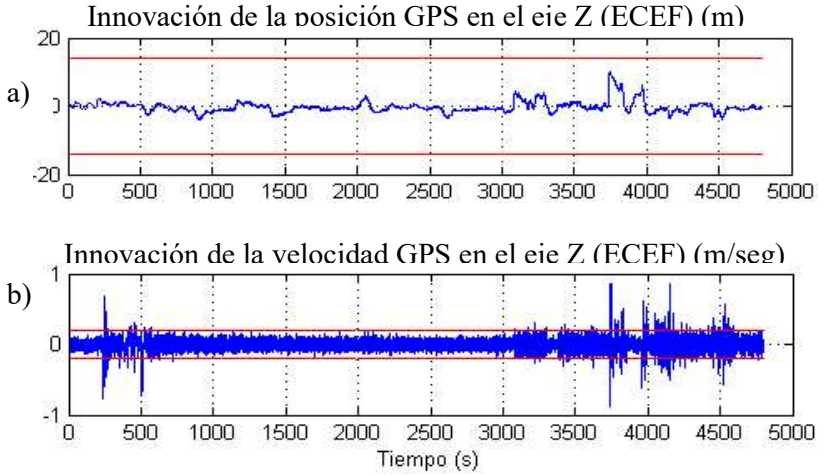


Figura 11.13: Innovaciones de las medidas GPS de posición y velocidad según el eje Z (ECEF) comparadas con sus cotas teóricas de 2σ.

En la Fig. 11.14 se expone la evolución de los desvíos estándar teóricos de los ángulos de Euler estimados al inicio de un vuelo. Se observa que cuando el vehículo está quieto, la acción de la gravedad *g* (medida por los acelerómetros) es suficiente para reducir la incerteza inicial en *roll* y en *pitch,* en tanto que la incerteza del *yaw* crece monótonamente.

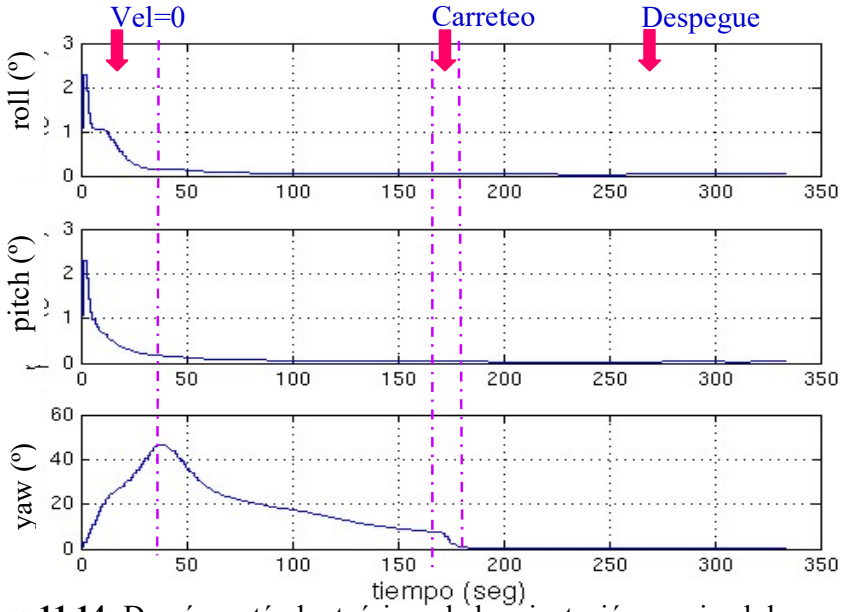


Figura 11.14: Desvíos estándar teóricos de la orientación previo al despegue.

Esto último se debe a que siendo el la UMI-SD de calidad a penas táctica, resulta incapaz de medir la rotación angular terrestre, por lo tanto, no hay aporte de información del *yaw* del avión mientras éste permanece inmóvil. Al mismo, tiempo, las perturbaciones hacen que la incertidumbre de ese parámetro crezca indefinidamente. El crecimiento se revierte suavemente cuando el vehículo inicia su desplazamiento hacia la

cabecera de pista. La razón: la información aportada por el GPS revela la dirección de su movimiento y, por tanto, el azimut hacia el que apunta la nariz del avión. Al momento de iniciarse el carreteo sobreviene una drástica reducción de la incertidumbre en el *yaw* debido a que ahora, una componente importante de la aceleración apunta en la dirección de la nariz lo que incrementa, a través de los acelerómetros, la información disponible en *yaw* y *pitch*. De este modo, en apenas 11segs., el filtro reduce y equipara las incertidumbres de esos 2 ángulos de Euler.

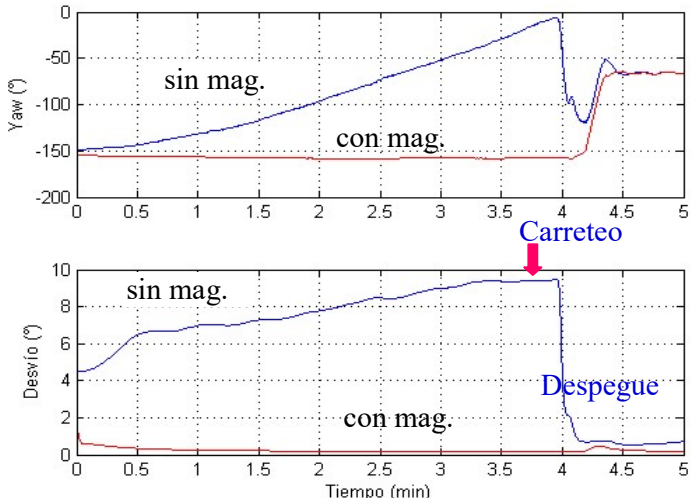


Figura 11.15: Perfil del *yaw* y de su desvío estándar en torno al carreteo (rojo: con mag., azul: sin mag.).

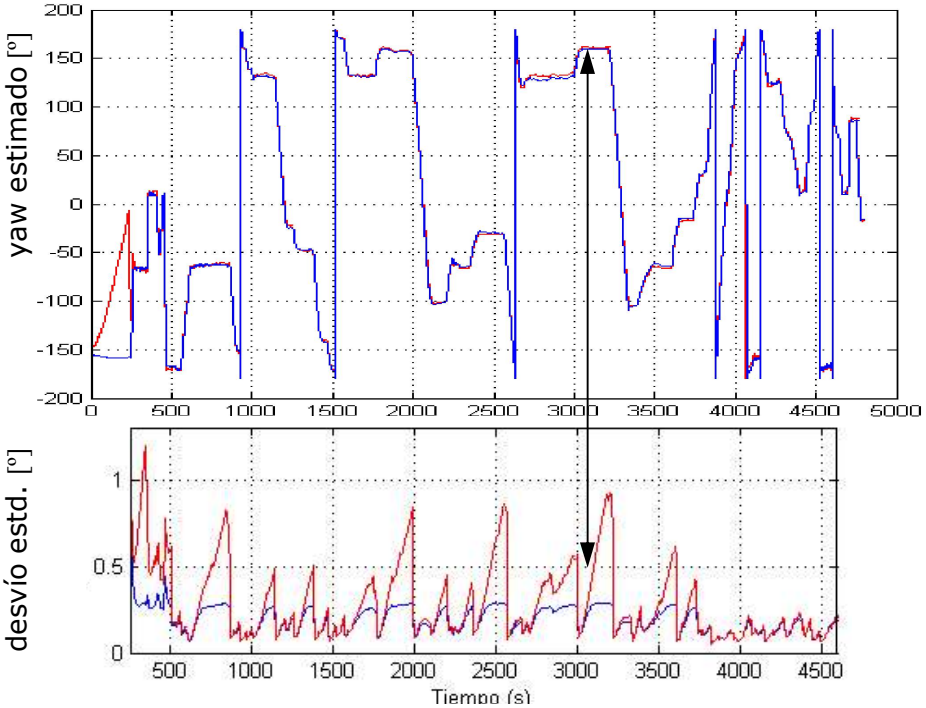


Figura 11.16: Perfil del *yaw* y de su desvío estándar a lo largo del vuelo para las configuraciones con y sin magnetómetro (azul: con mag., rojo: sin mag.).

En lo que sigue se ilustran los efectos de incluir el magnetómetro. La Fig. 11.15 compara los perfiles del *yaw* y su desvío estándar teórico para las configuraciones con y sin magnetómetro* durante un intervalo de tiempo que comprende: a) 4 min. con el avión parado en cabecera de pista, b) el carreteo y c) los primeros instantes del despegue y ascenso. Como era de esperarse, el magnetómetro suprime el crecimiento de la incerteza sobre el *yaw* previo al carreteo. Ambas estimaciones convergen durante el despegue mientras el avión vira alrededor de 100º hacia la derecha. Al final de la gráfica, se observa la persistente mayor precisión de la estimación del *yaw* con la configuración que incluye al magnetómetro.

La Fig. 11.16 compara las estimaciones del *yaw* para ambas configuraciones (con y sin magnetómetro) durante todo el vuelo. Además de la pronunciada divergencia durante los primeros 4 minutos ya referida, se observan diferencias durante los tramos de vuelo uniforme en que la configuración sin magnetómetro pierde calidad de información. Esto explica las fuertes divergencias entre ambos desvíos estándar teóricos en dichos tramos ilustradas en el gráfico de la parte inferior de la figura.

Lo anterior permite concluir que, precisamente durante los tramos de adquisición SAR, el magnetómetro aporta una importante mejora a la calidad de navegación.

Navegación INS-GPS sin calibración de la UMI-SD

La calibración en vuelo de la unidad inercial requiere alta intensidad de cómputo y complejidad del algoritmo y de los métodos de validación del SW. En vista de esto, a continuación se evalúa la performance del sistema de navegación sin calibrar de la UMI, es decir congelando el modelo nominal (11.9) provisto por el fabricante o bien identificado por los métodos del Capítulo 2. Como medida de performance, la Fig. 11.17 muestra la función de autocorrelación de las innovaciones de posición y velocidad GPS de la configuración IMU/SD-GPS sin calibración. Comparando con la Fig. 11.12 se advierte claramente el deterioro de la performance del filtro.

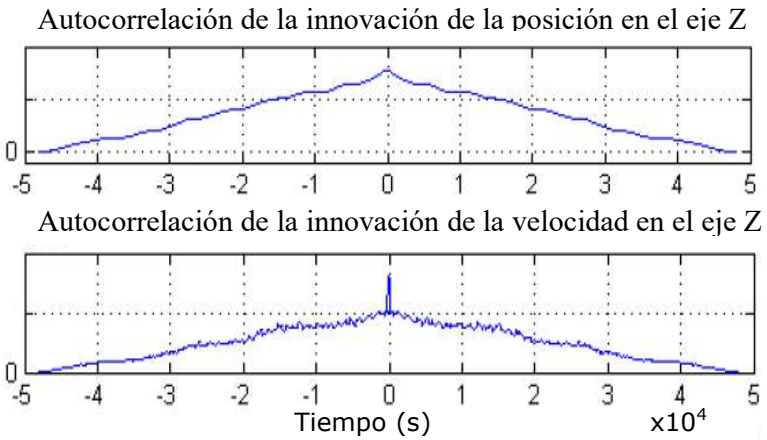


Figura 11.17: Autocorrelaciones de las innovaciones de las medidas GPS de posición y velocidad según el eje Z (ECEF) (sin calibración de UMI-SD).

*Los datos del magnetómetro sólo se usan hasta el inicio del carreteo.

Completando el análisis, la Fig. 11.18, muestra la evolución de las innovaciones en posición y velocidad del GPS junto con su intervalo de confianza teórico del 95%. De la comparación de esta última figura con la Fig. 11.13, constatamos, en primer lugar, un importante incremento en la magnitud de las innovaciones lo que refleja la dificultad del filtro de predecir la medida exoceptiva y, en segundo lugar, que la evolución del proceso se mantiene sistemáticamente fuera de su intervalo de confianza teórico. Se concluye así sobre la necesidad de calibrar la UMI-SD con datos de vuelo.

Comparación con instrumentación inercial de alta performance

Durante la experimentación en vuelo del sistema de navegación también se registraron datos inerciales con una unidad inercial *iNAV-FJI fiber optic gyro* (de clase navegación) montada sobre el avión. La diferencia más notable con la unidad UMI-SD (de clase táctica) son los giróscopos de tecnología IFOG de muy alta performance de la primera. En la Tabla 7.2 se consignan los principales parámetros para su comparación con los indicados en la Tabla 7.1 par la UMI/SD.

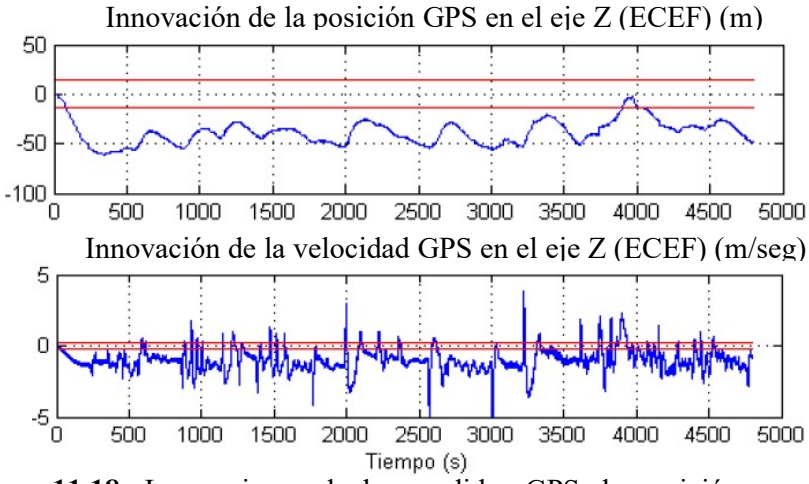


Figura 11.18: Innovaciones de las medidas GPS de posición y velocidad según el eje Z (ECEF) comparadas con sus cotas teóricas de 2σ (sin calibración de UMI-SD).

PARÁMETRO	GIROS	ACELS.
Rango	100(º/s)	10 (g)
Error f/escala	50ppm	100ppm
Error de alin. 1σ	$<10^{-4}$ rad	$<10^{-4}$ rad
Ancho de banda	500 Hz	500 Hz
BI	$<10^{-6}$(º/s)	$<5x10^{-5}$ (m/seg^2)
ARW/VRW	$1,6x10^{-5}$ (º/√s)	$8x10^{-5}ms^{-3/2}$

Tabla 7.2: Parámetros de la unidad inercial IFOG: *iNAV-FJI.*

Las Fig. 11.19 y 11.20 muestran la evolución de las innovaciones en posición y velocidad del GPS junto con su intervalo de confianza teórico del 95%, respectivamente, para los casos sin y con calibración de la unidad inercial *iNAV-FJI*.

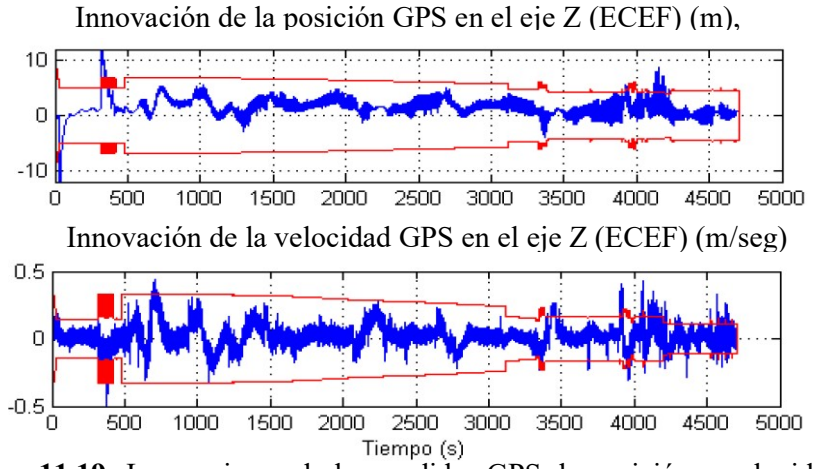


Figura 11.19: Innovaciones de las medidas GPS de posición y velocidad en el eje Z (ECEF) comparadas con sus cotas teóricas de 2σ (sin calibración de UMI *iNAV-FJI*).

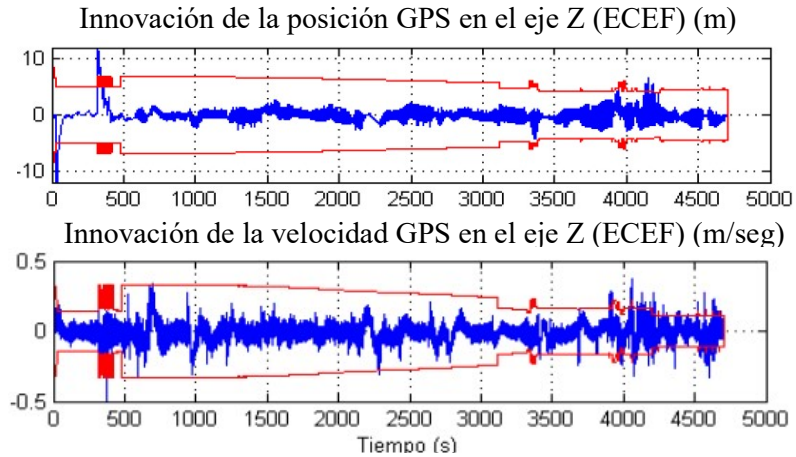


Figura 11.20: Innovaciones de las medidas GPS de posición y velocidad en el eje Z (ECEF) comparadas con sus cotas teóricas de 2σ (con calibración de UMI *iNAV-FJI*).

Comparando ambos registros, sólo se advierte una ligera reducción en la potencia del proceso de innovación en el segundo caso y al mismo tiempo un desplazamiento de su valor medio hacia el valor nulo, más acorde con lo esperado para un proceso de innovación. El escaso aporte de la calibración en línea observado en ese caso es consecuencia de la gran estabilidad de los parámetros de esta UMI de clase navegación. Podrá afirmarse entonces que una reducción en la calidad (y el costo) de la instrumentación inercial puede, en parte, ser compensada con un aumento en la intensidad del cálculo. De este modo, cuando la aplicación involucre una gran cantidad de unidades podría preferirse asumir el costo del desarrollo, la puesta a punto y la validación del SW de algoritmos de navegación más complejos, inversamente, cuando

se requieran sólo algunas pocas unidades la decisión podrá ser de usar instrumentación inercial de mayor calidad.

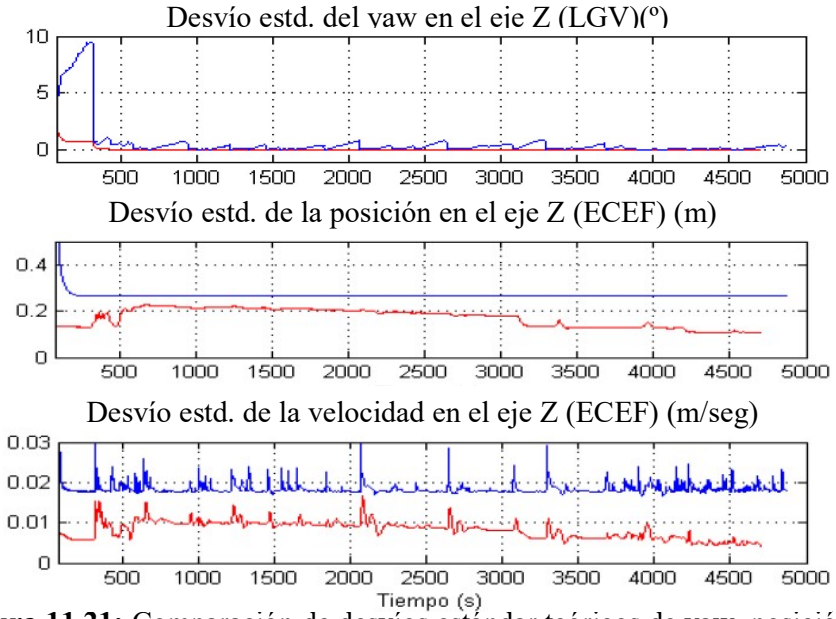


Figura 11.21: Comparación de desvíos estándar teóricos de yaw, posición y velocidad con calibración de *iNAV-FJI* (rojo) y de SD (azul).

En la Fig. 11.21 se comparan las performances de la navegación integrada sin usar magnetómetro con calibración de ambas unidades inerciales. Interesa destacar que a pesar de que los errores en la medición de posición GPS sean métricos, en ambos casos el filtrado hace que la imprecisión teórica de la posición resulte decimétrica.

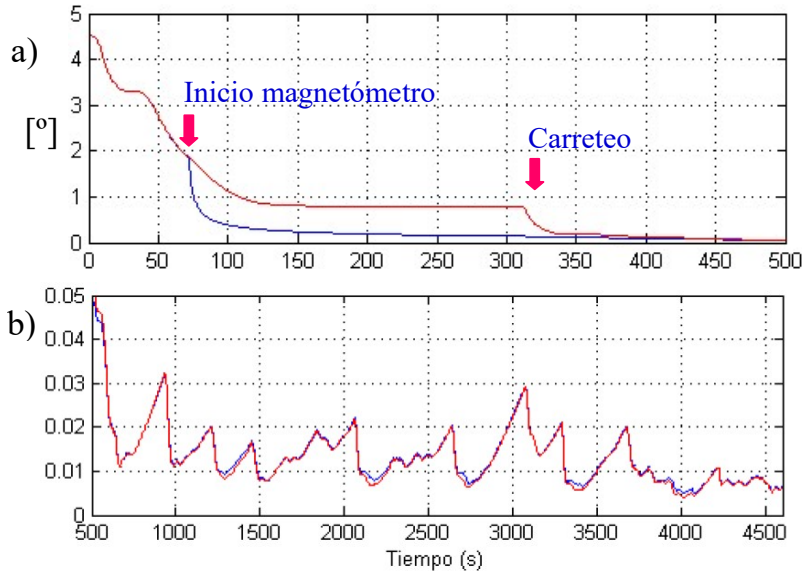


Figura 11.22: Desvío estándar teórico del *yaw* usando la unidad de *iNAV-FJI* con (azul) y sin (rojo) magnetómetro.

Como es de esperar, para los registros de las tres variables elegidas, la imprecisión teórica a lo largo de todo el vuelo es sensiblemente mayor cuando se usa la unidad *iNAV-FJI* que con la SD. El comportamiento resulta similar para el resto de las variables (ver Castillo, 2011). En el perfil correspondiente a la SD de la primera gráfica, se observa el deterioro, ya comentado, en la precisión del *yaw* durante los minutos en que el avión permanece inmóvil. En cambio, durante el mismo lapso, el desvío estándar del *yaw* decrece cuando se usa la unidad *iNAV-FJI.* Esto se debe a que el sistema de navegación gana información del *yaw* gracias a que la alta resolución de esta unidad le permite medir con precisión la velocidad angular terrestre.

En la Fig. 11.22 se estudia el efecto de incluir o no el magnetómetro en la configuración instrumental con la unidad *iNAV-FJI.* La ampliación del inicio del vuelo en la gráfica a) (compararla con la Fig. 11.15) permite apreciar que el magnetómetro aporta desde el su inclusión información útil que complementa a la que surge de medir la velocidad angular terrestre reduciendo, en consecuencia, considerablemente la imprecisión en la estimación del *yaw.* La nueva información aportada por el GPS durante el carreteo equipara finalmente la precisión entre ambas estimaciones.

En cambio, la gráfica b) (compararla con la Fig. 11.16) muestra que, ya en vuelo, el magnetómetro no aporta sustantivamente a la calidad de la navegación ni siquiera en los tramos críticos de vuelo uniforme. Importa destacar que el desvío estándar del *yaw* que resulta en este caso es casi un orden de magnitud inferior al obtenido usando la SD con el magnetómetro.

Como ya se indicó, la buena performance demostrada por la configuración con la unidad *iNAV-FJI* se explica por su alta resolución que aporta información del *yaw* aún en los tramos de vuelo uniforme. Pero, sumado a esto, la excelente estabilidad de sus parámetros hace que una vez calibrados (al principio del vuelo incluido el carreteo) éstos no requieran casi recalibración durante el vuelo preservando la alta performance aún en los tramos en que la trayectoria no aportaría información relevante sobre esos parámetros (ver discusión sobre reconstructibilidad y observabilidad en Carrizo/España/Giribet, 2014).

Consistencia relativa de las estimaciones

El hecho de disponer sobre la misma serie de vuelos de dos calidades muy dispares de unidades inerciales motiva a preguntarse en que sentido las estimaciones provenientes de ambas configuraciones son consistentes entre sí. Como la variable más crítica resulta ser el *yaw* durante los intervalos de vuelo uniforme, este caso fue usado como testigo. En la Fig. 11.23 se grafican, para ambas configuraciones, los intervalos de confianza alrededor de los estimados del yaw en tramos de vuelo casi uniforme. En rojo se representan los resultados con la SD y en azul los correspondientes con la *iNAV-FJI* (la separación entre las cotas para esta última configuración es a penas perceptible en la escala elegida). Se advierte en todos los casos que el intervalo de confianza de la estimación de mayor precisión queda totalmente contenido en el correspondiente a la de menor precisión. Si bien este resultado no podría considerarse como una validación experimental del desempeño adecuado de ambos diseños de sistemas de navegación, sí demuestra la consistencia relativa entre ambas configuraciones.

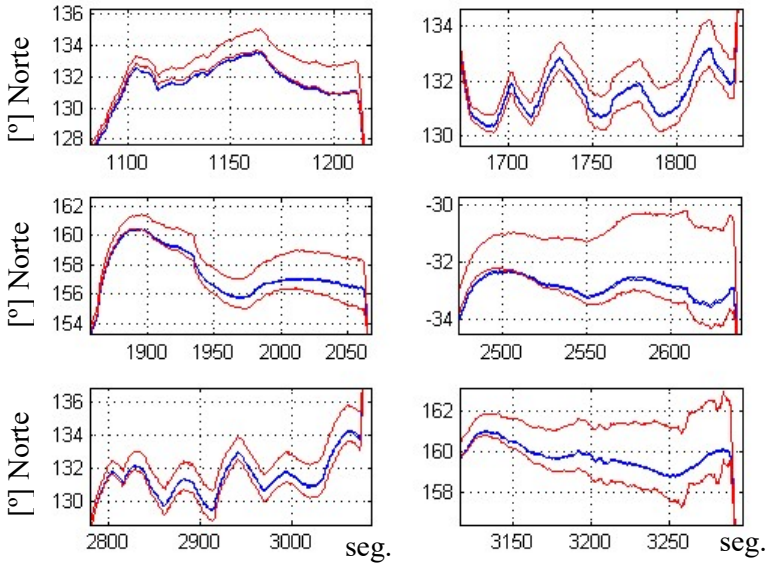


Figura 11.23: Intervalos de confianza para el yaw con SD(rojo) e *iNAV-FJI* (azul) en tramos de vuelo nivelado.

Conclusiones

En lo que respecta a fusión INS-GPS se demostró que cuando la unidad inercial es de calidad táctica su pobre estabilidad paramétrica exige complejizar el algoritmo de modo de incluir la calibración en tiempo real de la unidad. Cuando la unidad sea de clase navegación, ese requerimiento podría obviarse aunque la performance global siempre se vera mejorada en caso de aplicarlo. Más aún, la calibración en tiempo real sumado a la alta estabilidad paramétrica que caracteriza a estas unidades asegura un excelente desempeño, aún en los tramos en que la dinámica del vehículo torna inobservable muchos de sus parámetros. Esto se vio claramente en los intervalos de vuelo uniforme del avión en los cuales el desvío estándar teórico del *yaw* diverge significativamente con la UMI-SD. En este último caso, la inclusión de un magnetómetro deviene crucial para estimar adecuadamente la orientación del avión en cualquier régimen de vuelo, en cambio, cuando la UMI es de clase navegación su aporte resulta casi irrelevante. La razón es que una UMI de esta clase puede medir con precisión la velocidad angular terrestre y por tanto obtener información de *yaw* a partir de ello. Se demostró además que si bien el magnetómetro mejora la performance de la Systron Donner, el desvío estándar teórico del *yaw* se mantiene un orden de magnitud superior al que resulta de usar la *iNAV-FJI*, aún sin magnetómetro.

Por último, La posibilidad de registrar datos inerciales con dos UMI de clases diferente permitió validar por comparación la consistencia estadística en las salidas del sistema desarrollado.

Apéndice A
Modelo del Potencial Gravitacional Terrestre

El potencial gravitacional *V(P)* en un punto *P* del espacio $\mathbb{E}^3$ está descrito por la ecuación de Poisson:

$$\Delta V(P) = -4\pi G\rho(P) \tag{A.1}$$

donde Δ indica el operador laplaciano, G la constante de gravitación universal y ρ la densidad de masa en el punto considerado. Cuando *P* es exterior a la corteza terrestre $\rho(P) = 0$ (despreciando la densidad de la atmósfera) y la ecuación de Poisson se reduce a la ecuación de Laplace:

$$\Delta V(P) = 0 \tag{A.2}$$

Consideremos la esfera S_a de radio *a* centrada en el centro de gravedad terrestre que contiene al volumen que ocupa la Tierra. Cuando el potencial gravitacional sobre la superficie de S_a es usado como condición de borde, las soluciones de la (A.2) describen el potencial gravitacional terrestre exterior a dicha esfera. La condición de borde constituye la única información física requerida por el modelo. Por razones que apreciaremos más adelante convendrá introducir el potencial gravitacional terrestre normalizado:

$$\bar{V}(P) \triangleq \frac{a}{GM_T} V(P) \tag{A.3}$$

siendo M_T la masa nominal de la Tierra. Claramente, $\bar{V}(P)$ también satisface (A.2) para los puntos exteriores a la esfera de radio *a*.

Vista la simetría, lo más natural es adoptar coordenadas esféricas geocéntricas (ver Párrafo 4.2.2) para las cuales el laplaciano (A.2) se escribe como:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \cos\Phi_c}\frac{\partial}{\partial \Phi_c}\left(\cos\Phi_c \frac{\partial \bar{V}}{\partial \Phi_c}\right) + \frac{1}{r^2 \cos^2\Phi_c}\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \lambda^2} = 0 \tag{A.4}$$

Ensayamos en la Ec. (A.4) una solución hipotética del tipo:

$$\bar{V}(r, \Phi_c, \lambda) = R(r)Y(\Phi_c, \lambda);\ r \geq a\,, \tag{A.5}$$

que permite separar en factores la dependencia radial de la dependencia angular de las soluciones. Los factores de la (A.5) satisfacen, respectivamente, las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=K \tag{A.6}$$

$$\frac{1}{Y\cos\Phi_c}\frac{\partial}{\partial\Phi_c}\left(\cos\Phi_c\frac{\partial Y}{\partial\Phi_c}\right)+\frac{1}{Y\cos^2\Phi_c}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2}=-K \tag{A.7}$$

siendo K una constante arbitraria llamada de separación. Como se comprueba fácilmente por sustitución, las soluciones de (A.6) requieren que sea K= n(n+1) y resultan de dos tipos:

$$R(r)=\begin{cases} r^{-(n+1)} \\ r^n \end{cases};\quad 0\le n \tag{A.8}$$

Veremos más adelante que n debe ser un entero positivo. Dado que las soluciones r^n contemplan efectos de masa a grandes distancias exteriores al volumen de cualquier esfera de radio finito, el modelo gravitacional debido exclusivamente a la masa terrestre sólo incluye soluciones del tipo $r^{-(n+1)}$.

Por otra parte, las soluciones $Y(\Phi_c,\lambda)$ de (A.7) pueden obtenerse separando nuevamente la solución en factores de tal modo que sustituyendo $Y(\Phi_c,\lambda)=F(\Phi_c)L(\lambda)$ en (A.7) e introduciendo una nueva constante de separación M se obtiene, por un lado, la ecuación para la función de la longitud:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2}+ML=0 \tag{A.9}$$

y por otro la correspondiente a la latitud:

$$\frac{1}{\cos\Phi_c}\frac{\partial}{\partial\Phi_c}\left(\cos\Phi_c\frac{\partial F}{\partial\Phi_c}\right)+\left(n(n+1)-\frac{M}{\cos^2\Phi_c}\right)F=0 \tag{A.10}$$

La condición de continuidad de las soluciones en longitud de (A.9) sobre la esfera, i.e.: $L(\lambda)=L(\lambda+2\pi)$ impone que $\sqrt{M}=m$ entero, por lo que sus soluciones resultan:

$$\cos(m\lambda),\ \mathrm{sen}(m\lambda);\ \forall m \text{ entero} \tag{A.11}$$

Para $M=m^2$, la ecuación de la latitud (A.10) es la llamada *ecuación asociada de Legendre* en coordenadas polares. Introduciendo el cambio de variables $x=\mathrm{sen}(\Phi_c)$, que transforma: $[-\pi/2,\pi/2]\rightarrow[-1,1]$ y usando la relación válida para toda función $G(\Phi_c)$:

$$\frac{dG}{d\Phi_c}=\cos(\Phi_c)\frac{dG(\Phi_c(x))}{dx}$$

la Ec. (A.10) se rescribe según su forma clásica en función de la coordenada lineal x como:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)F=0 \qquad \text{(A.12)}$$

Las únicas soluciones acotadas de la ecuación asociada (A.12) en el intervalo $x \in [-1,1]$ ($\Phi_c \in [-\pi/2,\pi/2]$) resultan ser para n y m enteros tales que $n \geq m \geq 0$. Estas soluciones son llamadas *funciones asociadas de Legendre* y pueden generarse mediante la formula de Rodrigues (Wahr, 1999; Arfken/Weber, 1995):

$$F(x)=P_{n,m}(x)=\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n;\ n \geq m \geq 0 \qquad \text{(A.13)}$$

Donde los enteros n y m son respectivamente *el orden y el grado* de $P_{n,m}[-1,1] :\rightarrow [-1,1]$

<u>A.1 Propiedades de las funciones asociadas de Legendre (Arfken/Weber, 1995)</u>

Las funciones asociadas de Legendre incluyen a los *polinomios de Legendre* de orden n para m=0 generados mediante:

$$P_{n,0}(x)=P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad \text{(A.14)}$$

Paridad/imparidad respecto del origen:

$$P_{n,m}(-x)=(-1)^{n+m}P_{n,m}(x) \qquad \text{(A.15)}$$

Cambio de signo del grado m:

$$P_{n,(-m)}(x)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_{n,m}(x) \qquad \text{(A.16)}$$

Condición de los extremos:

$$\begin{aligned} &P_{n,m}(\pm 1)=0;\ \ m \neq 0 \\ &P_n(\pm 1)=(\pm 1)^n \end{aligned} \qquad \text{(A.17)}$$

Relaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned} &2(n+1)xP_{n,m}=(n+m)P_{n-1,m}+(n-m+1)P_{n+1,m} \\ &2(n+1)(1-x^2)^{1/2}P_{n,m}=P_{n+1,m+1}-P_{n-1,m-1} \end{aligned} \qquad \text{(A.18)}$$

A continuación introducimos los polinomios y las funciones de Legendre normalizados, (ambos soluciones de la Ec. (A.13)), respectivamente:

$$\overline{P}_n(x) \triangleq \sqrt{(2n+1)}P_n(x),$$
$$\overline{P}_{n,m}(x) \triangleq \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}}P_{n,m}(x) \tag{A.19}$$

Es posible demostrar que los polinomios de Legendre normalizados conforman una base ortonormal del espacio de Hilbert $L^2[-1,1]$ y que las funciones generalizadas de Legendre son ortonormales en [-1,1], es decir:

$$\langle \overline{P}_{n,m}, \overline{P}_{l,m} \rangle \triangleq \int_{-1}^{1} \overline{P}_{n,m}(x)\overline{P}_{l,m}(x)dx = \delta_{n,l};\ n,l \geq m \tag{A.20}$$

O en coordenadas polares sobre el círculo (x=sen(Φ_c)):

$$\langle \overline{P}_{n,m}, \overline{P}_{l,m} \rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{P}_{n,m}(\mathrm{sen}(\Phi_c))\overline{P}_{l,m}(\mathrm{sen}(\Phi_c))\cos(\Phi_c)d\Phi_c = \delta_{n,l};\ n,l \geq m \tag{A.21}$$

De las definiciones (A.13), (A.14) y (A.19) resultan las primeras funciones de Legendre normalizadas para x=sen(ϕ):

$$\begin{aligned}
&\overline{P}_{0,0}(\mathrm{sen}(\phi)) = 1 &&;\quad \overline{P}_{1,1}(\mathrm{sen}(\phi)) = \sqrt{3}\cos(\phi)\\
&\overline{P}_{1,0}(\mathrm{sen}(\phi)) = \sqrt{3}\mathrm{sen}(\phi) &&;\quad \overline{P}_{2,1}(\mathrm{sen}(\phi)) = \sqrt{15}\cos(\phi)\mathrm{sen}(\phi)\\
&\overline{P}_{2,0}(\mathrm{sen}(\phi)) = \sqrt{\frac{5}{4}}\left(3\mathrm{sen}(\phi)^2 - 1\right); &&\quad \overline{P}_{2,2}(\mathrm{sen}(\phi)) = \sqrt{\frac{15}{4}}\cos(\phi)^2
\end{aligned} \tag{A.22}$$

A.2 Funciones Armónicas Esféricas

Con base en lo anterior definimos como *funciones armónicas esféricas* sobre $[-\pi/2, \pi/2]\times[0, 2\pi]$, $n \geq m$ al siguiente conjunto de soluciones de la parte angular del laplaciano (A.7):

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{n,m}(\Phi_c, \lambda) &\triangleq \overline{P}_{n,m}(\mathrm{sen}(\Phi_c))\cos(m\lambda)\\
\mathcal{S}_{n,m}(\Phi_c, \lambda) &\triangleq \overline{P}_{n,m}(\mathrm{sen}(\Phi_c))\mathrm{sen}(m\lambda)
\end{aligned} \tag{A.23}$$

A partir de las definiciones (A.23) y usando la propiedad (A.21) es posible comprobar la ortogonalidad del conjunto de las funciones armónicas esféricas según el siguiente producto escalar definido sobre la esfera unitaria:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{C}_{n,m}, \mathcal{C}_{k,l} \rangle &\triangleq \iint_{S_1} \mathcal{C}_{n,m}(\phi,\beta)\mathcal{C}_{k,l}(\phi,\beta)ds \\
&= \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{C}_{n,m}(\phi,\beta)\mathcal{C}_{k,l}(\phi,\beta)\cos(\phi)d\phi = 4\pi\delta_{n,k}\delta_{m,l} \\
\langle \mathcal{S}_{n,m}, \mathcal{S}_{k,l} \rangle &\triangleq \iint_{S_1} \mathcal{S}_{n,m}(\phi,\beta)\mathcal{S}_{k,l}(\phi,\beta)ds \\
&= \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{S}_{n,m}(\phi,\beta)\mathcal{S}_{k,l}(\Phi,\lambda)\cos(\phi)d\phi = 4\pi\delta_{n,k}\delta_{m,l} \\
\langle \mathcal{S}_{n,m}, \mathcal{C}_{k,l} \rangle &= 0;\ \forall n,m,k,l
\end{aligned}
\tag{A.24}
$$

En las cuales $ds = \cos(\phi)d\phi d\beta$ constituye el diferencial de superficie de la esfera unitaria S_1 y $\delta_{n,k}$ es el "delta" de Kronecker. Pero, el aspecto de mayor importancia que hereda el conjunto de estas funciones de las funciones de Legendre y de las funciones trigonométricas es que constituye una base completa de las funciones definidas sobre S_1 (Arfken/Weber, 1995). De este modo, toda función $Y(\Phi_c,\lambda):[-\pi/2,\pi/2]\times[0,2\pi]\rightarrow\mathbb{R}$ "suficientemente continua" (no necesariamente continua en todas partes) puede expandirse mediante la siguiente doble sumatoria de funciones armónicas esféricas llamada serie de Laplace:

$$
Y(\Phi_c,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[C_{n,m}\mathcal{C}_{n,m}(\Phi_c,\lambda) + S_{n,m}\mathcal{S}_{n,m}(\Phi_c,\lambda)\right] \tag{A.25}
$$

Donde, gracias a la ortogonalidad de las funciones armónicas esféricas, los coeficientes $C_{n,m}$ y $S_{n,m}$ se calculan mediante:

$$
\begin{aligned}
C_{n,m} &= \frac{1}{4\pi}\langle Y, \mathcal{C}_{n,m}\rangle = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} Y(\phi,\beta)\mathcal{C}_{n,m}(\phi,\beta)ds \\
S_{n,m} &= \frac{1}{4\pi}\langle Y, \mathcal{S}_{n,m}\rangle = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} Y(\phi,\beta)\mathcal{S}_{n,m}(\phi,\beta)ds
\end{aligned}
\tag{A.26}
$$

En particular para $m=0$ y según las Ecs. (A.19) se tiene $\forall\ n\geq 0$:

$$
\begin{aligned}
C_{n,0} &= \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} Y(\phi,\beta)\overline{P}_n(sen(\phi))ds \\
S_{n,0} &= 0
\end{aligned}
\tag{A.27}
$$

A.3 El Potencial Gravitacional

Cuando la función (A.25) describe el potencial normalizado sobre la esfera S_a mencionada más arriba, i.e.: $Y(\Phi_c,\lambda) = \overline{V}(a,\Phi_c,\lambda)$, el potencial gravitacional en los puntos situados a una distancia $r\geq a$ del centro de gravedad terrestre corresponde a la

solución del llamado problema de Dirichlet y resulta de las (A.25), (A.5) y la 1ª de las (A.8):

$$\bar{V}(r,\Phi_c,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}\left[C_{n,m}\mathcal{C}_{n,m}(\Phi_c,\lambda)+S_{n,m}\mathcal{S}_{n,m}(\Phi_c,\lambda)\right] \tag{A.28}$$

En efecto: en primer lugar, la serie (A.28) es claramente convergente para $r\geq a$ dado que su *mayorante* (A.25) lo es; en segundo lugar, $\bar{V}(r,\Phi_c,\lambda)$ cumple la condición de borde: $\bar{V}(r,\Phi_c,\lambda)\big|_{r=a}=Y(\Phi_c,\lambda)$ y en tercer lugar, de acuerdo con (A.5) y la primera de las (A.8), cada término de la serie convergente (A.28) satisface la ecuación (A.4) la cual, dada la linealidad del operador laplaciano, también es satisfecha por $\bar{V}(r,\Phi_c,\lambda)$ (y por $V(r,\Phi_c,\lambda)$).

Junto con la (A.3) y las (A.27), la expansión en armónicos esféricos de $V(r,\Phi_c,\lambda)$ para $r\geq a$ resulta en consecuencia:

$$\begin{aligned}V(r,\Phi_c,\lambda)&=\frac{GM_T}{a}\bar{V}(r,\Phi_c,\lambda)=\\&=\frac{GM_T}{r}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\left\{C_{n,0}\bar{P}_n(\mathrm{sen}\Phi_c)+\sum_{m=1}^{n}\bar{P}_{n,m}(\mathrm{sen}\Phi_c)\left[C_{n,m}\cos(m\lambda)+S_{n,m}\mathrm{sen}(m\lambda)\right]\right\}\right\}\end{aligned} \tag{A.29}$$

Usando la integral volumétrica de Poisson es posible (ver Hofmann-Wellenhof/ Moritz, 2006) transformar las integrales de superficie (A.26) en las siguientes integrales volumétricas:

$$\begin{aligned}C_{n,m}&=\frac{1}{(2n+1)M_T}\iiint_{Tierra}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\mathcal{C}_{n,m}(\phi,\beta)dm\\S_{n,m}&=\frac{1}{(2n+1)M_T}\iiint_{Tierra}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\mathcal{S}_{n,m}(\phi,\beta)dm\end{aligned} \tag{A.30}$$

En las cuales $dm=\rho(r,\phi,\beta)dv$ es el elemento de masa de la Tierra ubicado en el punto de coordenadas esféricas (r,ϕ,β) y $dv=r^2\cos\phi drd\phi d\beta$ el correspondiente elemento de volumen con densidad $\rho(r,\phi,\beta)$.

Las Ecs. (A.30) permiten visualizar el significado geométrico de los primeros coeficientes $C_{n,m}$ *y* $S_{n,m}$. Usando las (A.23) y las (A.22) obtenemos las siguientes expresiones en coordenadas cartesianas de los primeros integrandos de las Ecs. (A.30).

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C}_{0,0} = 1; \quad \mathcal{S}_{0,0} = 0, \; r\mathcal{S}_{1,0} = 0 \\
&r\mathcal{C}_{1,0}(\phi,\beta) = \sqrt{3}r\,\mathrm{sen}(\phi) = \sqrt{3}z \\
&r\mathcal{C}_{1,1}(\phi,\beta) = \sqrt{3}r\cos(\phi)\cos(\beta) = \sqrt{3}x \\
&r\mathcal{S}_{1,1}(\phi,\beta) = \sqrt{3}r\cos(\phi)\mathrm{sen}(\beta) = \sqrt{3}y \\
&r^2\mathcal{C}_{2,1}(\phi,\beta) = \sqrt{15}r^2\cos(\phi)\mathrm{sen}(\phi)\cos(\beta) = \sqrt{15}zx \\
&r^2\mathcal{S}_{2,1}(\phi,\beta) = \sqrt{15}r^2\cos(\phi)\mathrm{sen}(\phi)\mathrm{sen}(\beta) = \sqrt{15}zy
\end{aligned}
\tag{A.31}
$$

De las anteriores resulta en primer lugar que $A_{0,0} = 1$ y además que los siguientes momentos de 1º orden son nulos cuando el centro de coordenadas coincide con el centro de masa de la Tierra

$$
C_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{3}aM_T}\iiint_{Tierra} zdm; \; C_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{3}aM_T}\iiint_{Tierra} xdm; \; S_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{3}aM_T}\iiint_{Tierra} ydm \tag{A.32}
$$

Por otra parte, dado que el eje z nominal de la Tierra coincide con el eje que maximiza su momento de inercia respecto de él, los siguientes momentos cruzados también son nulos.

$$
C_{2,1} = \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{1}{M_T}\iiint_{Tierra} zxdm; \; S_{2,1} = \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{1}{M_T}\iiint_{Tierra} zydm \tag{A.33}
$$

El resultado es la siguiente expresión para la expansión (A.29):

$$
\begin{aligned}
&V(r,\Phi_c,\lambda) = \\
&= \frac{GM_T}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \left\{C_{n,0}\overline{P}_n(\mathrm{sen}(\Phi_c)) + \sum_{m=2}^{n}\overline{P}_{n,m}(\mathrm{sen}\Phi_c)\left[C_{n,m}\cos(m\lambda) + S_{n,m}\mathrm{sen}(m\lambda)\right]\right\}\right\}
\end{aligned}
\tag{A.34}
$$

Apéndice B
Matriz Jacobiana
de la Aproximación J2

A continuación se indican las expresiones analíticas de los coeficientes de la matriz jacobiana para la aproximación J_2 de la gravedad normal:

$$\gamma^e_{J_2} = \boldsymbol{\gamma}^e_{gJ_2}(\mathbf{P}^e) + \boldsymbol{\gamma}^e_c(\mathbf{P}^e) = -\frac{GM_T}{r^3}\begin{bmatrix} (1+\frac{3J_2a^2}{2r^2}-\frac{15J_2a^2}{2r^2}(z/r)^2)x \\ (1+\frac{3J_2a^2}{2r^2}-\frac{15J_2a^2}{2r^2}(z/r)^2)y \\ (1+\frac{9J_2a^2}{2r^2}-\frac{15J_2a^2}{2r^2}(z/r)^2)z \end{bmatrix} + \Omega^2\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(B.1)}$$

Cuya matriz jacobiana se expresa según:

$$\mathbf{J}_{J_2}(\mathbf{P}^e) = \partial\boldsymbol{\gamma}^e_{J_2}/\partial\mathbf{P}^e = \partial\boldsymbol{\gamma}^e_{gJ_2}/\partial\mathbf{P}^e + \partial\boldsymbol{\gamma}^e_c/\partial\mathbf{P}^e = \mathbf{J}_g(\mathbf{P}^e) + \mathbf{J}_c(\mathbf{P}^e) \quad \text{(B.2)}$$

Con:

$$\mathbf{J}_c(x,y,z) = \boldsymbol{\Omega}^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(B.3)}$$

Las entradas de la matriz $\mathbf{J}_g(\mathbf{P}^e) = \mathbf{J}_g(x,y,z)$ están dadas por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_g(1,1) &= \frac{GM_T}{r^3}\left[1-\frac{3x^2}{r^2}+\frac{3J_2a^2}{2r^2}(1-\frac{5x^2}{r^2})-\frac{15J_2a^2z^2}{2r^4}(1-\frac{7x^2}{r^2})\right] \\
\mathbf{J}_g(2,2) &= \frac{GM_T}{r^3}\left[1-\frac{3y^2}{r^2}+\frac{3J_2a^2}{2r^2}(1-\frac{5y^2}{r^2})-\frac{15J_2a^2z^2}{2r^4}(1-\frac{7y^2}{r^2})\right] \\
\mathbf{J}_g(3,3) &= \frac{GM_T}{r^3}\left[1-\frac{3z^2}{r^2}+\frac{9J_2a^2}{2r^2}(1-\frac{5z^2}{r^2})-\frac{15J_2a^2z^2}{2r^4}(3-\frac{7z^2}{r^2})\right] \\
\mathbf{J}_g(1,2) &= \frac{GM_T}{r^3}\left[-\frac{3xy}{r^2}-\frac{15J_2a^2xy}{2r^4}+\frac{105J_2a^2xyz^2}{2r^6}\right] \\
\mathbf{J}_g(1,3) &= \frac{GM_T}{r^3}\left[-\frac{3xz}{r^2}-\frac{15J_2a^2xz}{2r^4}-\frac{15J_2a^2xz}{2r^4}(2-\frac{7z^2}{r^2})\right] \\
\mathbf{J}_g(2,1) &= \frac{GM_T}{r^3}\left[-\frac{3xy}{r^2}-\frac{15J_2a^2xy}{2r^4}+\frac{105J_2a^2xyz^2}{2r^6}\right] \\
\mathbf{J}_g(2,3) &= \frac{GM_T}{r^3}\left[-\frac{3yz}{r^2}-\frac{15J_2a^2yz}{2r^4}-\frac{15J_2a^2yz}{2r^4}(2-\frac{7z^2}{r^2})\right]
\end{aligned} \quad \text{(B.4)}$$

$$\mathbf{J}_g(3,1) = \frac{1}{r^3}\left[-\frac{3xz}{r^2} - \frac{45J_2a^2xz}{2r^4} + \frac{105J_2a^2xz^3}{2r^6}\right]$$
$$\mathbf{J}_g(3,2) = \frac{1}{r^3}\left[-\frac{3yz}{r^2} - \frac{45J_2a^2yz}{2r^4} + \frac{105J_2a^2yz^3}{2r^6}\right] \tag{B.5}$$

Apéndice C
Momentos de 1º y 2º orden de Procesos Estocásticos Continuos Lineales

Sea un proceso markoviano que responde al siguiente modelo de estado lineal variante en el tiempo para $t>t_0$:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\chi} + \mathbf{B}(t)\boldsymbol{\xi};\ \boldsymbol{\chi} \in \mathbb{R}^n; \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m \tag{C.1}$$

Donde $\boldsymbol{\chi}(t_0)$ es un vector aleatorio de valor esperado $\hat{\boldsymbol{\chi}}(t_0)$ y covariancia:

$$\mathbf{P}_0 \triangleq E\left\{(\boldsymbol{\chi}(t_0) - \hat{\boldsymbol{\chi}}(t_0))(\boldsymbol{\chi}(t_0) - \hat{\boldsymbol{\chi}}(t_0))^T\right\} \tag{C.2}$$

Por su parte el ruido continuo $\boldsymbol{\xi}(t)$ es supuesto centrado e independiente con densidad espectral $\mathbf{Q}(t)$ y covariancia $\delta(t)\mathbf{Q}(t)$ donde $\delta(t)$ es el delta de Dirac que satisface:

$$\int_{t^-}^{t^+} \delta(t)\mathbf{Q}(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathbf{Q}(\tau)d\tau = \mathbf{Q}(t) \tag{C.3}$$

De la Ec. (C.1) y las características de $\boldsymbol{\xi}(t)$ surge que $\hat{\boldsymbol{\chi}}(t) = E\left\{\boldsymbol{\chi}(t)\right\}$ para $t \geqslant t_0$ es la solución de la siguiente Ec. homogénea:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\chi}}} = \mathbf{A}(t)\hat{\boldsymbol{\chi}};\ \ \hat{\boldsymbol{\chi}}(t_0) = E\left\{\boldsymbol{\chi}(t_0)\right\}\ dado \tag{C.4}$$

Entre las (C.1) y (C.4) escribimos el modelo del proceso incremental $\delta\boldsymbol{\chi} \triangleq \boldsymbol{\chi} - \hat{\boldsymbol{\chi}}$ según:

$$\delta\dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{A}(t)\delta\boldsymbol{\chi} + \mathbf{B}(t)\boldsymbol{\xi};\ \ E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}(t_0)\right\} = 0 \tag{C.5}$$

Por su parte, para la matriz de covariancia del proceso (C.1) se expresa como:

$$\mathbf{P}(t) \triangleq E\left\{(\boldsymbol{\chi}(t) - \hat{\boldsymbol{\chi}}(t))(\boldsymbol{\chi}(t) - \hat{\boldsymbol{\chi}}(t))^T\right\} = E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}(t)\delta\boldsymbol{\chi}(t))^T\right\} \tag{C.6}$$

Con base en la anterior calculamos usando el modelo (C.5):

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}(t) &= E\left\{\delta\dot{\boldsymbol{\chi}}(t)\delta\boldsymbol{\chi}(t))^T\right\} + E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}(t)\delta\dot{\boldsymbol{\chi}}(t))^T\right\} \\
&= E\left\{(\mathbf{A}(t)\delta\boldsymbol{\chi}(t) + \mathbf{B}(t)\boldsymbol{\xi}(t))\delta\boldsymbol{\chi}(t))^T\right\} + E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}(t)(\mathbf{A}(t)\delta\boldsymbol{\chi}(t) + \mathbf{B}(t)\boldsymbol{\xi}(t))^T\right\} \\
&= \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)^T + E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}(t)\boldsymbol{\xi}(t)^T\right\}\mathbf{B}(t)^T + \mathbf{B}(t)E\left\{\boldsymbol{\xi}(t)\delta\boldsymbol{\chi}(t)^T\right\}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Para evaluar el último término de la ecuación anterior, partimos de la solución general del sistema (C.5):

$$\begin{aligned} &\delta\boldsymbol{\chi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\delta\boldsymbol{\chi}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\boldsymbol{\xi}(\tau)d\tau \\ &\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0) = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0);\ \boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0) = I \end{aligned} \tag{C.8}$$

Dada la independencia entre $\boldsymbol{\xi}(t)$ y $\delta\boldsymbol{\chi}(t_0)$ y usando las (C.8) y la definición del delta de Dirac tiene:

$$\begin{aligned} E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}(t)\boldsymbol{\xi}(t)^T\right\}\mathbf{B}(t)^T &= \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)E\left\{\boldsymbol{\xi}(\tau)\boldsymbol{\xi}(t)^T\right\}d\tau\mathbf{B}(t)^T = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\delta(t-\tau)\mathbf{Q}(t)d\tau\mathbf{B}(t)^T \\ &= \mathbf{B}(\tau)\int_{t_0}^{t} \delta(t-\tau)d\tau\mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(t)^T = \mathbf{B}(t)\int_{0}^{t-t_0} \delta(\lambda)d\lambda\mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(t)^T \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{B}(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda)d\lambda\mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(t)^T = \frac{1}{2}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(t)^T \end{aligned} \tag{C.9}$$

Finalmente, puesto que $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(t)^T$, sustituyendo el resultado anterior en la Ec. (C.7) se obtiene la ecuación diferencial matricial que describe la propagación temporal de la matriz de covariancia del proceso $\boldsymbol{\chi}(t)$.

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)^T + \mathbf{B}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(t)^T;\ \mathbf{P}(t_0)\ dada \tag{C.10}$$

Correlación con la observación del proceso

Consideramos la observación del proceso (C.1) perturbada por el ruido $\boldsymbol{\eta}(t)$ y su desviación:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\boldsymbol{\chi}(t) + \boldsymbol{\eta}(t) \Rightarrow \delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\delta\boldsymbol{\chi}(t) + \boldsymbol{\eta}(t) \tag{C.11}$$

y la covariancia cruzada $\mathbf{P}_{\chi y}(t) = E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}(t)\delta\mathbf{y}(t)^T\right\}$

$$\mathbf{P}_{\chi y}(t) = E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}(t)\delta\boldsymbol{\chi}(t)^T\right\}\mathbf{H}^T + E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}(t)\boldsymbol{\eta}(t)^T\right\} = \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{\chi\eta}(t) \tag{C.12}$$

El término de la correlación $\mathbf{R}_{\chi\eta}(t) = E\left\{\delta\boldsymbol{\chi}(t)\boldsymbol{\eta}(t)^T\right\}$ se evalúa partiendo de la solución (C.8) para obtener, siguiendo los pasos de la (C.9):

$$\mathbf{R}_{\chi\eta}(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)E\left\{\boldsymbol{\xi}(\tau)\boldsymbol{\eta}(t)^T\right\}d\tau = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{R}_{\xi\eta}(\tau,t)d\tau \tag{C.13}$$

Cuando los ruidos $\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t)$ sean centrados y descorrelacionados entre sí, $\mathbf{R}_{\xi\eta} \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{R}_{\chi\eta} = 0$. En ese caso se tiene:

$$\mathbf{P}_{\chi y}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T \tag{C.14}$$

Cuando pueda considerarse que $\mathbf{R}_{\xi\eta}(\tau, t) = \delta(t-\tau)\mathbf{Q}_{\xi\eta}$, un desarrollo similar al que conduce a la Ec. (C.9) permite mostrar que:

$$\mathbf{R}_{\chi\eta}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}_{\xi\eta} \tag{C.15}$$

Con lo cual en este caso se tiene:

$$\mathbf{P}_{\chi y}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T + \frac{1}{2}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}_{\xi\eta} \tag{C.16}$$

Referencias

Anderson, S. R. & R.B. Flint, 1959; "*The CAA Doppler omnirange"*; Proceedings of the IRE, 47, May.

Andrieu Ch., A. Doucet, S. Singh, V. B. Tadic, 2004; "*Particle Methods for Change Detection, System Identification and Control"*; IEEE Proc., Vol. 92, No. 3, March.

Arfken G.B., H.J. Weber, (1995), *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, Ca., USA.

Argeseanu, V., 1995, *Upward Continuation of Surface Gravity Anomaly Data*, Proceedings of IAG Symposium G4 Airborne Gravity Field Determination, XXI General Assembly of the IUGG, Boulder Colorado, July 2-14, pp. 95-102 University of Calgary.

Arulampalam M. S., S. Maskell, N. Gordon and T. Clapp, 2002; *"A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking"*; IEEE Trans. Sign. Proc., Vol. 50, No. 2, February.

Åström K. J., B. Wittenmark, 1995, "A*daptive Control"*, Addison-Wesley.

Åström K. J., 1970, *Introduction to Stochastic Control Theory,* Academic Press, 1970.

Ayazi F. and K. Najafi, 1998, "*Design and fabrication of a highperformance polysilicon vibrating ring gyroscope,*" in Proc. IEEE Micro Electro Mechanical Systems Workshop (MEMS'98), Heidelberg, Germany, Feb. pp. 621–626.

Barbour N.M., 2004, "*Inertial Navigation Sensors",* NATO-RTO Advances in Navigation Sensors and Integration Technology; Educational Notes SET-064; Feb.

Bar-Itzhack, I.Y., and N. Berman, 1988, "*Control Theoretic Approach to Inertial Navigation Systems*", J. of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.11, pp.237-245.

Bergman N., L. Ljung, F. Gustafsson, 1999; *"Terrain navigation using Bayesian statistics."* IEEE Control System Magazine, 19(3):33-40.

Bernstein J., S. Cho, A. T. King, A. Kourepenis, P. Maciel, and M. Weinberg, 1993, "A micromachined comb-drive tuning fork rate gyroscope," in *Proc. IEEE Micro Electro Mechanical Systems Workshop (MEMS'93),* Fort Lauderdale, FL, Feb. pp. 143–148.

Bortz J. E. , 1971, *A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation*, IEEE Trans. On Space and Electronic Systems, Vol. 7 No. 12, Jan. 1971, pp 61-66.

Bortz, J. E., 1971, "*A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation*" IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*s*, Vol. AES-7, No. 1, pp. 61–66.

Boyce, W. E., R.C. Diprima, 1997, "*Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems",* VI ed., John Wiley & Sons, Inc.

Bucy R., P. Joseph, 1987, *Filtering for Stochastic Processes With Applications to Guidance.* Chalsea, Pub. Co. NY.

Butcher J. C., 2003, "*Numerical methods for ordinary differential equation",* John Wiley and Sons, 2ª Ed..

Carrizo, J. A., M. España y J. I. Giribet, 2007, "*Algoritmo de navegación inercial para vehículos de alta velocidad*"; Reunión de Procesamiento de Información y Control, RPIC, Rio Gallegos Arg. 16-18 Oct..

Carrizo, J. A., M. España y J. I. Giribet, 2014, "*Reconstructibilidad y Observabilidad por Subespacios: Aplicación a la Navegación"; ARGENCON*-2014, Congreso Bienal IEEE Argentina, Bariloche, Junio 11-13.

Carrizo, J. A. 2019, "*Sistema de navegación de un cohetes suborbital*"; Tesis de Ing. FIUBA, Febr. 2019.

Castillo G., España M., Giribet J. 2013 "*Desarrollo y Evaluación de un Algoritmo de Navegación INS-GPS-Magnetómetro para un SAR Aerotransportado*", XV RPIC, Bariloche, Sept.

Castillo G., 2012 "*Navegación integrada INS/GPS: Aplicación al SAR aerotransportado de CONAE*". Tesis de Ingeniero del Depto. de Electrónica de la FIUBA.

Chatfield A. , 1997, *Fundamentals of High Accuracy Inertial Navigation*, Vol 174, Progress in Astronautics and Aeronautics (AIAA)

Chung D., Park C. G. & Lee J. G., 1996, "*Observability Analysis of Strapdown Inertial Navigation System Using Lyapunov Transformation*", Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control Kobe, Japan, December.

Curlander J.C., R.N McDonough, 1991, "*Synthetic aperture radar, systems and signal processing"*. J. Wiley, NY.

Enge P., T. Walter, S. Pullen, Ch. Kee, Yi-Ch. Chao, Y.-J. Tsai, 1996; *"Wide Area Augmentation of the Global Positioning System"* Proc. IEEE, Vol. 84, No. 8, Aug.

España M., J. I. Giribet, C. Miranda, 2006; "*Navegación Integrada y Georreferenciación Directa de Sensores Remotos Aerotransportados";* XXº Congreso Argentino de Control Automático, 28-30 Ago., Buenos Aires, Argentina.

Farrell Jay, "*Aided Navigation: GPS with High Rate Sensors*"; McGraw-Hill Co. NY, 2008, 530pp.

Gabrielson T.B., 1993, "*Mechanical-thermal noise in micromachined acoustic and vibration sensors"* IEEE Tr. Electron Devices, Vol. 40, May.

Geen J.A., S.J. Sherman, J.F. Chang and S.R. Lewi, 2002s, "*Single-chip surface micromachining integrated gyroscope with 50 deg/hour root Allan variance*", IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol. 37, No. 12, December 2002.

Geiger W., B. Folkmer, J. Merz, H. Sandmaier, W. Lang, 1998, "*A new silicon rate gyroscope,"* Proc. IEEE Micro Electro Mechanical Systems Workshop (MEMS'98), Heidelberg, Germany, Feb.

Giribet J. I, España M., Miranda C. ,2007; "S*ynthetic Data for Validation of Navigation Systems*," Acta Astronautica, **Vol. 60, N. 2**, pp 88-95.

Giribet J.I., M. España y C. Miranda, 2003, *"Algoritmos de navegación inercial para cinemáticas con escalas de tiempo disímiles*". *Proceedings* del Congreso Argentino de Tecnología Espacial, Neuquén, Arg..

Gold, R. "*Optimal Binary Sequences for Spread Spectrum Multiplexing"*, 1967; IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-13, pp.619-621, Oct.

Goodwin, G. C., Stefan F. G. y Salgado M. E., 2001; *Control System Design*; Prentice Hall.

Grejner-Brzezinska, D. y J. Wang, 1998; G*ravity Modeling for High_Accuracy GPS/INS Integration;* Navigation, , Vol. 45, Nº 3, pp 209-220.

Grewal M. S., L. R. Weill, A. P., Andrews 2007. *"Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration",* John Wiley & Sons. Inc., New Jersey, EEUU.

Han S., J. Wang, N. Knight, 2009; "*Using Allan Variance To Determine The Calibration Model Of Inertial Sensors For Gps/Ins Integration"* 6th International Symp. on Mobile Mapping Tech., Presidente Prudente, São Paulo, Brazil, July 21-24.

Hein G., J. Godet, J.-L. Issler, J. Martin, P. Erhard, R. Lucas-Rodriguez and T. Pratt, 2002; "*Status of Galileo frequency and signal design"*, Proc. of IONGPS, Portland, USA.

Hofmann-Wellenhof, B. Moritz;H., 2006, *Physical Geodesy,* Springer-Wien, NewYork,. Hurley, H.C., S. R. Anderson, & H.F. Keany; 1951, "*The CAA VHF Omnirange";* Proceedings of the IRE, 39, Dec.

Hutton J. J., T, Savina, E. Lithopoulos 1997; *Photogrammetric Applications Of Applanix's Position And Orientation System (Pos)*, ASPRS/MAPPS Softcopy Conference, Arlington, Virginia, July 27-30.

Hsu Y. D., "*An Accurate and Efficient Approximation to Normal Gravity"* 1998, Position Location and Navigation Symposium, IEEE, 20-23 April.

Hyder A. K, Shahbazian E., Waltz E., 2003, "*Multisensor Fusion"* Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Multisensor Data Fusion, Springer.

IEEE Std. 1554, 2005, *Recommended Practice for Inertial Sensor Test Equipment, Instrumentation, Data Acquisition, and Analysis, Integrated Sensors, microactuators & Microsystems (MEMS);* 1998 Número especial de los Proceedings of the IEEE, Vol. 86, nº 8, Aug.

IEEE *Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Optic Gyros*. IEEE Std. 647-2006.

Ignagni M. B. 1994, *"On the Orientation Vector Differential Equation in Strapdown Inertial Systems"*; IEEE Trans. Aerospace & Electronic Systems Vol. 30, Nº 4, Oct.

Ignagni M. B. 1998, "*Duality of Optimal Strapdown Sculling and Coning.Compensation Algorithms*"; Navigation of the Institute of Navigation, Vol. 45, No. 2. pp. 85-96.

Jazwinski, A.H., 1970, "*Stochastic Processes and Filtering Theory"*. Academic Press, New York.

Jekeli, C.,· Lee J. K., Kwon, J. H., 2007, *Modeling errors in upward continuation for INS gravity compensatio*n, J. Geod. Vol. 81, pp: 297–309,

Jekeli, C., 1997, The effect of Earth's gravity on precise, short-term, 3-D free-inertial navigation. Navigation Vol. 44 (3) pp:347–357.

Jiang Y and Lin Y , 1992, "*Error estimation of INS ground alignment through observability analysi*s", IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. **28** 92–6.

Jordan, J. W., 1969, "*An Accurate Strapdown Direction Cosine Algorithm*" NASA TND- 5384, Sept.

Julier S. J., J. K. Uhlmann and H. F. Durrant-Whyte, 1995. "*A New Approach for Filtering Nonlinear Systems*." Proceedings of the American Control Conference, Seattle, Washington., pages 1628–1632.

Julier S. J., J. K., Uhlmann and H. F. Durrant-Whyte, 1996, "*A New Approach for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Linear Filters*". IEEE Transactions on Automatic Control, Accepted for publication as a Technical Note.

Juneau T., A. P. Pisano, and J. H. Smith, 1997 "*Dual axis operation of a micromachined rate gyroscope*"; Conf. Solid-State Sensors and Actuators (Transducers'97*),* Chicago, June.

Kailath T. , 1983, "*Lectures on Winner and Kalman Filters",* Courses and Lectures No. 140, Spinger, NY, 2nd Ed.

Kalman, R. E. 1960; *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering Vol. 82: pag. 35-45

Kaplan E. D. and Ch. J. Hegarty, 2006; *"Understanding GPS: Principles and Applications"* Artech House, (2nd edition).

Kautsky, J. and N.K. Nichols, 1985, "*Robust Pole Assignment in Linear State Feedback,*" Int. J. Control, 41, pp. 1129-1155.

Kayton M., W. R. Fried, 1997; "*Avionics Navigation Systems*", 2nd Ed., John Wiley & Sons.

Keshner M. S. ,1982, "*1/f Noise"*, Proceedings of the IEEE, Vol. 70, No. 3.

Kuo, B., 1995, "*Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall

Kwok C., D. Fox, M. Meil,2004; *"Real-Time Particle Filters"*; IEEE Proc., Vol. 92, No. 3, March.

Laning J. H.,1949, *The vector analysis of finite rotations and angles";* MIT, Cambridge, Special Report, 6398-S-3, 1949.

Laub, A.J. and M. Wette, 1984, *Algorithms and Software for Pole Assignment and Observers*, UCRL-15646 Rev. 1, EE Dept., Univ. of Calif., Santa Barbara, CA, Sept..

Le Traon, O.; Janiaud, D.; Lecorre, B.; Pernice, M.; Muller, S.; Tridera, J.-Y., 2005; "*Monolithic Differential Vibrating Beam Accelerometer Within An Isolating System Between The Two Resonators";* IEEE-Sensors, Oct..

Li B., D. Hullender & M Direnzo, 1998; *"Nonlinear induced disturbance rejection in inertial stabilized systems"*, IEEE Trans. Cont. Syst. Techn., Vol 6, nº 3, May.

Luo R. C. ,Y. Ch. Chou, O. Chen; 2007; *"Multisensor Fusion and Integration: Algorithms, Applications, and Future Research Directions"*, Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, Harbin, China, Aug.

Lutz M., W. Golderer, J. Gerstenmeier & D. Schubert, 1997; "*A precision yaw rate sensor in sillicon micromachining,*" Tech Dig 9th Intl. Conf. Solid State Sensors and Actuators (Transducers '97), Chicago, IL:847-850; June.

Marinsek Gonzalo, *Calibración y caracterización estocástica de unidades de medidas inerciales MEMS.* Tesis de Ingeniero FIUBA 2011.

Masson F., 2003; *"Navegación Autónoma Robusta en Grandes Superficies"* Tesis PhD., Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, Sept..

Miller, R. 1983 "*A new Strapdown Attitude Algorithm"*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 6, No. 4.

Misra, P., P. Enge, 2006; "*Global Positioning System. Signal Measurements and Performance*", Ganga-Jamuna Press, 2nd Edit.

Motamedi, M.E.; 1994; "*Acoustic Sensor Technology*"; Microwave Symposium Digest; IEEE MTT-S International.

Papoulis A., 1991; *"Probability, Random Variables and Stochastic Processes"* McGraw Hill, 3rd. Edition.

Papoulis A., 1962; *"The Fourier Integral and its Applications"* McGraw Hill.

Parkinson B. W. and J. J. Spilker, Editors, 1996; "*The global positioning system: theory and applications";* American Institute of Aeronautics and Astronautics, Vols. I y II.

Proakis J. G. and M. Saleshi, 2002; "*Communications Systems Engineering*"; Prentice Hall. New Jersey, 2nd Edition.

Pullen S. and P. Enge, 2004; "*A Civil User Perspective on Near-Term and Long-Term GPS Modernization";* Proceedings of GPS/GNSS Symp. 2004, Tokyo, Japan, November 17-19.

Quinchia A. G., G. Falco, E. Falletti, F. Dovis and C. Ferrer; 2013, "*A Comparison Between Different Error Modeling of MEMS Applied to GPS/INS Integrated Systems*"; Sensors, 13, 9549-9588.

Roncagliolo P.A., J.G. Garcia, C.H. Muravchic, 2012 "*Optimized Carrier Tracking Loop Design for Real-Time High-Dynamics GNSS Receivers";* international Journal of Navigation and Observation; Vol. 2012, Art-ID 651039, 18 pages.

Royalty J. M. B., 2005; "Method to decouple mechanically coupled gimbal control systems", Proc. SPIE, vol. 5810, pp 11-23.

Sanders, S., Strandjord, L. and Mead, D., 2002; "*Fiber-Optic Gyro Technology Trends – A Honeywell Perspective"*, Invited Paper, 15th Optical Fiber Sensors Conference Technical Digest, Vol. 1, pp. 5-8.

Savage P. G., 2006; "*A Unified Mathematical Framework for Strapdown Algorithm Design"* ; Journal of Guidance, Control and Dynamics,Vol. 29, No. 2,.

Savage P. G., 1998; "*Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 1: Attitude Algorithms"*;· Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol 21, No 1, Jan.

Savage P. G., 1998 "*Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 2: Velocity and Position Algorithms*"; Journal of Guidance, Control and Dynamics,Vol 21, No. 2, Mar.

Savage, P. G., 1996; "*A New Second-Order Solution for Strapped-Down Attitude Computation*" AIAA/JACC Guidance and Control Conf., Aug. Schon T. B., R.

Karlsson & F. Gustafsson, 2006; "*The Marginalized Particle Filter in Practice";* IEEE, AC Conf. March.

Schwarz, K. P., Wei, M. , 1994, *Aided Versus Embedded A Comparison of Two Approaches to GPS/INS Integration*, Proceedings of IEEE Position Location and Navigation Symposium, April 11-15, Las Vegas, pp. 314-321.

Shannon, C., 1944, *Communication in the Presence of Noise*, Proceedings of the IRE, vol. 37, no.1, pp. 10–21, Jan. 1949.

Shtessel, Y. B., 1995; "*Decentralized Sliding Mode Control in Inertial Navigation Systems",* American Control Conference, Seattle, Washington, June.

Siegwart R., I. R. Nourbakhsh, 2004; "*Introduction to Autonomous Mobile Robots",* MIT Press.

Smith S. G., 1987; "*Ring Laser Gyros"* Phys. Techno1ogy, 18 UK.

Subramanian H. V. K. Varadan, V. V. Varadan and M. J. Vellekoop, 1997; "*Design and Fabrication of Wireless Remotely Readable MEMS Based Microaccelerometers";* Smart Mater. Struct. 6 730-738.

Tehrani, M. M., 1983, "*Ring Laser Gyro Data Analysis with Cluster Sampling Technique*," Proceedings of the SPIE, Vol. 412, pp. 207-222.

Teunissen P.J.G., P.J. de Jonge and C.C.J.M. Tiberius, 1995; *"The Lambda-Method For Fast GPS Surveying"* Proceedings of International Symposium "GPS technology applications", Bucharest, Romania, September 26-29, pp. 203-210.

Teunissen P.J.G., 1995; *The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation",* Journal of Geodesy, 70:65-82.

Teunissen P.J.G., 1994; "*A new method for fast carrier phase ambiguity estimation." Proceedings IEEE Position, Location and Navigation Symposium PLANS '94,* Las Vegas, NV, April 11-15, pp. 562-573.

Titterton D. H., and J. Weston, 2004, "*Strapdown Inertial Navigation Technology*", IEE & AIAA, 2nd Edition.

Titterton D.H. & J.L. Weston, 1997, *"Strap Down Inertial Navigation Technology"*, Peter Peregrinus Ltd., IEE, Londres.

Toran-Marti F. and J. V. Traveset, 2004; "*The ESA EGNOS Project: The First Step of the European Contribution to the Global Navigation Satellite System (GNSS)*"; Navigare Conference, Winterthur (Switzerland), June.

Torge Wolfgang, 2001, *Geodesy,* De Gruyter, NY.

Van Der Merwe R. ,2004; "*Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models*" Ph.D Thesis, School of Science & Engineering at Oregon Health & Science University, April.

Van Der Water, H. y J. C. Willems, 1981; "*The Certainty Equivalence Property in Stochastic Control Theory";* IEEE-TAC; Vol. 26, Iss. 5, Oct. 1981.

Wang H.G. y T. C. Williams, 2008; *"Strategic Inertial Navigation Systems"*; IEEE Control Systems Mag., Vol. 28, nº 1, Feb.

Wahr, J., 1999, *Geodesy and Gravity*, Zamisdat Press (FTP: zamisdat.mines.edu).

Wei, M., & Schwarz, K. P. , 1990; "*A strapdown inertial algorithm using an earth-fixed cartesian frame*". Navigation: Journal of the Institute of Navigation, 37(2), 153–167.

Wertz James R., (Editor); 1978; "*Spacecraft Attitude Determination and Control"*; Kluwer Academic Publishers, Holanda.

World Geodetic System 1984, 2004; National Imagery Agency (NIMA) Technical Report Nº TR8350-2 actualizado en junio.

Yazdi N., F.Ayazi & K. Najafi; 1998; "*Micromachined Inertial Sensors"*; IEEE, Proc., Vol. 86, No. 8, Ag.

Yinger C. H., W. A. Feess, V. Nuth, R.N. Haddad, 2003; "*GPS Accuracy vs. Number of NIMA Stations*", *Proceedings of ION GPS* Sept. 9-12.

Zadeh, L. A.; Desoer, Ch. A., 1963; *Linear System Theory-The State Space Approach*; McGraw-Hill Book Co., N. York.